Esercizio 9 Si consideri il sistema planare (25.1) discusso nel §25. Si dimostri che è sufficiente studiare le curve di livello γ_E per $E \neq 0$ nel primo quadrante, dove esse ammettono rappresentazione cartesiana

$$x = x_{\pm}(y) := \sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}.$$

[*Soluzione.* Per $y \neq 0$, l'equazione $H(x,y) = E$ si può scrivere nella forma

$$x^4 + 2\left(y^2 - 2\right)x^2 + \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 3\right) - \frac{E}{y} = 0,$$

che, risolta, dà

$$x^2 = -\left(y^2 - 2\right) \pm \sqrt{\left(y^2 - 2\right)^2 - \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 3\right) + \frac{E}{y}} = \left(2 - y^2\right) \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}.$$

Si noti che se $E = 0$ ritroviamo $x^2 + y^2 = 2 \pm 1$, consistentemente con il §25.3. In generale si ha $x = \pm x_{\pm}(y)$, dove $x_{\pm}(y)$ è definita per y tale che $1 + E/y \geq 0$ e $2 - y^2 \pm \sqrt{1 + E/y} \geq 0$. Poiché $H(x,y) = H(-x,y) = -H(x,-y)$, una volta studiate le curve di livello nel quadrante $x \geq 0, y > 0$, le curve negli altri quadranti si ottengono per riflessione rispetto agli assi coordinati.]

Esercizio 10 Si dimostri che le curve di livello del sistema (25.1) nel primo quadrante, per $E > 0$, sono contenute nella regione $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, dove (cfr. la fig. 5.20)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > \sqrt{3 - x^2} \text{ se } x < \sqrt{3},\ y > 0 \text{ se } x \geq \sqrt{3}\right\}, \\ \mathcal{A}_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1 - x^2} > y > 0\right\}, \end{aligned}$$

mentre, per $E < 0$, sono contenute nella regione

$$\mathcal{A}_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{3},\ \sqrt{3 - x^2} > y > \sqrt{1 - x^2} \text{ se } 0 \leq x < 1,\ \sqrt{3 - x^2} > y > 0 \text{ se } x \geq 1\right\}.$$

[*Suggerimento.* Poiché è continua e si annulla solo per $(x,y) \in \gamma_0$, $H(x,y)$ ha sempre lo stesso segno in ciascuno degli insiemi aperti connessi in cui γ_0 divide il piano. Per determinare il segno in ognuno di tali insiemi è sufficiente calcolare la funzione in un punto qualsiasi dell'insieme e verificare se è positivo o negativo. Si ha $H(0,+\infty) = +\infty$, $H(0,1/2) = 33/32$ e $H(0,3/2) = -45/32$. Da qui segue l'asserto.]

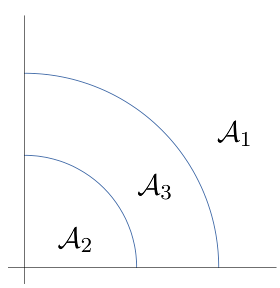

Figura 5.20: Insiemi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ dell'esercizio 10.

Esercizio 11 Si studino le curve di livello γ_E del sistema (25.1) per $E \neq 0$. [*Suggerimento.* Si usino le notazioni dell'esercizio 10. Per $E > 0$, la funzione $x_+(y)$ è definita per $y \in (0, y_0]$, dove $y_0 = y_0(E)$ è la soluzione unica dell'equazione $y^2 - 2 = \sqrt{1 + E/y}$ per $y > 0$. Che tale soluzione esista e sia unica si vede confrontando i grafici delle due funzioni $y^2 - 2$ e $\sqrt{1 + E/y}$ per $y > 0$ (cfr. la figura 5.21); poiché $2 - y^2 + \sqrt{1 + E/y} > 3 - y^2$ per $E, y > 0$ si ha $y_0 > \sqrt{3}$. Inoltre si ha

$$\frac{\mathrm{d}x_+}{\mathrm{d}y}(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2 - y^2 + \sqrt{1 + \dfrac{E}{y}}}} \left(2y + \frac{E}{2y^2\sqrt{1 + \dfrac{E}{y}}} \right) < 0,$$

quindi $x_+(y)$ è strettamente decrescente e tale che $x_+(y_0) = 0$ e $\lim_{y \to 0^+} x_+(y) = +\infty$. In conclusione, la curva $(x_+(y), y)$, con $y \leq y_0$, si trova nella regione $\mathcal{A}_1$ ed è come nella figura 5.19.

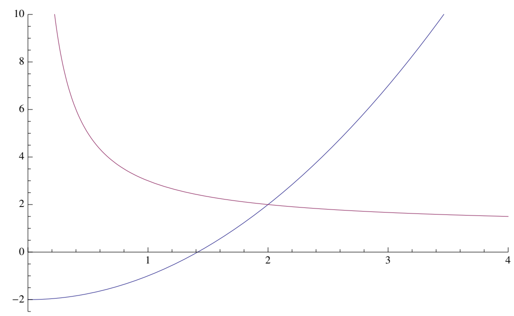

Figura 5.21: Grafico delle curve $y^2 - 2$ e $\sqrt{1 + E/y}$ per $E = 2$.

Sempre per $E > 0$, perché la funzione $x_-(y)$ sia definita occorre che sia $2 - y^2 \geq \sqrt{1 + E/y}$. L'equazione $2 - y^2 = \sqrt{1 + E/y}$ per $y > 0$ ammette due soluzioni $y_\pm = y_\pm(E)$ se e solo se $E \leq E_0$ per un opportuno E_0; le due soluzioni sono tali che $0 < y_- \leq y_+ < 1$ e concidono per $E = E_0$ (cfr. la figura 5.22). Per ogni valore di $E \in (0, E_0)$ la funzione $x_-(y)$ è quindi definita per $y \in [y_-, y_+]$, è strettamente crescente per $y \in (y_-, y_1)$ e strettamente decrescente per $y \in (y_1, y_+)$, dove $y_1 = y_1(E)$ è il valore in cui

$$\frac{\mathrm{d}x_-}{\mathrm{d}y}(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2 - y^2 - \sqrt{1 + \dfrac{E}{y}}}} \left(2y - \frac{E}{2y^2\sqrt{1 + \dfrac{E}{y}}} \right)$$

si annulla, i.e. tale che $\sqrt{1 + E/y_1} = E/4y_1^3$ (tale valore esiste ed è unico). In conclusione, la curva $(x_-(y), y)$, con $y \in [y_-, y_+]$, si trova nella regione $\mathcal{A}_2$ ed è come nella figura 5.19. Infine, per $E < 0$, le funzioni $x_+(y)$ e $x_-(y)$ sono definite in $[y_1, y_2]$ e in $[y_1, y_3]$, rispettivamente, dove y_1, y_2 e y_3, con $y_1 < y_2 < y_3$, dipendono da E; in particolare si ha $y_1 = -E$. Le due curve $(x_+(y), y)$, con $y \in [y_1, y_2]$ e $(x_-(y), y)$, con $y \in [y_1, y_3]$, sono entrambe contenute in $\mathcal{A}_3$ e si raccordano in y_1, dove $x_-(y_1) = x_+(y_1)$, mentre si ha $x_-(y_2) = x_+(y_3) = 0$, consistentemente con la figura 5.19.]

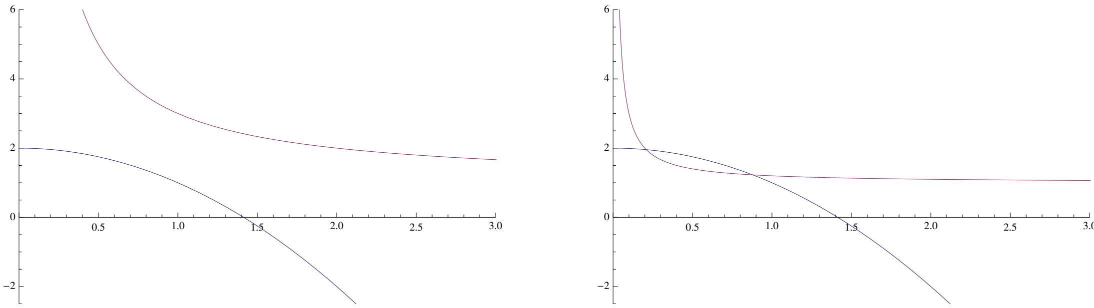

Figura 5.22: Grafico delle curve $2 - y^2$ e $\sqrt{1 + E/y}$ per $E = 2$ (a sinistra) ed $E = 0.2$ (a destra).

Esercizio 12 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 3). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = (x^2 + 2x + y^2 - 1)\,(x^2 - 2x + y^2 - 1)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* Si hanno 5 punti di equilibrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $P_3 = (\sqrt{3}, 0)$ sono stabili, $P_4 = (0, 1)$ e $P_5 = (0, -1)$ sono instabili. Le curve di livello sono rappresentate nella figura 5.23.]

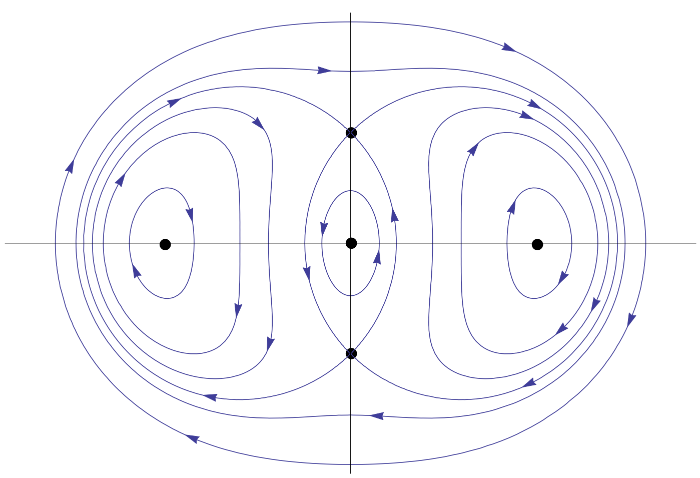

Figura 5.23: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 12.