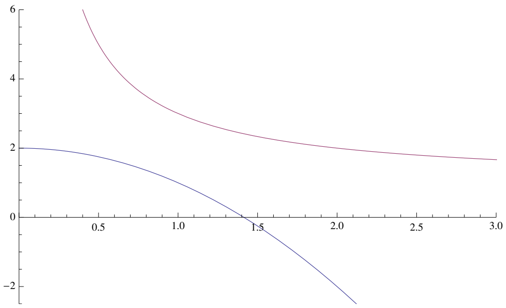

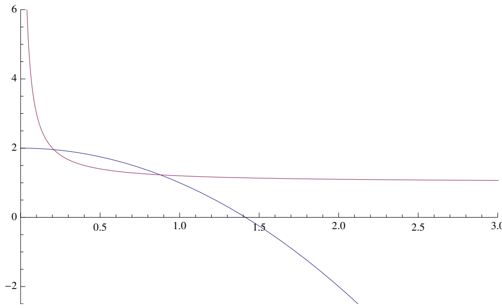

Figura 5.22: Grafico delle curve $2 - y^2$ e $\sqrt{1 + E/y}$ per $E = 2$ (a sinistra) ed $E = 0.2$ (a destra).

Esercizio 12 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 3). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = (x^2 + 2x + y^2 - 1)\,(x^2 - 2x + y^2 - 1)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* Si hanno 5 punti di equilibrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $P_3 = (\sqrt{3}, 0)$ sono stabili, $P_4 = (0, 1)$ e $P_5 = (0, -1)$ sono instabili. Le curve di livello sono rappresentate nella figura 5.23.]

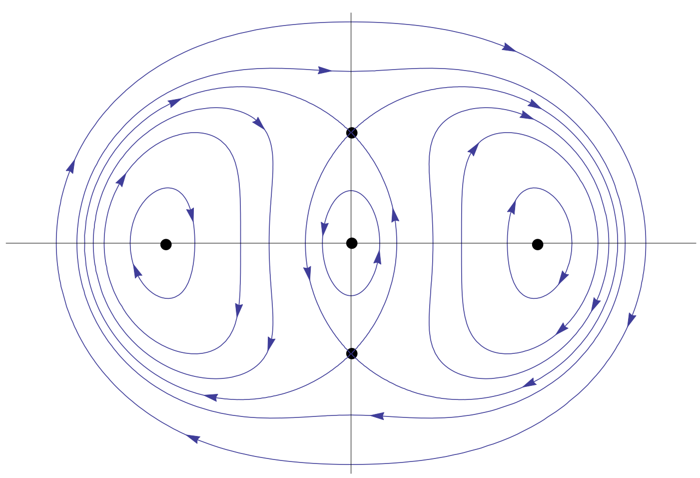

Figura 5.23: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 12.

Esercizio 13 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2 - 1\right), \\ \dot{y} = 2x\left(2x^2 - y^2\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello $\gamma_E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si calcoli il tempo in cui la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ interseca l'asse $y = \sqrt{2}$.
(6) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1/\sqrt{2}, 0)$ è periodica, se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima dall'alto e dal basso.
(7) Se si aggiunge un campo vettoriale $(0, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, si trovi un insieme positivamente invariante che contenga il punto $P_0 = (0, 0)$ e si dimostri che P_0 è asintoticamente stabile.

Esercizio 14 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^2(y - 1) - 2\left(x^2 + y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 + y - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)[(y - 1)^2 - x^2]$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello $\gamma_E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si stimi (o calcoli) il tempo t_0 necessario per andare da $(x, y) = (1/3, 2/3)$ a $(x, y) = (2/3, 1/3)$.

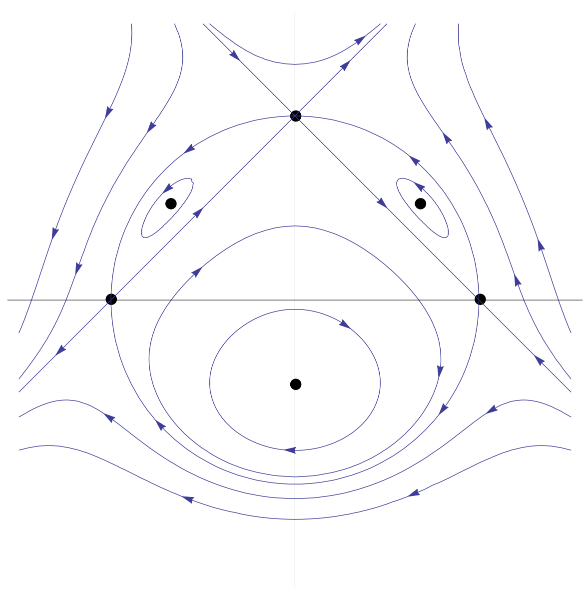

Figura 5.24: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 14.

[*Suggerimento.* Si hanno 6 punti di equilibrio: $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-1, 0)$ e $P_3 = (1, 0)$ sono instabili, mentre $P_4 = (0, -1/2)$, $P_5 = (-1/\sqrt{2}, 1/2)$ e $P_6 = (1/\sqrt{2}, 1/2)$ sono stabili. Le curve di livello γ_E sono rappresentate nella figura 5.24; in particolare $\gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, dove $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1+x\}$ e $\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1-x\}$. Il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1/3, 2/3)$ si trova in $\mathcal{C}_3$: scrivendo $y = 1-x$, la seconda equazione diventa $\dot{y} = -4y(1-y)^2$ e può essere integrata per separazione di variabili:

$$\int_{y(0)}^{y(t_0)} \frac{\mathrm{d}y}{4y(1-y)^2} = -\int_0^{t_0} \mathrm{d}t = -t_0,$$

così che, richiedendo $y(0) = 2/3$ e $y(t_0) = 1/3$, si trova $t_0 = [\log(32/5)]/8$.]

Esercizio 15 Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2, \\ \dot{y} = -y - x^2, \end{cases}$$

si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si stimi il bacino d'attrazione di eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (-2^{1/3}, -2^{2/3})$. Siano A_0 e A_1 le matrici del sistema linearizzato in un intorno di P_0 e di P_1, rispettivamente; gli autovalori di A_0 sono -1 e -2, mentre gli autovalori di A_1 sono $(-3 \pm \sqrt{33})/2$. Quindi P_0 è asintoticamente stabile (per il teorema 18.5) e P_1 è instabile (per il teorema 18.7). Si consideri la funzione di Ljapunov $W = W(x, y) := (x^2 + y^2)$. Si ha

$$\dot{W} = -4x^2 - 2xy^2 - 2y^2 - 2yx^2 \leq -2\left(2x^2 + y^2 - |xy|\,|x+y|\right) \leq -2\left(2x^2 + y^2\right)\left(1 - \frac{|x+y|}{2\sqrt{2}}\right).$$

Sia $\mathcal{P} = \overline{B_r(P_0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. L'insieme $\mathcal{P}$ è compatto e contiene P_0. Inoltre, poiché $|x + y| \leq \sqrt{2}r \ \forall (x, y) \in \mathcal{P}$, si ha $\dot{W} < 0$ in $\mathcal{P}$ purché $r < 2$. Ne segue che $\mathcal{P}$ è positivamente invariate (sulla sua frontiera il campo vettoriale punta verso l'interno perché W è il quadrato della distanza dall'origine e decresce nel tempo) e l'unica traiettoria su cui $\dot{W}$ si annulla è il punto di equilibrio P_0, così che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Barbašin-Krasovskij. Questo implica che per ogni $r < 2$ l'intorno $B_r(P_0)$ costituisce una stima del bacino d'attrazione di P_0.]

Esercizio 16 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = -y^2 - 3x^2 + 1. \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = x\left(x^2 + y^2 - 1\right)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si scriva come integrale definito il periodo dell'orbita relativo al dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/2, 0)$.
(6) Si modifichi il sistema aggiungendo un campo vettoriale $(-\alpha x, 0)$, con $\alpha > 0$, si studi il nuovo sistema e si mostri che il cerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è positivamente invariante.

Esercizio 17 Dato un sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

si dia un algoritmo per cercare, se esiste, una costante del moto $H(x, y)$. [*Soluzione.* Si cerca una funzione $H(x, y)$ tale che $f(x, y) = \partial H/\partial y$ e $g(x, y) = -\partial H/\partial x$. Integrando $f(x, y)$ rispetto a y, a x fissato, si ottiene $F(x, y)+c_1(x)$, dove $F(x, y)$ è una primitiva di $f(x, y)$ e $c_1(x)$ è una funzione arbitraria di x; integrando $g(x, y)$ rispetto a x, a y fissato, si ottiene $G(x, y)+c_2(y)$, dove $G(x, y)$ è una primitiva di $g(x, y)$ e $c_2(y)$ è una funzione arbitraria di y. Imponendo $F(x, y) + c_1(x) = -(G(x, y) + c_2(y))$ si determinano le funzioni $c_1(x)$ e $c_2(y)$. Si ha quindi $H(x, y) = F(x, y) + c_1(x)$, a meno di una costante additiva arbitraria. Alternativamente, una volta ottenuta $F(x, y)+c_1(x)$, la si deriva rispetto a y e la si cambia di segno: imponendo che la quantità così ottenuta sia uguale a $g(x, y)$ si determina la funzione $c_1(x)$, a meno di una costante additiva arbitraria, e si pone $H(x, y) = F(x, y) + c_1(x)$. Ovviamente il procedimento sopra è destinato a fallire se la costante del moto non esiste!]

Esercizio 18 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 + 2y\left(3 - 9x^2\right) + \left(1 - x^2\right)\left(2 - 8x^2\right), \\ \dot{y} = 2xy\left(9y + 10 - 16x^2\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = y(y + 1 - x^2)\,(y + 2 - 8x^2)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si studi l'andamento asintotico per $t \to \infty$ della traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, -2)$.

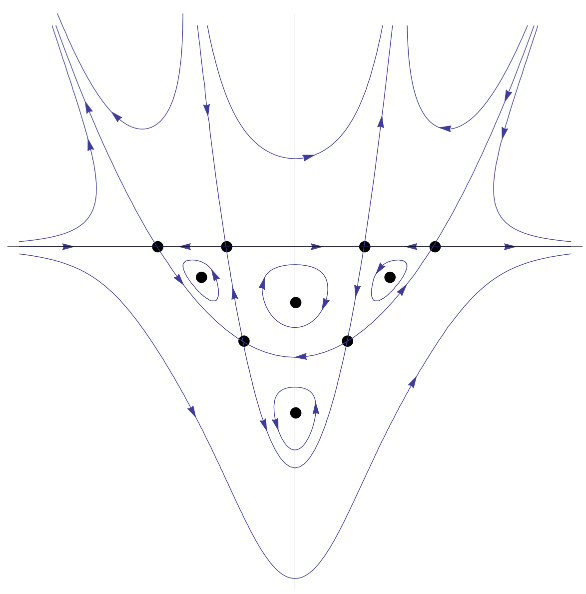

Figura 5.25: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 18.

[*Suggerimento.* Si hanno 10 punti di equilibrio: i punti $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (-1/2, 0)$, $P_3 = (1/2, 0)$,

$P_4 = (1,0)$, $P_5 = (-1/\sqrt{7}, -6/7)$ e $P_6 = (1/\sqrt{7}, -6/7)$ sono instabili, i punti $P_7 = (0, -1-1/\sqrt{3})$, $P_8 = (0, -1+1/\sqrt{3})$, $P_9 = (-\sqrt{13/28}, -2/7)$ e $P_{10} = (\sqrt{13/28}, -2/7)$ sono invece stabili. Le curve di livello sono rappresentate nella figura 5.25.]

Esercizio 19 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (y-1)^2 - x^2 + 2\,(y+1/2)\,(y-1)\,, \\ \dot{y} = 2x\,(y+1/2)\,. \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x,y) = [(y-1)^2 - x^2](y+1/2)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si stimi il periodo di una particolare orbita chiusa.
(6) Si discuta se la traiettoria $(x(t), y(t))$ di dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1,0)$ attraversa la retta $y = 2$.

Esercizio 20 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(y^2-1\right), \\ \dot{y} = 4x\left(x^2-1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x,y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche. Si dimostri in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(1/\sqrt{2}, 0)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
(5) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, si individui il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine diventa asintoticamente stabile. Si verifichi che la regione $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\}$ è contenuta nel bacino d'attrazione dell'origine.
(6) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e se ne discuta il comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.
(7) Come al punto precedente per la traiettoria con dati iniziali $(\sqrt{2}, 0)$.
[*Suggerimento.* Per il punto (1), si trova $H(x,y) = (y^2-1)^2 - (x^2-1)^2$, a meno di una costante additiva (cfr. l'esercizio 17). Per il punto (6) si osservi che la funzione $1/x(x^2-1)$ ammette $(\log|x-1| + \log|x+1| - 2\log|x|)/4$ come primitiva. Per il punto (7), nell'integrale che esprime la soluzione $x(t)$ in funzione di t si proceda con le due sostituzioni successive $x \to y = 1/x$ e $y \to z = \sqrt{2y^2-1}$ e si osservi che la funzione $1/(1-x^2)$ ammette $(\log|1+x| - \log|1-x|)/2$ come primitiva.]

Esercizio 21 Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \qquad z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad V(x,y) = x^4 + y^2.$$

(1) Si dimostri che l'origine è l'unico punto di equilibrio.
(2) Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile e che il suo bacino d'attrazione è tutto il piano.

Esercizio 22 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \left(x^2 - 1\right)^2 - 1, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1\right)(y - 1). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche. Si dimostri in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(1, 3/4)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
(5) Si trovino esplicitamente le soluzioni $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(1, 1)$ e $(9, 2)$, e se ne discuta il comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.
[*Suggerimento.* Si ha $H(x, y) = (y - 1)(y - (x^2 - 1)^2)$, a meno di una costante additiva.]

Esercizio 23 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 - 2e^{-x^2}, \\ \dot{y} = -4xe^{-x^2}(y - 1). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si dimostri in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 3/2 + \sqrt{2}/3)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
[*Suggerimento.* Si ha $H(x, y) = (y - 1)(y - 2e^{-x^2})$, a meno di una costante additiva.]

Esercizio 24 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(1 - y^2\right), \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

(1) Si trovi una costante del moto $H(x, y)$.
(2) Si determini la curva di livello che corrisponde al valore $H(x, y) = 0$.
(3) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(4) Si trovi esplicitamente la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 2)$.

Esercizio 25 Si consideri il sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(2y^2 + 2x^2 + 1\right), \\ \dot{y} = -2x\left(3x^4 + 2y^2\right). \end{cases}$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 26 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(y - 1)\left(x^2 - \alpha\right), \\ \dot{y} = 2x\left(x^2 - \alpha\right). \end{cases}$$

(1) Per $\alpha = 1$, si verifichi che $H(x,y) = (y-1)^2 - x^2$ è una costante del moto.
(2) Per $\alpha = 1$, si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Per $\alpha = 1$, si analizzino le curve di livello di $H(x,y)$ e le traiettorie nel piano delle fasi.
(4) Come cambia lo scenario se $\alpha = -1$?

Esercizio 27 Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \qquad z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad V(x,y) = x^2\left(1-y^2\right) + y^2.$$

(1) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità; si verifichi in particolare che esiste un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
(2) Si analizzino le curve di livello.
(3) Si stimi il bacino d'attrazione del punto asintoticamente stabile di cui al punto (1). [*Suggerimento.*

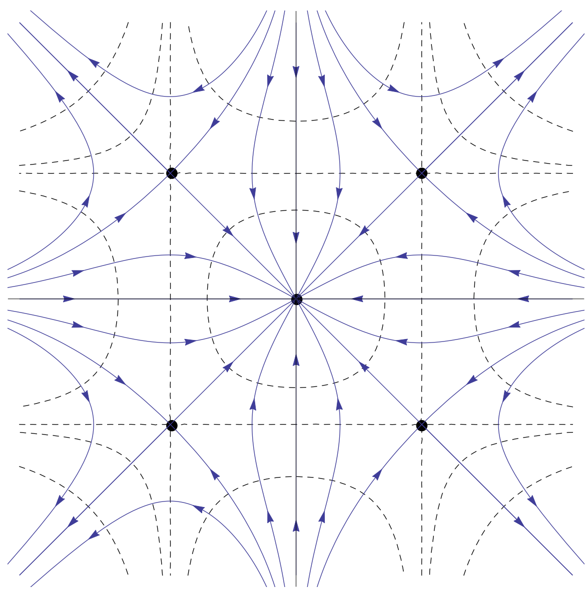

Figura 5.26: Piano delle fasi per il sistema gradiente dell'esercizio 27.

Si hanno 5 punti di equilibrio: $P_0 = (0,0)$ è asintoticamente stabile, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (-1,1)$ e $P_4 = (-1,-1)$ sono invece instabili, come si ricava studiando il sistema linearizzato in un intorno del punto di equilibrio e applicando i teoremi 18.5 e 18.7: gli autovalori della matrice corrispondente sono entrambi -2 nel caso di P_0 e sono -6 e 2 nel caso degli altri punti di equilibrio. Per disegnare le curve di livello della funzione $V(x,y)$ conviene partire dal valore $c = 1$; la altre si ottengono per continuità. Si ha infatti $V(x,y) - 1 = (x^2-1)(1-y^2)$, quindi la curva di livello $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = 1\}$ contiene le quattro rette $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$; si noti che i punti di equilibrio instabili si trovano in corrispondenza dell'intersezione di tali rette. Inoltre si vede facilmente che le due rette $y = \pm x$ sono invariati; le traiettorie che partono da dati iniziali su tali rette che non siano i punti di equilibrio si allontanano dai punti di equilibrio instabili. Anche le rette $x = 0$ e $y = 0$ sono invarianti e si interscano in P_0; le traiettorie che hanno dato iniziali su tali rette distinti da P_0 tendono asintoticamente a P_0. Le altre traiettorie si possono disegnare per continuità, tenendo anche conto del fatto che attraversano ortogonalmente le curve di livello di $V(x, y)$ (cfr. la figura 5.26).]

Esercizio 28 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + 4y^3, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x, y) = y\left(x^2 + y^3 - 1\right)$ è una una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le traiettorie lungo le curve di livello che corrispondono al valore $H(x, y) = 0$.
(4) Si discuta qualitativamente le altre traiettorie.

Esercizio 29 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(1 + x^4\right)^{-1}, \\ \dot{y} = 4x^3\left(1 + y^2\right)\left(1 + x^4\right)^{-2}. \end{cases}$$

(1) Si determini una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 1$.
(2) Si determinino le curve di livello di $H(x, y)$.
(3) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(4) Si verifichi che non esistono traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* La costante del moto è $H(x, y) = (1+y^2)/(1+x^4)$. Il fatto che non esistano traiettorie periodiche discende dal fatto che nessuna curva di livello contiene componenti chiuse.]

Esercizio 30 Si consideri il sistema dinamico planare (21.16).
(1) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(2) Si studino le orbite nel piano delle fasi.

Esercizio 31 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(y^2 - x^2 - 1\right), \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 - y^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si dimostri che la funzione $H(x, y) = [(y + 1)^2 - x^2]\,[(y - 1)^2 - x^2]$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si determini la curva di livello $H(x, y) = 0$ e se ne discuta il verso di percorrenza.
(4) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e se ne discutano i versi di percorrenza.
(5) Si determinino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(6) Si esprima il periodo di ogni traiettoria periodica come integrale definito.

Esercizio 32 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x\left(x^2 - 1\right), \\ \dot{y} = 2y\left(3x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.

(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e se ne discuta il comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.
(6) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, -8/27)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
(7) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, si determini il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine è un punto asintoticamente stabile e il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ è contenuto nel suo bacino d'attrazione.
(8) Si dimostri che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$ diverge e si dica se questo avviene in un tempo finito o infinito.

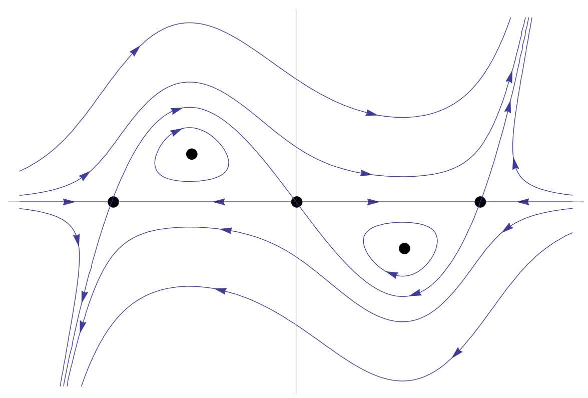

Figura 5.27: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 32.

[*Suggerimento.* Per il punto (1) si trova $H(x, y) = y^2 - 2xy(x^2 - 1)$, a meno di una costante additiva. Per il punto (2) si hanno tre punti di equilibrio instabili, $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (1, 0)$, e due punti di equilibrio stabili, $P_4 = (-1/\sqrt{3}, 2/3\sqrt{3})$ e $P_5 = (1/\sqrt{3}, -2/3\sqrt{3})$. Per il punto (4), le traiettorie sono rappresentate nella figura 5.27. Per il punto (5) si osservi che la funzione $1/[x(x^2 - 1)]$ ammette $(\log|x - 1| + \log|x + 1| - 2\log|x|)/4$ come primitiva. Per il punto (6), ricavando y come funzione di x, dall'equazione implicita $H(x, y) = E$, si trovano due determinazioni $y = y_\pm(x)$, con $x_1 \leq x \leq x_2$, che si raccordano in x_1 e in x_2. Si può quindi scrivere il periodo come somma dei tempi di percorrenza dei due archi di curva $x \in [x_1, x_2] \mapsto y_\pm(x)$.]

Esercizio 33 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(2y^2 - x^6 - 1\right), \\ \dot{y} = 6x^5\left(y^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si trovi una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 0$.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si determini la curva di livello $H(x, y) = 0$ e se ne discuta il verso di percorrenza.
(4) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e se ne discutano i versi di percorrenza.

(5) Si determinino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* Si ha $H(x,y) = (y^2 - x^6)\,(y^2 - 1)$.]

Esercizio 34 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(2x^2y^2 - 1 - 4x^2\right)\left(x^2 - 4\right), \\ \dot{y} = -2x\left(2x^2y^2 - 1 - 4y^2\right)\left(y^2 - 4\right), \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x,y) = (x^2y^2 - 1)\,(x^2 - 4)\,(y^2 - 4)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si determini la curva di livello $H(x,y) = 0$ e se ne discuta il verso di percorrenza.
(4) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e se ne discutano i versi di percorrenza.
(5) Si determinino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(6) Si consideri la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (4, 1/4)$: si discuta prima qualitativamente il comportamento della soluzione $(x(t), y(t))$ e poi la si calcoli esplicitamente.
[*Suggerimento.* Per il punto (6), si usi che $(\log|x-4| - \log|4x-1|)/15$ è una primitiva della funzione $1/(4x-1)(x-4)$.]

Esercizio 35 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2 - 1\right)\left(3y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = -y\left(y^2 - 1\right)\left(3x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si trovi una costante del moto $H(x,y)$.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studi qualitativamente le curve di livello.
(4) Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* Si può scegliere come costante del moto $H(x,y) = xy(y^2 - 1)\,(x^2 - 1)$.]

Esercizio 36 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 4y^3, \\ \dot{y} = 10x - 4x^3. \end{cases}$$

(1) Si trovi una costante del moto $H(x,y)$.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
[*Suggerimento.* Si ha $H(x,y) = x^2(x^2-5) - y^2(y^2-1) + c$, dove c è una costante arbitraria. Scegliendo $c = 6$, si può riscrivere $H(x,y) = (x^2 + y^2 - 3)\,(x^2 - y^2 - 2)$. Indicando con $\Sigma_E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = E\}$ le curve di livello, si ha $\Sigma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dove $\mathcal{C}_1$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$ e $\mathcal{C}_2$ è l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2$. Si hanno 9 punti di equilibrio: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0, -1/\sqrt{2})$, $P_3 = (0, 1/\sqrt{2})$, $P_4 = (-\sqrt{5/2}, 0)$, $P_5 = (-\sqrt{5/2}, -\sqrt{1/2})$, $P_6 = (-\sqrt{5/2}, \sqrt{1/2})$, $P_7 = (\sqrt{5/2}, 0)$, $P_8 = (\sqrt{5/2}, -\sqrt{1/2})$, $P_9 = (\sqrt{5/2}, \sqrt{1/2})$. Di essi, P_1, P_5, P_6, P_8 e P_9 sono instabili, mentre P_2, P_3, P_4 e P_7 sono stabili. Il punto P_1 è contenuto nella curva di livello Σ_6, che è una *curva del diavolo*, i.e. una curva piana di equazione $y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2)$, con $a, b \in \mathbb{R}_+$ (nel nostro caso

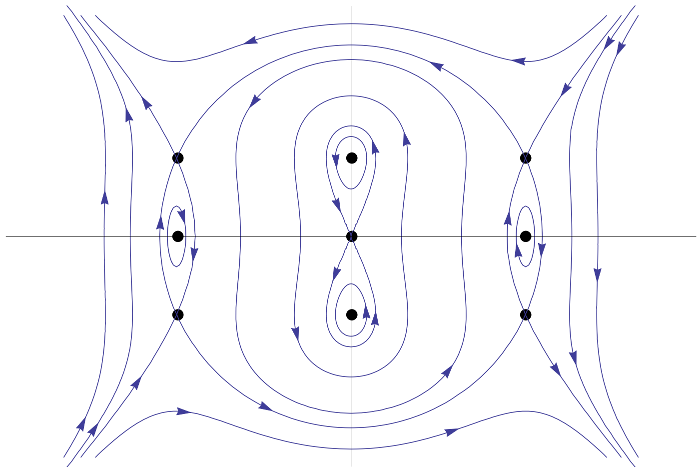

Figura 5.28: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 36.

$a = 1$ e $b = \sqrt{5}$). In particolare Σ_6 è costituita tra tre componenti connesse, tra cui una lemniscata (i.e una curva a forma di 8). Le altre curve di livello si ottengono per continuità (cfr. la figura 5.28). Si tenga conto anche del teorema 21.22 per disegnare le curve di livello racchiuse tra Σ_0 e Σ_6.]

Esercizio 37 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(4x^2 + 6y^2 - 9\right), \\ \dot{y} = -2x\left(2x^2 + 4y^2 - 5\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x, y) = y\left(x^2 + 3y^2 - 3\right)\left(x^2 + y^2 - 2\right)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio.
(3) Si analizzino le curve di livello di $H(x, y)$ nel piano e se ne discuta il verso di percorrenza.

Esercizio 38 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \sin x, \\ \dot{y} = y \cos x, \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{R}$.
(1) Si determini una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 0$.
(2) Si determinino le curve di livello.
(3) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(4) Si dimostri che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, 1/3)$ è periodica.
[*Suggerimento.* Si ha $H(x, y) = y(y - \sin x)$. I punti di equilibrio sono: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, \pi)$, $P_2 = (\pi/2, -1/2)$ e $P_3 = (\pi/2, 1/2)$. I primi due sono instabili, gli ultimi due stabili. Per studiare le curve di livello conviene iniziare da $\gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H(x, y) = 0\}$, costituita dal segmento $y = 0$ e dalla curva $y = \sin x$. Le altre si disegnano per continuità e utilizzando il teorema 21.21.]

Esercizio 39 Sia dato il sistema gradiente in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = x^2 + (x+1)^2\, y^2.$$

(1) Si determinino i punti di equilibrio.
(2) Se ne studi la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(4) Si stimi il bacino d'attrazione di eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili.

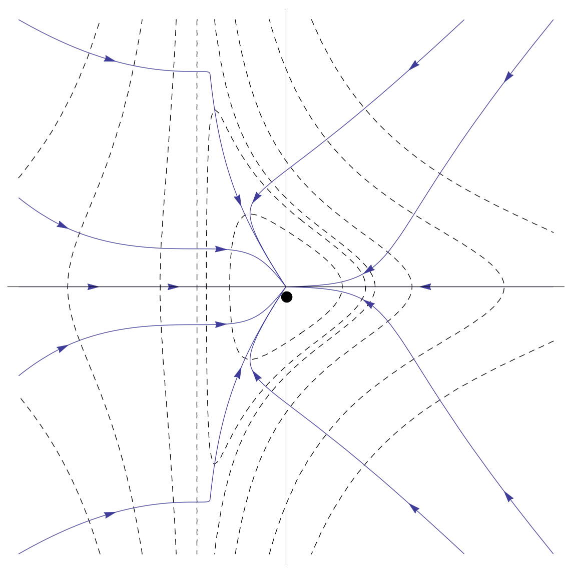

Figura 5.29: Piano delle fasi per il sistema gradiente dell'esercizio 40.

[*Suggerimento.* Si ha un solo punto di equilibrio: l'origine. Le traiettorie attraversano ortogonalmente le curve di livello della funzione $V(x,y)$ (cfr. la figura 5.29). In particolare l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile e il suo bacino d'attrazione è l'intero piano.]

Esercizio 40 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2 + y^2 - 2\right), \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)\,(x^2 + y^2 - 3)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio.
(3) Si determinino le curve di livello di $H(x,y)$.
(4) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
(5) Si risolvano esplicitamente le equazioni del moto, i.e. si trovi la soluzione $(x(t), y(t))$ al variare dei dati iniziali $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ nel piano.

(6) Si discuta la proprietà evidenziata nell'osservazione 21.23 nel caso presente.
(7) Si dimostri che, aggiungendo un campo vettoriale $(0, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, l'origine diventa un punto d'equililibrio asintoticamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione.
[*Suggerimento.* Sono punti di equilibrio l'origine (stabile) e i punti della circonferenza $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ (instabili). Il moto si svolge su circonferenze $x^2 + y^2 = R^2 =$ costante, quindi le equazioni del moto si possono riscrivere nella forma $\dot{x} = 4y(R^2 - 2)$, $\dot{y} = -4x(R^2 - 2)$, i.e. $\dot{x} = \omega y$, $\dot{y} = -\omega x$, con ω costante fissato dai dati iniziali. Si ha perciò un sistema dinamico lineare che si può esplicitamente risolvere. Per il punto (7) si utilizzi il teorema 19.18 procedendo come nel §24.6: si scelga come frontiera dell'insieme $\mathcal{P}$ una qualsiasi curva di livello di $H(x, y)$ di raggio $R < \sqrt{2}$.]

Esercizio 41 Si consideri il sistema dinamico planare che, in coordinate polari, ha la forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho - \rho^2, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

(1) Si dimostri che la circonferenza γ di equazione $\rho = 1$ è un insieme invariante.
(2) Si dimostri che γ rappresenta un ciclo limite e che tutte le traiettorie del piano si muovono verso tale ciclo.
[*Suggerimento.* L'equazione per ρ può essere integrata per separazione di variabili e per $\rho(0) \neq 1$ dà

$$\rho(t) = \frac{\rho(0)}{\rho(0) + (1 - \rho(0))\,\mathrm{e}^{-t}},$$

da cui si vede che $\rho(t) \to 1$ per $t \to +\infty$ indipendentemente dal valore di $\rho(0)$.]

Esercizio 42 Si consideri il sistema dinamico planare descritto, in coordinate polari, da

$$\dot{\rho} = f(\rho) := \rho \prod_{i=1}^{n} (\rho_i - \rho), \qquad \dot{\theta} = g(\rho, \theta),$$

dove $g(\rho, \theta) > 0$ e $\rho_n > \rho_{n-1} > \ldots > \rho_1 > 0$.
(1) Si dimostri che il sistema ammette n cicli limite.
(2) Si discuta quali cicli sono attrattivi e quali repulsivi.
(3) Si determini per quali valori di n il moto è globalmente limitato nel piano per ogni $t \geq 0$.
[*Suggerimento.* Sia $\mathcal{C}_i$ la circonferenza di raggio ρ_i; si vede immediatamente che $\mathcal{C}_i$ è un insieme invariante per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per $\bar{\rho}$ tale che $f(\bar{\rho}) \neq 0$ definiamo

$$I(\rho, \bar{\rho}) = \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{f(\rho)}.$$

L'equazione del moto per ρ può essere integrata per separazione di variabili e dà $I(\rho(t), \bar{\rho}) = t$, che definisce $\rho(t)$ fin tanto che $f(\rho(t)) \neq 0$. Poiché $\dot{\rho}(t) \neq 0$ per tali t, possiamo invertire la relazione che lega ρ a t scrivendo $I(\rho, \bar{\rho}) = t(\rho)$, dove $t(\rho)$ rappresenta il tempo necessario per raggiungere ρ partendo da $\bar{\rho}$. Se $\bar{\rho} \in (0, \rho_1)$ si ha $f(\bar{\rho}) > 0$, così che $I(\rho, \bar{\rho})$ è definito per ogni $\rho \in (0, \rho_1)$; inoltre si ha $I(\rho, \bar{\rho}) \to +\infty$ per $\rho \to \rho_1^-$ e $I(\rho, \bar{\rho}) \to -\infty$ per $\rho \to 0^+$, poiché la funzione $f(\rho)$ è positiva in $(0, \rho_1)$ e non è integrabile agli estremi. Una traiettoria con dato iniziale all'interno della circonferenza $\mathcal{C}_1$ e che non sia l'origine ruota in senso antiorario e tende a $\mathcal{C}_1$ per $t \to +\infty$ e all'origine per $t \to -\infty$. Questo mostra che l'origine è un punto di equilibrio instabile (repulsivo). Se $\bar{\rho} \in (\rho_1, \rho_2)$ ragionando in modo analogo si trova $I(\rho,\bar{\rho}) \to +\infty$ per $\rho \to \rho_1^+$ e $I(\rho,\bar{\rho}) = -\infty$ per $\rho \to \rho_2^-$, poiché la funzione $f(\rho)$ è negativa in $(0,\rho_1)$ e non è integrabile agli estremi. Una traiettoria con dato iniziale che si trovi tra le circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si muove a spirale verso $\mathcal{C}_1$ per $t \to +\infty$ e verso $\mathcal{C}_2$ per $t \to -\infty$. Se ne deduce che $\mathcal{C}_1$ è un ciclo ω-limite. Iterando l'argomento si trova che le circonferenze $\mathcal{C}_i$ sono cicli ω-limite per i dispari e cicli α-limite per i pari. In particolare, se $\bar{\rho} > \rho_n$, la traiettoria corrispondente tende a $\mathcal{C}_n$ per $t \to +\infty$ se n è dispari e per $t \to -\infty$ se n è pari. Infine per ogni $\bar{\rho} > \rho_n$ esiste un tempo $\tau = \tau(\bar{\rho})$, con $\tau > 0$ se n è pari e $\tau < 0$ se n è dispari, tale che $\lim_{t\to\tau} \rho(t) = +\infty$ (dal momento che la funzione $1/f(\rho)$ è integrabile all'infinito). In conclusione i cicli $\mathcal{C}_i$ con i dispari sono attrattivi, mentre quelli con i pari sono repulsivi. Perché il moto sia globalmente limitato per $t \geq 0$ occorre che n sia dispari.]

Esercizio 43 Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy^2 - y^2, \\ \dot{y} = xy - y - x^2 y. \end{cases}$$

(1) Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
(2) Sia $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$: si dimostri che $r(t)$ tende a zero in modo monotono.
(3) Si studi qualitativamente il moto nel piano (x,y).
[*Suggerimento.* Può essere conveniente utilizzare coordinate polari.]

Esercizio 44 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - \alpha\left(x^3 + xy^2\right), \\ \dot{y} = x - y - \alpha\left(yx^2 + y^3\right). \end{cases}$$

(1) Per $\alpha \geq 0$, si dimostri che l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile e se ne studi il bacino d'attrazione. Si studi qualitativamente il moto nel piano (x,y).
(2) Per $\alpha < 0$, si dimostri che esiste un ciclo limite repulsivo e si studi il comportamento asintotico del sistema. Si studi qualitativamente il moto nel piano (x,y).
(3) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si risolvano esplicitamente le equazioni del moto.
(4) Si dimostri che il sistema non ammette costanti del moto non banali.

Esercizio 45 Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico planare di classe C^1 che ammette una costante del moto $H(x)$ di classe C^2. Si supponga che

$$\lim_{|x|\to+\infty} H(x) = +\infty.$$

(1) Si dimostri che le traiettorie sono definite globalmente nel tempo.
(2) Si dimostri che $L_\omega(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.
[*Suggerimento.* Si ragioni come nella dimostrazione del lemma 23.4.]

Esercizio 46 Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\,(z-1), \\ \dot{y} = -x\,(z-1), \\ \dot{z} = -z^3, \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^3$. Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. [*Soluzione.* L'origine è l'unico punto di equilibrio. Se ne può dimostrare la stabilità usando il teorema di Ljapunov, con funzione di Ljapunov $W(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a,b,c > 0$ scelte in modo che risulti $\dot{W} \leq 0$; per esempio si può scegliere $a = c = 1$, $b = 2$. Non si ha stabilità asintotica, come si conclude osservando che il piano $z = 0$ è invariante e le orbite su tale piano sono curve chiuse che racchiudono l'origine al loro interno.]

Esercizio 47 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x} - 5, \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\right)(y-5)\,. \end{cases}$$

(1) Si dimostri che la funzione $H(x,y) = (y - \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x})(y-5)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio.
(3) Se ne discuta la stabilità.
(4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 48 Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^n = 0,$$

con n dispari e $\gamma > 0$.
(1) Si dimostri che il punto $(x,\dot{x}) = (0,0)$ è asintoticamente stabile.
(2) Si dimostri che tutte le traiettorie tendono al punto $(0,0)$ per $t \to +\infty$.
(3) Si calcoli esplicitamente la soluzione per $n = 1$.
[*Suggerimento.* Si ragiona come nel caso $n = 1$ (cfr. l'esercizio 35 del capitolo 4), scegliendo

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

come funzione di Ljapunov e notando che se $\gamma = 0$ si ha $H(x,y) > 0$ e $\dot{H}(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Per $n = 1$, si ottiene l'oscillatore armonico smorzato dell'esempio 9.5, con $m = \omega = 1$.]

Esercizio 49 Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = \left(y^2 - 1\right)\left(1 - x^2\right).$$

(1) Si determinino i punti di equilibrio.
(2) Se ne studi la stabilità.
(3) Si studi qualitativamente il sistema.
[*Suggerimento.* Si usi il fatto che le rette $y = \pm x$ sono invarianti per il sistema.]

Esercizio 50 Si consideri il sistema dinamico planare che, in coordinate polari, ha la forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\left(1 - \rho^2\right), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Si dimostri che la circonferenza γ di equazione $\rho = 1$ è un ciclo limite e che $L_\omega(z) = \gamma$ per ogni $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. [*Suggerimento.* Si ragiona come per gli esercizi 41 e 42.]

Esercizio 51 Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - x^2 - y^2\right) - y, \\ \dot{y} = y\left(1 - x^2 - y^2\right) + x. \end{cases}$$

Si dimostri che la circonferenza γ di centro l'origine e raggio $r = 1$ è un ciclo limite e che $L_\omega(z) = \gamma$ $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. [*Suggerimento.* Passando a coordinate polari, ci si riconduce all'esercizio 50.]

Esercizio 52 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^3 + 4y^3 - 1\right), \\ \dot{y} = -y\left(4x^3 + y^3 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.

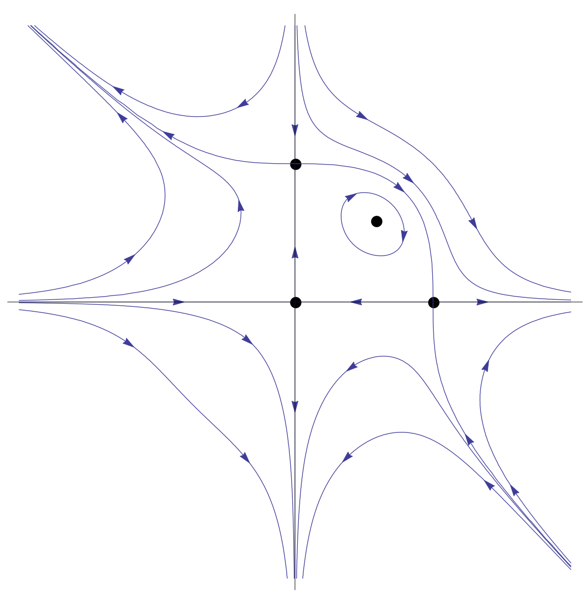

Figura 5.30: Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 52.

[*Suggerimento.* Si trova $H(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 1)$, a meno di una costante additiva. Si hanno tre punti di equilibrio instabili: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $P_3 = (0, 1)$; il punto $P_4 = ((1/5)^{1/3}, (1/5)^{1/3})$ è invece un punto di equilibrio stabile. Le curve di livello sono rappresentate nella figura 5.30.]

Esercizio 53 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2\left(2y^2 - 1\right) - 1\right), \\ \dot{y} = -2xy^2\left(y^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x,y) = (y^2-1)\,(x^2y^2-1)$ è una costante del moto.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studi la curva di livello che corrisponde al valore $H(x,y)=0$.
(4) Si studi la curva di livello che corrisponde al valore $H(x,y)=1$.
(4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(5) Si trovi esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (2,1)$.
(6) Si dia un argomento per escludere l'esistenza di traiettorie periodiche.

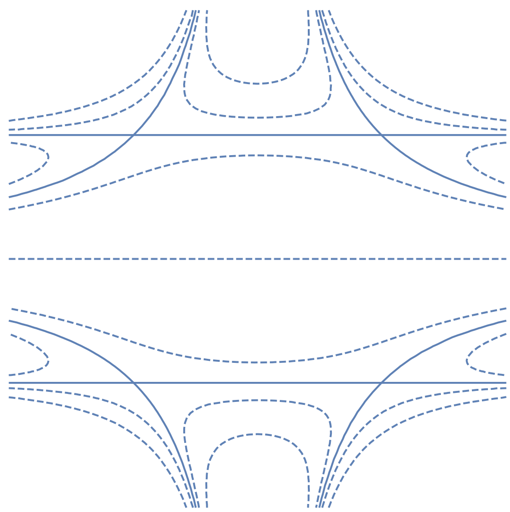

Figura 5.31: Alcune curve di livello Σ_E del sistema dell'esercizio 53 (Σ_0 è quella non tratteggiata).

[*Suggerimento.* Tutti i punti dell'asse x sono punti di equilibrio instabili. Oltre a questi, ci sono altri 4 punti di equilibrio instabili: $P_1=(1,1)$, $P_2=(-1,1)$, $P_3=(1,-1)$ e $P_4=(-1,-1)$. Le curve di livello $\Sigma_E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : H(x,y)=E\}$ sono rappresentate nella figura 5.31. I versi di percorrenza si trovano studiando il segno del campo vettoriale. Il dato iniziale $(2,1)$ si trova su una componente connessa della curva di livello Σ_0 in cui $y=1$. La traiettoria corrispondente è della forma $(x(t),y(t)=(x(t),1)$, dove $x(t)$ risolve l'equazione $\dot{x}=2(x^2-1)$, con dato iniziale $x(0)=2$. L'equazione può essere risolta per separazione di variabili e dà $x(t)=(3+\mathrm{e}^{4t})/(3-\mathrm{e}^{4t})$. Infine, la curva di livello Σ_0 divide il piano in 11 insiemi sconnessi; in tali insiemi una delle due componenti del campo vettoriale ha sempre lo stesso segno (escludendo in tal modo che un'orbita possa chiudersi), tranne negli insiemi $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>1,\ y<1/|x|\}$ e $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<-1,\ y<1/|x|\}$; in tali insiemi tuttavia si ha $\dot{y}<0$ per $x>0$ e $\dot{y}>0$ per $x<0$, quindi di nuovo non ci sono orbite chiuse.]

Esercizio 54 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 2x^2 - x^4 - 1, \\ \dot{y} = 2x\left(2y - 3x^4 + 4x^2 - 2x^2y - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x,y)$ e la si determini.
(2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.

(3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si verifichi che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (0,(2+\sqrt{3})/4)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
[*Suggerimento.* Si trova $H(x,y) = (y+x^2-1)\,(y-x^4+x^2)$, a meno di una costante additiva. I punti di equilibrio sono $P_1 = (0,1/2)$, $P_2 = (1,0)$ e $P_3 = (-1,0)$: il primo è stabile, gli altri due sono instabili.]

Esercizio 55 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2+y^2-1\right)(y+1) + \left((y+1)^2 - x^2\right)\left(x^2+3y^2-1\right), \\ \dot{y} = f(x,y). \end{cases}$$

(1) Si determini $f(x,y)$ in modo tale che la funzione $H(x,y) = y\,(x^2+y^2-1)\,(y+1-x)\,(y+1+x)$ sia una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
[*Suggerimento.* Si trova $f(x,y) = -4xy(y+1-x^2)$. Si hanno 7 punti di equilibrio: $P_1 = (0,-1)$, $P_2 = (0,(1+\sqrt{6})/5)$, $P_3 = (0,(1-\sqrt{6})/5)$, $P_4 = (1,0)$, $P_5 = (-1,0)$, $P_6 = (-\sqrt{2/5},-3/5)$ e $P_7 = (\sqrt{2/5},-3/5)$. Di essi P_1, P_4 e P_5 sono instabili, mentre gli altri quattro sono stabili.]

Esercizio 56 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y^4 - 6y^2\left(x^2+1\right) + \left(x^2-1\right)^2, \\ \dot{y} = 4xy\left(1+y^2-x^2\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x,y) = y\,(y-x-1)\,(y+x+1)\,(y-x+1)\,(y+x-1)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 57 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x\left(x^2-1\right), \\ \dot{y} = -\left(3x^2-1\right)\left(y-4x\left(x^2-1\right)\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x,y) = (y-x(x^2-1))\,(y+2x(x^2-1))$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 58 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2+1\right)^2, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2-1-y^2-x^2y^2\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che la funzione $H(x,y) = y^2\left(x^2+1\right)^2 - \left(x^2-1\right)^2$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 59 Sia dato il sistema gradiente in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \dot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad V(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2y + z^4.$$

(1) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
(2) Si studi qualitativamente il sistema.
(3) Si mostri in particolare che esiste almeno un punto di equilibrio asintoticamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione utilizzando il teorema di Barbašin-Krasovskij.

Esercizio 60 Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(2 - x^2\right).$$

(1) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
(2) Si studi qualitativamente il sistema.

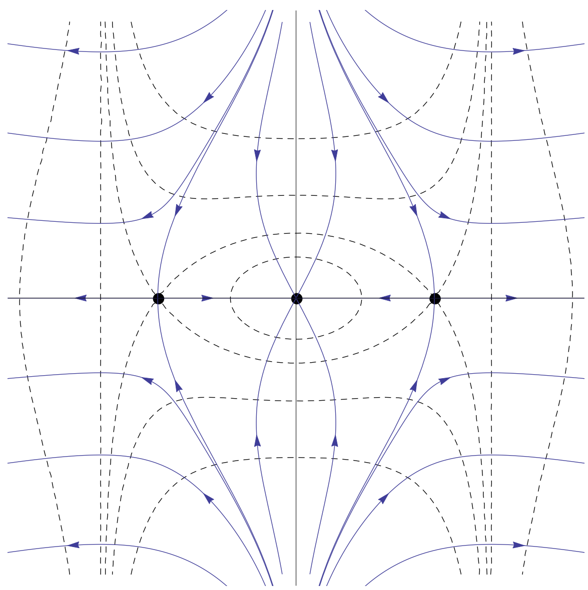

Figura 5.32: Piano delle fasi per il sistema gradiente dell'esercizio 60.

[*Suggerimento.* Si hanno 3 punti di equilibrio: $P_0 = (0,0)$, asintoticamente stabile, e $P_1 = (1,0)$ e $P_2 = (-1,0)$, instabili. Alcune curve di livello Σ_E di V sono tratteggiate nella figura 5.32; in particolare, una volta graficate $\Sigma_0 = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm\sqrt{2}\}$ e $\Sigma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{2},\ y = \pm|x^2-1|/\sqrt{2-x^2}\}$, le altre si ottengono per continuità. Le traiettorie attraversano ortogonalmente le curve di livello di V (cfr. la figura 5.32).]

Esercizio 61 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1 - |x|^5, \\ \dot{y} = 5y|x|^3 x. \end{cases}$$

(1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$.
(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(4) Si calcoli il limite per $t \to +\infty$, se esiste, delle soluzioni $\varphi(t, \bar{z})$ con dati iniziali $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, per $\bar{y} = 0$ e $\bar{x} \in \{0, 1, 2\}$.
[*Suggerimento.* Si trova $H = y(y + 1 - |x|^5)$, a meno di una costante additiva; si noti che H è di classe C^4. L'asse $y = 0$ è invariante e i punti $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$, posti lungo tale asse, sono punti di equilibrio instabili; un terzo punto di equilibrio, $P_3 = (0, -1/2)$, è stabile. Se $\bar{z} = (1, 0)$ si ha $\varphi(t, \bar{z}) = (1, 0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$; se $\bar{z} = (0, 0)$ o $\bar{z} = (2, 0)$ si ha $\varphi(t, \bar{z}) \to (1, 0)$ per $t \to +\infty$.]

Esercizio 62 Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$G(\dot{x})\, \ddot{x} + F(x) = 0,$$

dove G e F sono due funzioni di classe C^2, con $G(y) \neq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$.
(1) Si dimostri che è una costante del moto la funzione $H(x, \dot{x})$, con

$$H(x, y) = \int_0^x \mathrm{d}x'\, F(x') + \int_0^y \mathrm{d}y'\, y'\, G(y'),$$

(2) Si assuma $G(y) = (1 + y^2)^{-1}$ e $F(x) = x$, e si consideri il sistema dinamico corrispondente.
(2.1) Si calcoli $H(x, y)$.
(2.2) Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
(2.3) Si studino le curve di livello della funzione $H(x, y)$.
(2.4) Si determini l'insieme dei dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche.
(2.5) Si dimostri che aggiungendo all'equazione un termine $\gamma\dot{x}$, con $\gamma > 0$ l'origine diventa un punto di equilibrio asintoticamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione.

Esercizio 63 Si consideri il sistema gradiente

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \qquad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad V(x, y) = x^2\,(x - 1)^2 + y^2.$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si dimostri in particolare che c'è almeno un punto di equilibrio asintotocamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione. [*Soluzione.* Si hanno tre punti di equilibrio: $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono asintoticamente stabili, mentre $(1/2, 0)$ è instabile. I bacini d'attrazione di $(0, 0)$ e di $(1, 0)$ sono, rispettivamente, il semipiano $x < 1/2$ e il semipiano $x > 1/2$. Per lo studio delle curve di livello di V può essere utile il cambiamento di variabili $z = x + 1/2$.]

Esercizio 64 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $H(x, y) = (y - x^2 + 1)\,(y + x^2 - 1)$ è una costante del moto.
(2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
(3) Si analizzino le curve di livello nel piano delle fasi.
(4) Si individuino i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(5) Si determini la traiettoria $(x(t), y(t))$ per tutti i dati iniziali della forma $(x(0), y(0)) = (a, a^2 - 1)$ e se ne discuta l'andamento per $t \to +\infty$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 65 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1. L'equazione

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$

è chiamata *equazione di Liénard*. Se $f(x) = (x^2 - 1)$ e $g(x) = x$, si ottiene l'*equazione di van der Pol*

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0.$$

Si dimostri che, se si definisce

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{d}s\, f(s),$$

si può riscrivere l'equazione di Liénard come un sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

La trasformazione $y = F(x) + \dot{x}$ si chiama *trasformazione di Liénard* e il piano delle fasi (x, y) prende il nome di *piano di Liénard*. [*Soluzione.* Derivando l'equazione $\dot{x} = y - F(x)$ si trova $\ddot{x} = \dot{y} - F'(x)\,\dot{x} = -g(x) - f(x)\,\dot{x}$.]

Esercizio 66 Si assuma che, nell'equazione di Liénard dell'esercizio 65, le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano, rispettivamente, pari e dispari. Si dimostri che, in tal caso, se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema del primo ordine, anche $(-x(t), -y(t))$ è soluzione. [*Soluzione.* Si ha $-\dot{x}(t) = -y(t) + F(x(t)) = -y(t) - F(-x(t))$ e $-\dot{y}(t) = g(x(t)) = -g(-x(t))$, dove si è usato che $F(x)$ è dispari poiché $f(x)$ è pari e $F(0) = 0$.]

Esercizio 67 Si consideri l'equazione di van der Pol (cfr. l'esercizio 65)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \qquad F(x) = \frac{x^3}{3} - x,$$

e si discuta la stabilità dei punti di equilibrio nel piano di Liénard. [*Soluzione.* Il campo vettoriale si annulla per $x = 0$ e $y = F(x)$, quindi l'unico punto l'equilibrio è $(x_0, y_0) = (0, F(0)) = (0, 0)$, i.e. l'origine. Per studiarne la stabilità si considera la matrice del sistema linearizzato intorno all'origine,

$$\begin{pmatrix} -F'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I corrispondenti autovalori sono $\lambda = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$, quindi hanno entrambi parte reale positiva. Ne segue che l'origine è instabile.]

Esercizio 68 Nel piano di Liénard (x, y) dell'equazione di van der Pol (cfr. l'esercizio 67) si considerino le quattro regioni

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > F(x)\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < F(x)\}, \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < F(x)\}, \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > F(x)\}. \end{aligned}$$

Si indichino con v_+, u_+, v_-, u_- le curve che separano tra loro le regioni D e A, A e B, B e C, C e D, rispettivamente (cfr. la figura 5.33):

$$\begin{aligned} v_+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}, \\ u_+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = F(x)\}, \\ v_- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y < 0\}, \\ u_- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = F(x)\}. \end{aligned}$$

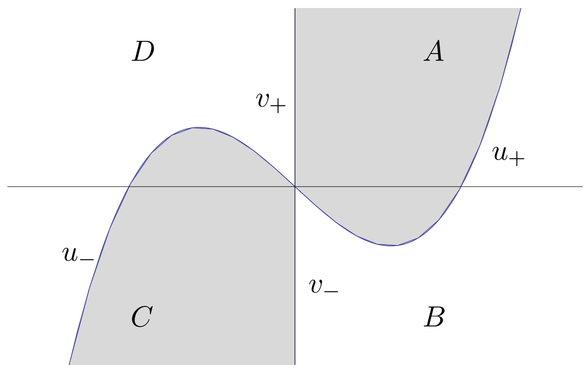

Figura 5.33: Le regioni A, B, C, D in cui è diviso il piano delle fasi per l'equazione di van der Pol.

Si mostri che si ha (cfr. la figura 5.34)

$$\begin{array}{lll} \dot{x} > 0, & \dot{y} < 0, & (x,y) \in A, \\ \dot{x} < 0, & \dot{y} < 0, & (x,y) \in B, \\ \dot{x} < 0, & \dot{y} > 0, & (x,y) \in C, \\ \dot{x} > 0, & \dot{y} > 0, & (x,y) \in D, \end{array}$$

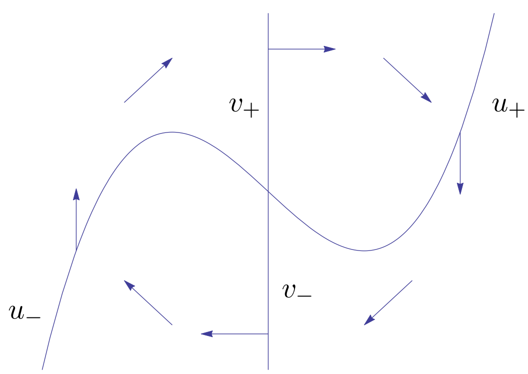

Figura 5.34: Direzione del campo vettoriale nelle quattro regioni della figura 5.33.

e che, lungo le curve che separano le quattro regioni, si ha (cfr. di nuovo la figura 5.34)

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} > 0, \quad \dot{y} = 0, \qquad (x,y) \in v_+, \\
&\dot{x} = 0, \quad \dot{y} < 0, \qquad (x,y) \in u_+, \\
&\dot{x} < 0, \quad \dot{y} = 0, \qquad (x,y) \in v_-, \\
&\dot{x} = 0, \quad \dot{y} > 0, \qquad (x,y) \in u_-.
\end{aligned}
$$

[*Suggerimento.* Basta tener conto del segno del campo vettoriale del sistema dinamico.]

Esercizio 69 Si dimostri che tutte le traiettorie dell'equazione di van der Pol con dato iniziale che non sia l'origine ruotano indefinitamente intorno all'origine. [*Soluzione.* Si definiscano le regioni A, B, C, D e le curve che le separano v_+, u_+, v_-, u_- come nell'esercizio 68. Mostriamo allora che se si prende un dato iniziale $\bar{z}$ lungo la curva v_+, la traiettoria corrispondente $\varphi(t, \bar{z})$ raggiunge la curva u_+ in un tempo finito. Si consideri infatti il dato iniziale $(x(0), y(0)) = \bar{z} = (0, p)$, con $p > 0$. Si ha $\dot{x}(0) = p > 0$ e, per continuità, esiste $t_1 > 0$ tale che $\dot{x}(t) > p/2$ per $t \in [0, t_1]$. Quindi $a := x(t_1) > 0$. Si consideri ora la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = \bar{z}_1 := (a, b)$, con $b := y(t_1)$. Vogliamo far vedere che tale traiettoria raggiunge la curva u_+ in un tempo finito. Supponiamo che questo non accada. Definiamo $x_1 > 0$ tale che $F(x_1) = b$ (tale x_1 è determinato in modo univoco: il grafico di F interseca la retta $y = b$ in al più tre punti, di cui uno solo è positivo) e poniamo

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq x_1, \quad F(x) \leq y \leq b\}.$$

La traiettoria $\varphi(t, \bar{z}_1)$ dovrebbe allora rimanere sempre all'interno del compatto K (la soluzione può uscire da K solo attraversando u_+ poiché $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$. Per il corollario 13.13 la soluzione $\varphi(t, \bar{z}_1)$ dovrebbe allora essere definita per ogni $t \in [0, +\infty)$. D'altra parte, finché fosse definita, poiché rimarrebbe in A, si dovrebbe avere $\dot{y} = -x \leq -a$ e quindi, integrando, si troverebbe $y(t) \leq b - at$. Questo però porterebbe a una contraddizione, poiché non compatibile con il fatto che la soluzione rimanga indefinitamente in K. Ragionando in modo analogo si dimostra che prendendo un qualsiasi dato iniziale lungo u_+ la traiettoria corrispondente deve raggiungere v_-, prendendo un qualsiasi dato iniziale lungo v_- la traiettoria corrispondente deve raggiungere u_- e prendendo un qualsiasi dato iniziale lungo u_- la traiettoria corrispondente deve raggiungere v_+. In conclusione, prendendo un dato iniziale $\bar{z} = (p, 0) \in v_+$, esiste un tempo finito $\tau_0(p) > 0$ tale che $\varphi(\tau_0(p), \bar{z}) \in v_+$.]

Esercizio 70 Con le notazioni dell'esercizio 68, si identifichino i punti $(0, p) \in v_- \cup v_+$ con le loro componenti lungo l'asse y; si scriverà quindi $p \in v_+$ invece di $(0, p) \in v_+$, $\varphi(t, p)$ invece di $\varphi(t, (0, p))$, e così via. Si considerino le applicazioni $\sigma : v_+ \to v_+$, $\alpha : v_+ \to v_-$ e $\beta : v_- \to v_+$, definite da (cfr. la figura 5.35)

$$\sigma(p) = \varphi(\tau_0(p), p), \qquad \alpha(p) = \varphi(\tau_+(p), p), \qquad \beta(-p) = \varphi(\tau_-(-p), -p),$$

dove $p > 0$ e

- $\tau_+(p)$ è il tempo minimo perché la traiettoria con dato iniziale $p \in v_+$ raggiunga v_-,
- $\tau_-(-p)$ è il tempo minimo perché la traiettoria con dato iniziale $-p \in v_-$ raggiunga v_+,
- $\tau_0(p)$ è il tempo minimo perché la traiettoria con dato iniziale $p \in v_+$ ritorni in v_+.

Per costruzione si ha $\beta \circ \alpha = \sigma$ e $\tau_0(p) = \tau_+(p) + \tau_-(\alpha(p))$. Un punto $p \in v_+$ si dice *punto fisso* per σ se $\sigma(p) = p$. Indichiamo con $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ la composizione di σ con se stessa n volte. Si dimostri che le applicazioni α, β e σ sono ben definite e sono continue. [*Soluzione.* Le tre applicazioni sono ben definite per l'esercizio 69 e si ha $0 < \tau+(p), \tau_-(-p), \tau_0(p) < +\infty$. Dimostriamo che $p \mapsto \sigma(p)$ è continua. Sia $p + \delta \in v_+$ e si consideri $z(p, \delta) := \varphi(\tau_0(p), p + \delta)$. L'applicazione $\delta \mapsto z(p, \delta)$ è continua, per il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, e, per il teorema 12.3, fissato comunque $\varepsilon > 0$ si può scegliere δ sufficientemente piccolo perché sia $z(p) \in B_\varepsilon(\sigma(p))$. Per il lemma 21.5 esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $z \in B_\varepsilon(\sigma(p))$ esiste un tempo $t(z)$, continuo in z, tale che $\varphi(t(z), z) \in v_+$. Ne concludiamo che esiste un tempo $\tau(p, \delta) := t(z(p, \delta))$ tale che l'applicazione $(p, \delta) \mapsto \tau(p, \delta)$ è continua (in quanto composizione di funzioni continue) e $\varphi(\tau(p, \delta), z(p, \delta) \in v_+$. Si ha

$$\sigma(p + \delta) = \varphi(\tau(p, \delta), z(p, \delta)) = \varphi(\tau(p, \delta), \varphi(\tau_0(p), p + \delta) = \varphi(\tau(p, \delta) + \tau_0(p), p + \delta),$$

così che

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma(p + \delta) = \lim_{\delta \to 0} \varphi(\tau(p, \delta) + \tau_0(p), p + \delta) = \varphi(\tau(p, 0) + \tau_0(p), p) = \varphi(\tau_0(p), p) = \sigma(p),$$

dove abbiamo usato che $\tau(p, 0) = t(z(p, 0)) = t(\sigma(p)) = 0$. Per le applicazioni α e β si ragiona in modo analogo.]

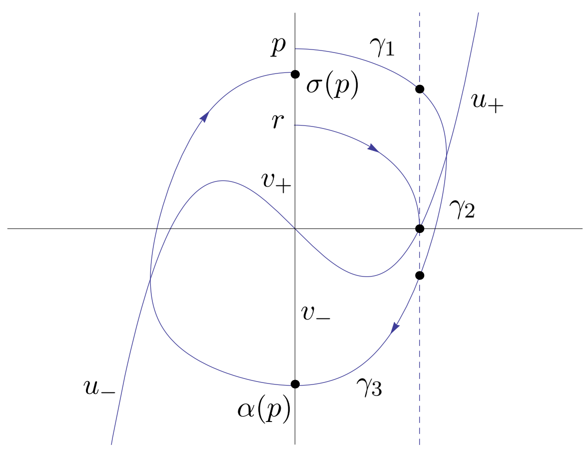

Figura 5.35: Le applicazioni $\alpha(p)$ e $\sigma(p)$ definite nell'esercizio 70.

Esercizio 71 Si dimostri che l'equazione di van der Pol ammette una traiettoria periodica che ruota intorno all'origine. [*Soluzione.* Sia $r > 0$ tale che la traiettoria con dato iniziale $r \in v_+$ attraversa l'asse x per la prima volta in $x = \sqrt{3}$ (i.e. nel punto $x > 0$ in cui $F(x) = 0$): tale r esiste poiché, facendo evolvere nel passato la traiettoria con dato iniziale $(\sqrt{3}, 0)$, essa deve intersecare la curva v_+, per quanto visto nell'esercizio 69, e la traiettoria che soddisfa tale condizione è individuata in modo univoco per il teorema di unicità della soluzione. Definiamo allora l'applicazione $\delta : v_+ \to \mathbb{R}$ come

$$\delta(p) = |\alpha(p)|^2 - |p|^2.$$

Se definiamo $W(t) = x^2(t) + y^2(t)$, dove $(x(t), y(t))$ è la soluzione con dato iniziale $p \in v_+$, si ha $W(0) = |p|^2$, $W(\tau_+(p)) = |\alpha(p)|^2$ e $\dot{W}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = 2x^2(t)\,(1 - x^2(t)/3)$. Se $p \in (0, r)$ si ha allora $x(t) < \sqrt{3}$ per $t \in [0, \tau_+(p)]$ e quindi

$$\delta(p) = W(\tau_+(p)) - W(0) = \int_0^{\tau_+(p)} \mathrm{d}t\, \dot{W}(t) = 2\int_0^{\tau_+(p)} \mathrm{d}t\, x^2(t) \left(1 - \frac{x^2(t)}{3}\right) > 0.$$

Se invece $p \in (r, +\infty)$, si può dividere l'orbita descritta dalla curva $(x(t), y(t))$, per $t \in [0, \tau_+(p)]$, in tre cammini, dipendenti da p (cfr. la figura 5.35):

- γ_1, descritto per $t \in [0, t_1(p)]$, dove $x(t_1(p)) = \sqrt{3}$,
- γ_2, descritto per $t \in [t_1(p), t_2(p)]$, dove $t_2(p) > t_1(p)$ e $x(t_2(p)) = \sqrt{3}$,
- γ_3, descritto per $t \in [t_2(p), \tau_+(p)]$.

Lungo γ_1 e γ_3, la variabile y si può scrivere in termini di x, i.e. $y = y(x)$ (cfr. la figura 5.35). Quindi abbiamo, lungo il cammino γ_1,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y - F(x)} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{t_1(p)} \mathrm{d}t\, \dot{W}(t) = \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \frac{2x^2}{y(x) - F(x)} \left(1 - \frac{x^2}{3}\right),$$

dove $y(x) - F(x)$ cresce al crescere di p, così che l'integrale decresce al crescere di p; analoghe considerazioni valgono per l'integrale sull'intervallo $[t_2(p), \tau_+(p)]$ corrispondente al cammino γ_3. Lungo il cammino γ_2 si può invece esprimere x in termini di y, i.e. $x = x(y)$, così che si trova

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{-x} \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_1(p)}^{t_2(p)} \mathrm{d}t\, \dot{W}(t) = 2\int_{y_1(p)}^{y_2(p)} \mathrm{d}y\, x(y) \left(1 - \frac{x^2(y)}{3}\right),$$

dove $y_1(p) < 0$ e $y_2(p) > 0$ sono i due valori di y tali che $x(y) = \sqrt{3}$ (cfr. la figura 5.35). Si vede che, al crescere di p, l'ampiezza dell'intervallo cresce, mentre l'integrando è negativo e decresce (poiché il cammino γ_2 si muove verso destra, quindi $x(y) > 1$ cresce). Inoltre l'integrale tende a $-\infty$ per $p \to +\infty$. In conclusione abbiamo trovato che l'applicazione δ verifica le seguenti proprietà:

1. $\delta(p)$ è continua,
2. $\delta(p) > 0$ per $p \in (0, r)$,
3. $\delta(p)$ è monotona decrescente per $p \in (r, +\infty)$ e $\lim_{p \to +\infty} \delta(p) = -\infty$.

Ne segue che esiste un unico valore p_0 tale che $\delta(p_0) = 0$. In corrispondenza di tale valore si ha $|\alpha(p)| = |p|$, ovvero $\alpha(p) = -p$. Poiché l'equazione di van der Pol è un caso particolare dell'equazione di Liénard con $f(x) = (x^2 - 1)$ e $g(x) = x$, quindi con f pari e g dispari, per l'esercizio 66, se $(x(t), y(t))$ è soluzione, anche $(-x(t), -y(t))$ è soluzione. In particolare $\beta(-p) = -\alpha(p)$ per $p > 0$; la soluzione con dato iniziale $-p \in v_-$ attraversa la curva v_+ nel punto $-\alpha(p)$ dopo un tempo $\tau_-(-p) = \tau_+(p)$. Ne concludiamo che la soluzione con dato iniziale $p_0 \in v_+$ riattraversa v_+ nello stesso punto p_0, così che p_0 è un punto fisso per l'applicazione σ. Per completare la dimostrazione basta notare che se $\sigma(p) = p$, la traiettoria con dato iniziale p è periodica. L'orbita corrispondente è rappresentata nella figura 5.36.

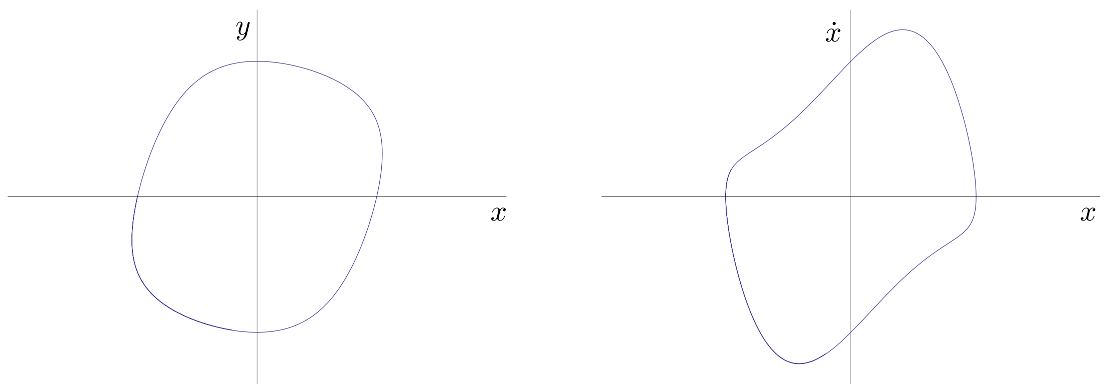

Figura 5.36: Ciclo limite dell'equazione di van der Pol nel piano (x, y) e nel piano $(x, \dot{x})$.

Esercizio 72 Si dimostri che la traiettoria periodica dell'equazione di van der Pol discussa nell'esercizio 71 descrive un ciclo limite a cui tendono tutte le traiettorie con dati iniziali che non siano l'origine. [*Soluzione.* Usiamo sempre le notazioni degli esercizi precedenti e continuiamo a identificare i punti delle curve v_+ e v_- con le loro componenti lungo l'asse y. Dimostriamo innanzitutto che non esistono altre soluzioni periodiche oltre quella trovata nella soluzione dell'esercizio 71. Se $\sigma(p) \neq p$ (i.e. se p non è un punto fisso di σ), la corrispondente traiettoria non può essere periodica. Questo segue dal lemma 21.3: se $\sigma(p) \neq p$, la successione di punti lungo cui la traiettoria $\varphi(t, p)$ intersecasse v_+, essendo monotona lungo la traiettoria, sarebbe monotona anche lungo v_+ e quindi non potrebbe mai tornare al valore iniziale p. D'altra parte σ non può avere altri punti fissi oltre p_0. Infatti se $p < p_0$ si ha $\delta(p) > 0 \Longrightarrow -p_0 < \alpha(p) < -p$, dove la diseguaglianza $\alpha(p) > -p_0$ deriva dal fatto che, per il teorema di unicità, la traiettoria $\varphi(t, p)$ non può intersecare la traiettoria $\varphi(t, p_0)$, per la quale $\alpha(p_0) = p_0$ $\Longrightarrow p < -\alpha(p) < p_0 \Longrightarrow \delta(-\alpha(p)) > 0 \Longrightarrow -p_0 < \alpha(-\alpha(p)) < -p \Longrightarrow p < \beta(\alpha(p)) < p_0$, poiché $\beta(\alpha(p)) = -\alpha(-\alpha(p))$ (cfr. la soluzione dell'esercizio 71) $\Longrightarrow \sigma(p) > p$. In modo analogo si trova che se $p > p_0$ allora $\sigma(p) < p$. Il ragionamento sopra mostra che, se $p \neq p_0$, la successione di punti $\sigma^n(p)$ in cui $\varphi(t, p)$ attraversa v_+ è strettamente monotona – crescente se $p < p_0$ e decrescente se $p > p_0$. Poiché tale successione è anche limitata (dal momento che $p_0 < \sigma(p) < p$ se $p > p_0$ e $p_0 > \sigma(p) > p$ se $p < p_0$), deve convergere (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 1). Sia p_1 il suo limite: si ha allora $p_1 \in L_\omega(p)$, ma per il teorema di Poincaré-Bendixson (teorema 21.7) $L_\omega(p)$ deve essere un'orbita chiusa, quindi $\sigma(p_1) = p_1$. D'altra parte l'unico punto fisso di σ è p_0, quindi $p_1 = p_0$. Ne segue che che $L_\omega(p) = \gamma$ per ogni $p \in v_+ \setminus \{p_0\}$. In conclusione, comunque si scelga un dato iniziale che non sia punto di equilibrio né appartenga alla curva γ, la traiettoria corrispondente si muove a spirale verso la curva γ.