così che l'energia potenziale gravitazionale del punto P è

$$-\frac{GMm}{\rho+h} = -\frac{GmM}{\rho}\frac{1}{1+\dfrac{h}{\rho}} = -\frac{GMm}{\rho}\left(1-\frac{h}{\rho}+O\Big(\Big(\frac{h}{\rho}\Big)^2\Big)\right) \approx -\frac{GMm}{\rho}+\frac{GMm}{\rho^2}h,$$

dove M è la massa della Terra. Tenendo conto che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, si può approssimare l'energia potenziale con $U(h) := mgh$, dove $g = GM/\rho^2$. Introducendo i valori di G, M e ρ, si trova $g = 9.8$ m s^{-2}. Poiché la forza $\boldsymbol{F}$ è, a meno del segno, il gradiente dell'energia potenziale, essa ha direzione radiale, è rivolta verso il centro della Terra e ha intensità mg. Se si fissa un sistema di riferimento che abbia l'origine in P e asse $\boldsymbol{e}_z$ diretto lungo il raggio della Terra e rivolto verso l'esterno, si ottiene $\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg)$.]

Esercizio 17 Dati tre vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z})$ prende il nome di *prodotto triplo vettoriale*. Si dimostri l'identità

$$\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\, \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{z},$$

valida per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$. (Si noti che $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) \neq (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z}$.).

Esercizio 18 Dati tre vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$, lo scalare $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}$ prende il nome di *prodotto misto* o *prodotto triplo scalare*. Si dimostri l'identità (nota come *identità del prodotto misto*)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$$

valida per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 19 Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (31.8) si ha

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L} = -F(\rho)\,(\dot{\rho}\boldsymbol{r} - \rho\dot{\boldsymbol{r}})\,.$$

[*Suggerimento.* Si usi l'esercizio 17 e il fatto che $2\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = (\mathrm{d}/\mathrm{dt})\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = (\mathrm{d}/\mathrm{dt})\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$.]

Esercizio 20 Si dimostri che per il campo centrale gravitazionale il *vettore di Laplace-Runge-Lenz* (o *vettore di Runge-Lenz*), definito come

$$\boldsymbol{A} := \mu\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L} - \mu k\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|},$$

è una costante del moto. [*Suggerimento.* Si usi la conservazione del momento angolare, l'esercizio 19 e il fatto che, per il campo centrale gravitazionale, si ha $F(\rho) = -k/\rho^2$.]

Esercizio 21 Si utilizzi il risultato dell'esercizio 20 per dimostrare che le orbite, nel caso del campo centrale gravitazionale, hanno la forma (32.26). [*Suggerimento.* Si ha $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L} = 0$, quindi $\boldsymbol{A}$ è un vettore costante nel piano in cui si svolge il moto. Prendendo l'asse x diretto lungo il vettore $\boldsymbol{A}$ e ponendo $A = |\boldsymbol{A}|$, si trova $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = A\rho\cos\theta = L^2 - \mu k\rho$, dove si è usata due volte di seguito l'identità $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x}$ (cfr. l'esercizio 18) e la definizione di momento angolare.]

Esercizio 22 Si dimostri la (33.6). [*Suggerimento.* Si veda la dimostrazione del teorema 29.6.]

Esercizio 23 Si dimostri la (33.11). [*Suggerimento.* Si veda la (30.7) del capitolo 6.]

Esercizio 24 Si dimostri la (33.12). [*Suggerimento.* Si ragiona come per dimostrare la (29.15).]