1. $\det \mathcal{H} > 0$ e $\mathcal{H}_{11} > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di minimo relativo isolato;
2. $\det \mathcal{H} > 0$ e $\mathcal{H}_{11} < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di massimo relativo isolato;
3. $\det \mathcal{H} < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di sella.

[*Soluzione.* Poniamo $z = (x, y)$ e $z_0 = (x_0, y_0)$. Poiché f è di classe C^2 si ha

$$f(z) = f(z_0) + \langle z - z_0, \mathcal{H}(z - z_0)\rangle + R(z, z_0), \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{R(z; z_0)}{|z - z_0|^2} = 0,$$

dove si è tenuto conto che $[\partial f/\partial z](z_0) = 0$ poiché z_0 è un punto stazionario e che $R(z; z_0)$ tende a zero più velocemente di $|z - z_0|^2$ (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3). In particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|z - z_0| < \delta$ si ha $|R(z; z_0)| < \varepsilon |z - z_0|^2$. Se $\det \mathcal{H} > 0$ e $\mathcal{H}_{11} > 0$ la forma quadratica $\langle z - z_0, \mathcal{H}(z - z_0)\rangle$ è definita positiva (cfr. l'esercizio 9 del capitolo 4), quindi esiste $c > 0$ tale che $\langle z - z_0, \mathcal{H}(z - z_0)\rangle \geq c|z - z_0|^2$ (cfr. l'esercizio 2). Fissato $\varepsilon = c/2$ e preso δ consistentemente si ha allora $f(z) - f(z_0) \geq (c/2)|z - z_0|^2 > 0$ per $|z - z_0| < \delta$, quindi z_0 è un punto di minimo relativo isolato. Se invece $\det \mathcal{H} > 0$ e $\mathcal{H}_{11} < 0$ si trova $f(z) - f(z_0) \leq -(c/2)|z - z_0|^2 < 0$, dove $c > 0$ è tale che $\langle z - z_0, \mathcal{H}(z - z_0)\rangle \leq -c|z - z_0|^2$, quindi z_0 è un punto di massimo relativo isolato. L'ultimo caso si discute in modo analogo.]

Esercizio 5 Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, i.e. tale che

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$$

esiste ed è finito. Allora per ogni $c > 0$ si ha

$$\lim_{a \to +\infty} \int_a^{a+c} \mathrm{d}x\, f(x) = 0.$$

[*Soluzione.* Definiamo

$$I(a, b) := \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)$$

Per ipotesi esiste $\ell = I(0, +\infty) := \lim_{b \to +\infty} I(0, b)$. Si ha allora $I(0, +\infty) = I(0, a) + I(a, a + c) + I(a + c, +\infty)$ per ogni $a, c > 0$. Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists b > 0$ tale che $|I(a, +\infty)| = |I(0, a) - \ell| < \varepsilon/2\ \forall a > b$. In particolare per $a > b$ e $c > 0$ si ha $|I(a+c, +\infty)| < \varepsilon/2$ e $|I(0, a) - \ell| < \varepsilon/2$, quindi $|I(a, a + c)| \leq |I(0, a) - \ell| + |I(a + c, +\infty)| \leq \varepsilon$. Ne segue che $I(a, a + c) \to 0$ per $a \to +\infty$.]

Esercizio 6 Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua tale che

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, |f(x)| < +\infty.$$

Si dimostri che allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. [*Soluzione.* Supponiamo per assurdo che $f(x)$ non tenda a 0. Allora, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $M > 0$ esiste $x > M$ tale che $|f(x)| > \varepsilon$. In particolare, per tale ε, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può trovare x_n tale che $|f(x_n)| > \varepsilon$. Poiché f è uniformemente continua, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\delta > 0$ tale che $|x-y| < \delta$ implica $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. Quindi si ha $|f(x)| > |f(x_n)|-|f(x)-f(x_n)| > \varepsilon/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in (x_n - \delta, x_n + \delta)$. Segue che

$$I_n := \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \mathrm{d}x\, |f(x)| \geq \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \mathrm{d}x\, \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon\delta > 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, che è in contraddizione con il fatto che $I_n \to 0$ per $n \to \infty$ (cfr. l'esercizio 5).]

Esercizio 7 Con riferimento all'esercizio 6 si mostri che l'ipotesi di continuità uniforme è essenziale perché valga il risultato. [*Suggerimento.* Siano $\{x_n\}$ una successione reale monotona divergente e $\{\delta_n\}$ una successione sommabile (per esempio $\delta_n = 1/n^2$). Si consideri una funzione continua $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ che sia nulla al di fuori degli intervalli $I_n := (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ e soddisfi $f(x_n) = a > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq f(x) \leq a$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n-\delta_n}^{x_n+\delta_n} \mathrm{d}x\, f(x) \leq 2a \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < +\infty.$$

Tuttavia la funzione $f(x)$ non ammette limite. Infatti $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = a \neq 0 = \liminf_{x\to+\infty} f(x)$, i.e. massimo e minimo limite sono diversi, quindi non esiste il limite (come segue dal lemma 19.2).]

Esercizio 8 Si dimostri che il fatto che l'integrale in (24.28) sia finito implica che $y(t) \to 0$ e $\dot{y}(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. [*Soluzione.* La (24.28) implica

$$\frac{1}{2} y^2(t) \leq H(\theta(t), y(t)) \leq H(\theta(0), y(0)),$$

quindi $y(t)$ si mantiene limitata lungo le traiettorie. D'altra parte, la seconda equazione delle (24.2) implica

$$|\dot{y}(t)| \leq 1 + \alpha\, |y(t)|,$$

quindi anche $\dot{y}(t)$ rimane limitata. In particolare esiste $M > 0$ tale che $|\dot{y}(t)| \leq M$ $\forall t \geq 0$. Poiché $y(t)$ è di classe C^1, per ogni $t, s \in \mathbb{R}_+$ si ha, per il teorema di Lagrange (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 2),

$$|y(t) - y(s)| \leq \max_{\tau\in\mathbb{R}_+} |\dot{y}(\tau)|\ |t-s| \leq M\, |t-s|,$$

quindi per ogni $\varepsilon > 0$ si può scegliere $\delta = \varepsilon/M$ in modo tale che $|t-s| < \delta$ implica $|y(t) - y(s)| < \varepsilon$. Pertanto $y(t)$ è uniformemente continua e, per l'esercizio 6, si ha $y(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Derivando la seconda equazione in (24.2), si ottiene $\ddot{y} = -\cos\theta\,\dot{\theta} - \alpha\dot{y}$, quindi $|\ddot{y}(t)| \leq |y(t)| + \alpha|\dot{y}(t)|$, che mostra che $\ddot{y}(t)$ è limitata, così che, ragionando per $y(t)$, si trova che $\dot{y}(t)$ è anch'essa uniformemente continua. Supponiamo per assurdo che $\dot{y}(t)$ non converga a 0. Allora, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $M > 0$ esiste $\tau > M$ tale che $|y(\tau)| \geq \varepsilon$; da qui segue che possiamo costruire una successione divergente $\{t_n\}$ tale che $|\dot{y}(t_n)| > \varepsilon$. Poiché $\dot{y}(t)$ è uniformemente continua, fissato $\varepsilon_1 > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|\dot{y}(t)-\dot{y}(s)| < \varepsilon_1$ per ogni t, s tali che $|t-s| < \delta$. Quindi, se scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ e definiamo $I_n := (t_n - \delta, t_n + \delta)$, si ha $|\dot{y}(t)| \geq |\dot{y}(t_n)| - |y(t_n) - y(t)| > \varepsilon/2$ per ogni $t \in I_n$. Se $t, s \in I_n$, per il teorema del valor medio (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 2) si ha $y(t)-y(s) = \dot{y}(t_n^*)(t-s)$ per qualche $t_n^* \in I_n$, così che, se $t, s \in I_n$ sono tali che $|t-s| = \delta$, si trova $|y(t)-y(s)| = |\dot{y}(t_n^*)|\,|t-s| > \varepsilon\delta/2$. D'altra parte, poiché $y(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, per ogni $\varepsilon_2 > 0$ esiste $M_2 > 0$ tale che si ha $|y(t)| < \varepsilon$ per $t > M_2$. Se fissiamo $\varepsilon_2 := \varepsilon\delta/4$, per n tale che $t_n > \max\{M, M_2\}$ si ha $\varepsilon\delta/2 = 2\varepsilon_2 > |y(t) - y(s)| > \varepsilon\delta/2$, che porta a una contraddizione.]