§38 Moti dei sistemi rigidi

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che per individuare un sistema rigido in un sistema di riferimento fisso κ è sufficiente studiare il moto rigido D_t che porta da un sistema di riferimento K, solidale con il sistema rigido, al sistema di riferimento κ. Chiamiamo allora *velocità angolare del sistema rigido* la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ che corrisponde alla rotazione che compone la trasformazione rigida D_t (cfr. la definizione 34.16).

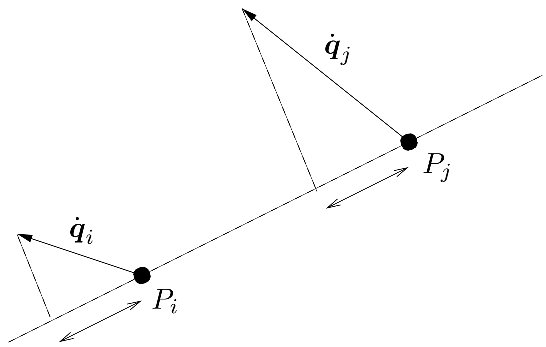

Figura 9.2: Situazione prevista nella discussione del lemma 38.1.

Lemma 38.1 *I sistemi rigidi sono caratterizzati dalla proprietà che, in ogni istante, le velocità di due punti qual si voglia del sistema hanno la stessa componente lungo la retta congiungente i due punti.*

Dimostrazione. Scrivendo la (37.1) nella forma $(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j) \cdot (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j) = r_{ij}^2$ e derivando rispetto al tempo, otteniamo $(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_i = \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j\big) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_j$, da cui segue che i vettori $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ e $\dot{\boldsymbol{q}}_j$ hanno la stessa proiezione lungo la direzione di $\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j$ (cfr. la figura 9.2). ■

Lemma 38.2 *Sia O un punto qualsiasi solidale con un sistema rigido e sia $\boldsymbol{v}_O$ la velocità che esso ha rispetto a un sistema di riferimento fisso. Se $\boldsymbol{v}_P$ indica la velocità di un punto P del sistema rigido (nel sistema di riferimento fisso) e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del sistema rigido, si ha*

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \big(\boldsymbol{q}_P - \boldsymbol{q}_O\big), \tag{38.1}$$

dove $\boldsymbol{q}_P$ e $\boldsymbol{q}_O$ indicano i vettori che individuano i due punti P e O.

Dimostrazione. Segue dal teorema 34.24, scegliendo il sistema di riferimento solidale con il sistema rigido con l'origine coincidente con O (così che $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}_O$ e $\boldsymbol{v}_0 := \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_O$) e tenendo conto che nel sistema solidale con il sistema rigido ogni suo punto è in quiete, così che, nella (34.24), si ha $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$. ■