avendo tenuto conto che $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, 0)$ e $\boldsymbol{f}_V^{(i)} = (0, 0, f_V^{(i)})$ per $i = 1, 2$. Per la (41.8) si ha

$$f_V^{(1)} = m_1 \left(\ddot{a}(t) + g\right), \qquad f_V^{(2)} = m_2 \left(\ddot{a}(t) + g\right). \tag{41.11}$$

Scrivendo le forze vincolari come combinazioni lineari dei gradienti delle funzioni (41.8) che definiscono il vincolo, conformemente alla (41.5), si ottiene $\lambda_1(t) = m_1(\ddot{a}(t) + g)$ e $\lambda_2(t) = m_2(\ddot{a}(t)+g)$. Il lavoro compiuto dalle forze vincolari lungo una traiettoria qualsiasi del sistema, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, è dato da

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\boldsymbol{f}_V^{(1)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + \boldsymbol{f}_V^{(2)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}\right] \mathrm{d}t \; &= \; (m_1 + m_2) \int_0^T \left(\ddot{a}(t)\, \dot{a}(t) + g\, \dot{a}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \; (m_1 + m_2) \left[\frac{1}{2} \left(\dot{a}^2(T) - \dot{a}^2(0)\right) + g \left(a(T) - a(0)\right)\right], \end{aligned} \tag{41.12}$$

indipendentemente dalla traiettoria, i.e. indipendentemente da come i punti si muovano sul piano orizzontale. Tale lavoro non è altro che la variazione di energia del sistema dal tempo 0 al tempo $T$. In particolare se $a(t) = a =$ costante, il lavoro (41.12) è nullo. Si noti che se i vincoli non dipendono dal tempo, l'energia totale del sistema, i.e. la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale corrispondente alle forze esterne agenti sul sistema, è una costante del moto: in tal caso il lavoro compiuto dalle forze vincolari è nullo (per l'osservazione 41.9).

## §42 Principio di d'Alembert e vincoli rigidi

Abbiamo definito nel §37 i sistemi rigidi come quei sistemi meccanici costituiti da $N$ punti materiali soggetti ai vincoli che le mutue distanze dei punti siano costanti (vincoli rigidi). Vogliamo mostrare (cfr. il teorema 42.4 più avanti) che se tale vincolo è un vincolo perfetto, i.e. se è un vincolo per cui vale il principio di d'Alembert, allora segue che per i sistemi rigidi rimangono valide le equazioni della dinamica

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{n}, \tag{42.1}$$

se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{l}$ rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema (rispetto a un punto dato), e, analogamente, $\boldsymbol{f}$ è la risultante delle forze attive applicate al sistema e $\boldsymbol{n}$ è il risultante dei loro momenti (rispetto allo stesso punto). Le (42.1) sono note come *equazioni cardinali della dinamica per sistemi rigidi*. Come si vede sono una semplice estensione delle leggi che valgono per punti materiali non vincolati; concettualmente non si tratta però un'estensione banale, dal momento che necessita di un principio (il principio di d'Alembert) che ne giustifichi la correttezza.

Imponiamo il vincolo che, dati $N$ punti materiali, si abbia

$$|\boldsymbol{x}^{(i)}(t) - \boldsymbol{x}^{(j)}(t)| = r_{ij}(t), \qquad 1 \le i < j \le N, \tag{42.2}$$