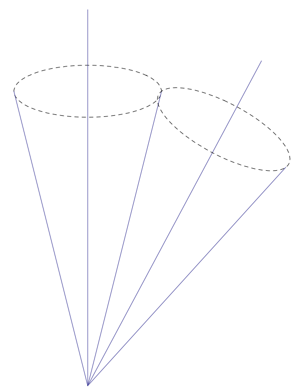

Figura 9.8: Coni di Poinsot.

Definizione 38.14 (Coni di Poinsot) *Nel moto di un sistema rigido con un punto fisso, le rigatea fissa e la rigata mobile, descritte dall'asse di moto, si riducono a due coni, con il vertice in corrispondenza del punto fisso, i quali rotolano senza strisciare l'uno sull'altro. I due coni prendono il nome di* coni di Poinsot.

§39 Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi

Ricordiamo che, dato un punto materiale di massa m e posizione $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$, in un fissato sistema di riferimento, se indichiamo con $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}}$ la sua velocità, possiamo associare a esso l'*energia cinetica* T, la *quantità di moto* $\boldsymbol{p}$ e il *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) $\boldsymbol{l}$ rispetto a un punto O, dati, rispettivamente, da

$$T = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}|^2, \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{l} = \big(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge m\boldsymbol{v}. \tag{39.1}$$

Vogliamo vedere come si estendono le definizioni di tali quantità nel caso di più punti materiali che costituiscano un sistema rigido. Consideriamo esplicitamente il caso di sistemi rigidi discreti; i risultati si estendono facilmente a sistemi rigidi continui.

Teorema 39.1 *Dato un sistema rigido costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, la sua energia cinetica è*

$$T = T' + T'' + T''', \tag{39.2}$$

con

$$T' = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_O|^2, \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{39.3a}$$

$$T'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{\omega} \cdot \big((\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)) \big) , \tag{39.3b}$$

$$T''' = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{v}_O \cdot \big(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \big) , \tag{39.3c}$$

dove O *è un punto qualsiasi solidale con il sistema rigido,* $\boldsymbol{v}_O$ *è la sua velocità e* $\boldsymbol{\omega}$ *è la velocità angolare.*

Dimostrazione. Per definizione di energia cinetica si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\boldsymbol{q}}_i|^2, \tag{39.4}$$

dove ciascuna $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (38.1), con $P = P_i$ e, conseguentemente, $\boldsymbol{v}_P = \dot{\boldsymbol{q}}_i$. Esplicitando il quadrato del modulo dei vettori $\dot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)$ e usando l'identità

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)) = \boldsymbol{\omega} \cdot \big((\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)) \big) ,$$

i.e. l'identità (cfr. l'esercizio 18 del capitolo 7)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x}, \tag{39.5}$$

con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O$, segue allora la (39.2), con le definizioni (39.3). ■

Teorema 39.2 (Teorema (König) *Sotto le stesse condizioni del teorema 39.1, se* O *è il centro di massa del sistema rigido, l'energia cinetica assume la forma*

$$T = T' + T'' = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_O^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{\omega} \cdot \big((\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)) \big) ,$$

dove $\boldsymbol{q}_O$ *è dato dalla* (37.2)*; il termine* T' *è l'energia cinetica che competerebbe a un punto materiale di massa* m *che si trovasse nella posizione occupata dal centro di massa del sistema.*

Dimostrazione. Segue dal teorema 39.1, notando che se O è il centro di massa del sistema rigido allora T''' si annulla identicamente. ■

Corollario 39.3 *Sotto le stesse condizioni del teorema 39.1, se O è un punto fisso per il sistema rigido, l'energia cinetica assume la forma*

$$T = T'' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\big((\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)\wedge\big(\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)\big)\big)\,,$$

dove $\boldsymbol{q}_O$ è il vettore posizione del punto O. In particolare se si sceglie il sistema di riferimento fisso κ con l'origine in O si ha $\boldsymbol{q}_O = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Discende dal teorema 39.1, notando che $\boldsymbol{v}_O = \mathbf{0}$ se O è un punto fisso. ∎

Osservazione 39.4 In un sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, il punto O ha velocità nulla. Poiché il prodotto scalare e il prodotto vettoriale conservano la metrica, possiamo interpretare il termine T'' dicendo che rappresenta l'energia cinetica del sistema rigido nel sistema di riferimento solidale con esso. Se O è il centro di massa chiameremo T'' l'energia cinetica nel "sistema di riferimento del centro di massa".

Teorema 39.5 *La quantità di moto di un sistema rigido costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, è data da*

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}'', \tag{39.6}$$

con

$$\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}_O, \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i, \qquad \boldsymbol{p}'' = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{\omega}\wedge\big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big), \tag{39.7}$$

dove O è un punto qualsiasi solidale con il sistema rigido, $\boldsymbol{v}_O$ è la sua velocità e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare.

Dimostrazione. Per definizione di quantità di moto si ha

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{q}}_i, \tag{39.8}$$

dove ciascuna $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (38.1), con $P = P_i$. Si ha quindi $\boldsymbol{v}_P = \dot{\boldsymbol{q}}_i$, così che segue la (39.6). ∎

Corollario 39.6 *La quantità di moto di un sistema rigido è uguale alla quantità di moto che spetterebbe a un punto materiale di massa m che si trovasse nella posizione occupata dal suo centro di massa.*

Dimostrazione. Dalla (39.6), scegliendo come punto O il centro di massa del sistema rigido, si ottiene $\boldsymbol{p}'' = \mathbf{0}$ e quindi $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_O$, con $\boldsymbol{v}_O$ velocità del centro di massa. ∎

Teorema 39.7 *Dato un sistema rigido costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, il suo momento angolare rispetto a un qualsiasi punto O (fisso o solidale con il sistema rigido) è*

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}' + \boldsymbol{l}'', \tag{39.9}$$

con

$$\boldsymbol{l}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \boldsymbol{v}_O, \qquad \boldsymbol{l}'' = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \big(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)\big), \tag{39.10}$$

dove $\boldsymbol{v}_O$ è la velocità del punto O e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare.

Dimostrazione. Per definizione di momento angolare (rispetto al punto O) si ha

$$\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \dot{\boldsymbol{q}}_i, \tag{39.11}$$

dove ciascuna velocità $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (38.1), con $P = P_i$ e, conseguentemente, $\boldsymbol{v}_P = \dot{\boldsymbol{q}}_i$. Si ottiene quindi la (39.9). ■

Corollario 39.8 *Sotto le stesse condizioni del teorema 39.7, se O è il centro di massa del sistema, si ottiene*

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'' = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \big(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)\big),$$

dove $\boldsymbol{q}_O$ è dato dalla (37.2).

Dimostrazione. Segue dal teorema 39.7 e dalla definizione di centro di massa. ■

Osservazione 39.9 Se O è un punto fisso per il sistema rigido, così che $\boldsymbol{v}_O := \dot{\boldsymbol{q}}_0 = \boldsymbol{0}$, si ha

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'' = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \big(\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O)\big). \tag{39.12}$$

Se si sceglie O come origine del sistema fisso (i.e. $\boldsymbol{q}_O = \boldsymbol{0}$), in (39.12) risulta $\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O = \boldsymbol{q}_i$.

Lemma 39.10 *Dato un sistema rigido costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, la derivata temporale del suo momento angolare è*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O\big) \wedge \ddot{\boldsymbol{q}}_i - \boldsymbol{v}_O \wedge \boldsymbol{p},$$

dove O è un punto qualsiasi del sistema rigido, $\boldsymbol{v}_O$ è la sua velocità e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare.

Dimostrazione. Segue dalla (39.11), per derivazione esplicita rispetto al tempo, tenendo conto che $\dot{\boldsymbol{q}}_i \wedge \dot{\boldsymbol{q}}_i$ è identicamente nullo e utilizzando la definizione (39.8) di quantità di moto. ■