

## 10 | Proprietà dei sistemi rigidi

### §44 Momenti di inerzia ed ellissoide di inerzia

Nel capitolo precedente, precisamente nel §42, abbiamo visto le formule che esprimono le leggi di variazione nel tempo della quantità di moto e del momento angolare di un sistema rigido.

In particolare se consideriamo un sistema rigido non soggetto ad altri vincoli che non siano quelli di rigidità, allora, come conseguenza del principio di d'Alembert, le equazioni del moto sono date dalle equazioni (42.1), dove  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{n}$  rappresentano, rispettivamente, la risultante delle forze attive agenti sul sistema e il risultante dei momenti di tale forze. In altre parole per il calcolo di  $\mathbf{f}$  e di  $\mathbf{n}$  possiamo ignorare le forze vincolari. Se al contrario il sistema rigido ha un punto fisso  $O$ , occorre considerare in aggiunta la forza vincolare che si genera in  $O$ , mentre il momento di tale forza rispetto al punto  $O$  è ovviamente nullo. Le corrispondenti equazioni del moto sono date dalle equazioni (42.11). Ci si riferisce a tale situazione talvolta, un po' impropriamente, come a un sistema rigido "libero con un punto fisso", dove "libero" indica l'assenza di forze esterne. Si noti che in entrambi i casi la legge di variazione del momento angolare è la stessa.

Nel presente capitolo considereremo in dettaglio il caso di un sistema rigido non soggetto a forze. Abbiamo visto che un sistema rigido è un sistema a 6 gradi di libertà e che il suo spazio delle configurazioni è dato da  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  (cfr. il teorema 37.3). È naturale attendersi che molte proprietà del moto di un sistema rigido non dipendano dalla particolare forma che esso ha. Questo può essere formalizzato introducendo la nozione di ellissoide di inerzia.

Sia  $\kappa$  un sistema di riferimento fisso. Scegliamo un sistema di riferimento mobile  $K$  che sia solidale con il sistema rigido. Se il sistema rigido ha un punto fisso sceglieremo come origine di  $K$  il punto fisso, altrimenti l'origine sarà identificata con il centro di massa del sistema rigido. Se  $B = B_t$  indica la rotazione di  $K$  rispetto a  $\kappa$ , ogni vettore del sistema di riferimento  $K$  è trasformato da  $B$  in un vettore del sistema di riferimento  $\kappa$ . I vettori corrispondenti nei sistemi di riferimento  $K$  e  $\kappa$  saranno indicati con la stessa lettera, maiuscola per i vettori in  $K$  e minuscola per i vettori in  $\kappa$ . L'operatore  $B$  conserva la metrica e l'orientazione, quindi conserva il prodotto scalare e il prodotto vettoriale (cfr. le (34.3) e (34.9)).

Sia  $P$  uno dei punti del sistema rigido e sia  $m$  la sua masa; per definizione di velocità angolare e di momento angolare rispetto a un punto fisso  $O$ , si ha (cfr. la (39.12) con  $N = 1$ )

$$\mathbf{l} = m(\mathbf{q} - \mathbf{q}_O) \wedge \dot{\mathbf{q}} = m(\mathbf{q} - \mathbf{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{q}_O)), \quad \mathbf{L} = m\mathbf{Q} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}), \quad (44.1)$$

se  $\mathbf{l} = B\mathbf{L}$  è il momento angolare di  $P$  (la relazione tra  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}$  è data  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_O = B\mathbf{Q}$ ). Dalla (44.1) segue l'esistenza di un operatore lineare  $A: K \rightarrow K$ , che trasforma  $\boldsymbol{\Omega}$  in  $\mathbf{L}$ ,

$$A\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}, \quad (44.2)$$

che prende il nome di *operatore di inerzia del punto  $P$  rispetto al punto fisso  $O$* .

**Lemma 44.1** *L'operatore di inerzia  $A$  di un punto è simmetrico e semidefinito positivo, i.e., fissata una qualsiasi base in  $\mathbb{R}^3$ , esso è rappresentato da una matrice simmetrica semidefinita positiva.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K$ , abbiamo, applicando due volte la (39.5),

$$\mathbf{X} \cdot A\mathbf{Y} = m\mathbf{X} \cdot (\mathbf{Q} \wedge (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Q})) = m(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Q}), \quad (44.3)$$

che è un'espressione simmetrica in  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . In particolare, se scegliamo  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , la (44.3) dà  $\mathbf{X} \cdot A\mathbf{X} = m|\mathbf{X} \wedge \mathbf{Q}|^2 \geq 0$ . ■

La (44.2) si può esprimere nello spazio  $\kappa$

$$a\boldsymbol{\omega} = \mathbf{l}, \quad a = BAB^T, \quad (44.4)$$

così che, dalla (44.1) e dalla (44.4), segue che, fissato un sistema di coordinate cartesiane, l'operatore  $a$  può essere rappresentato attraverso la matrice di elementi

$$a_{ij} = m(|\mathbf{q} - \mathbf{q}_O|^2 \delta_{ij} - (q_i - q_{O_i})(q_j - q_{O_j})), \quad (44.5)$$

come è immediato verificare calcolando esplicitamente i prodotti vettoriali in (44.1) (cfr. l'esercizio 1). Analogamente, nello spazio  $K$ , si ha

$$A_{ij} = m(|\mathbf{Q}|^2 \delta_{ij} - Q_i Q_j), \quad (44.6)$$

ovvero, più esplicitamente,

$$A = \begin{pmatrix} m(Q_2^2 + Q_3^2) & -mQ_1Q_2 & -mQ_1Q_3 \\ -mQ_1Q_2 & m(Q_1^2 + Q_3^2) & -mQ_2Q_3 \\ -mQ_1Q_3 & -mQ_2Q_3 & m(Q_1^2 + Q_2^2) \end{pmatrix}. \quad (44.7)$$

Dalla (44.6) risulta evidente che  $A$  è costante; infatti dipende solo dalle coordinate  $\mathbf{Q}$  del punto materiale di massa  $m$  nel sistema  $K$  in cui esso è fisso.

**Lemma 44.2** *L'energia cinetica di un punto  $P$  di massa  $m$ , in un sistema di riferimento rotante  $K$ , si può scrivere come*

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot A \boldsymbol{\Omega}. \quad (44.8)$$

dove  $A$  è l'operatore di inerzia di  $P$  e  $\boldsymbol{\Omega}$  il vettore velocità angolare nel sistema  $K$ .

*Dimostrazione.* Dal corollario 39.3 con  $N = 1$ , dalla prima delle (44.1) e dalla (44.4) segue che

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot a \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}, \quad (44.9)$$

dove si è usato che  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{q}_O)$ , se  $O$  è fisso (così che  $\dot{\mathbf{q}}_O = \mathbf{0}$ ), così che

$$|\mathbf{v}|^2 = (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{q}_O)) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{q}_O)) = \boldsymbol{\omega} \cdot ((\mathbf{q} - \mathbf{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{q}_O))),$$

per l'identità del prodotto misto (cfr. l'esercizio 18 del capitolo 7). Poiché l'operatore  $B$  e il prodotto scalare conservano la metrica, la (44.9) è equivalente alla (44.8). ■

### §44.1 Momenti di inerzia di sistemi rigidi discreti

Finora abbiamo considerato un unico punto materiale. Se abbiamo un sistema rigido costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , di masse, rispettivamente,  $m_1, \dots, m_N$ , e se  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N$  sono i vettori che li individuano nel sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, per ciascuno di essi il momento angolare è dato da  $\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{Q}_i \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}_i)$ . Il momento angolare totale del sistema è definito come

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{Q}_i \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}_i); \quad (44.10)$$

analogamente possiamo definire

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O)), \quad (44.11)$$

con ovvio significato dei simboli, nel sistema di riferimento fisso (cfr. il §39). Si noti che la (44.11) – e di conseguenza la (44.10) – vale sia nel caso in cui il punto  $O$  sia non un punto fisso che nel caso in cui sia il centro di massa del sistema rigido (cfr. il corollario 39.8).

**Teorema 44.3** *Dato un sistema rigido costituito da  $N$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_N$ , sia  $K$  un sistema di riferimento solidale con esso e che abbia l'origine  $O$  nel punto fisso del sistema rigido se questo esiste e nel suo centro di massa altrimenti. Il momento angolare  $\mathbf{L}$  del sistema rigido rispetto al punto  $O$  dipende linearmente dalla velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$ , i.e. esiste un operatore  $I: K \rightarrow K$ , tale che*

$$I \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}. \quad (44.12)$$

Inoltre l'operatore  $I$  è simmetrico e semidefinito positivo. L'energia cinetica del sistema rigido, nel sistema di riferimento solidale con esso, è data da

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot I \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot I^{-1} \mathbf{L}, \quad (44.13)$$

ed è quindi una forma quadratica semidefinita positiva nella velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$ . L'operatore  $I$  prende il nome di operatore di inerzia del sistema rigido (rispetto al punto  $O$ ).

*Dimostrazione.* Dato un sistema rigido costituito da  $N$  punti, per definizione il momento angolare è dato dalla somma dei momenti della quantità di moto dei suoi punti (cfr. la (44.11)). Se calcoliamo i momenti rispetto a un punto fisso  $O$ , si ha

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = I \boldsymbol{\Omega}, \quad I := \sum_{i=1}^N A_i, \quad (44.14)$$

se  $A_i$  è l'operatore di inerzia del punto  $P_i$ . La (44.14) implica la (44.12). Poiché anche l'energia cinetica del sistema rigido è data dalla somma delle energie cinetiche dei suoi punti, segue anche la (44.13). Per il lemma 44.1,  $I$  è simmetrico e semidefinito positivo e, di conseguenza,  $T$  è una forma quadratica semidefinita positiva (cfr. l'esercizio 9 del capitolo 4).

Se  $O$  è il centro di massa del sistema rigido, si ragiona in modo analogo, tendo conto che  $\mathbf{L}$  si scrive ancora nella forma (44.10). ■

**Osservazione 44.4** L'operatore di inerzia nel sistema di riferimento fisso  $\kappa$  è dato da

$$i = i(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) = B_t I B_t^T,$$

dove  $a_i(t) = B_t A_i B_t^T$ ; contrariamente a  $I$ ,  $i(t)$  è funzione del tempo (come segue dalla (44.5)). Nel sistema  $\kappa$ , l'energia cinetica  $T$  assume la forma  $T = (\boldsymbol{\omega} \cdot i \boldsymbol{\omega})/2 = (\boldsymbol{\omega}(t) \cdot i(t) \boldsymbol{\omega}(t))/2$ .

**Definizione 44.5** (MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA E ASSI DI INERZIA) *Sia  $O$  un punto fisso o il centro di massa di un sistema rigido e sia  $I$  l'operatore di inerzia del sistema rispetto a  $O$ . Si chiamano momenti principali di inerzia gli autovalori dell'operatore di inerzia  $I$  e assi di inerzia (rispetto al punto  $O$ ) gli autovettori corrispondenti.*

**Osservazione 44.6** L'operatore  $I$ , essendo simmetrico, ammette tre autovalori reali e autovettori ortogonali  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (cfr. gli esercizi 38÷42 del capitolo 1). Se gli autovalori non sono tutti distinti, gli assi di inerzia non sono determinati in modo univoco. Poiché  $I$  è semidefinito positivo, i suoi autovalori sono non negativi (cfr. l'esercizio 2).

**Osservazione 44.7** La (44.13) si può scrivere

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2), \quad (44.15)$$

se  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  nella base degli assi di inerzia. Infatti, se  $\boldsymbol{\Omega}$  è decomposta lungo le direzioni degli assi di inerzia, i.e.  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$ , si ha  $I\boldsymbol{\Omega} = I_1 \Omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \Omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3$ , tenendo conto che  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ , segue immediatamente la (44.15).

**Osservazione 44.8** Se indichiamo con  $Q$  le coordinate nella base degli assi di inerzia, si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^N m_i (Q_{i2}^2 + Q_{i3}^2), \\ I_2 &= \sum_{i=1}^N m_i (Q_{i1}^2 + Q_{i3}^2), \\ I_3 &= \sum_{i=1}^N m_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2), \end{aligned}$$

come segue dalla (44.7) e dalla considerazione che nella base degli assi di inerzia la matrice che rappresenta l'operatore di inerzia è diagonale.

**Definizione 44.9** (MOMENTO DI INERZIA). *Dato un sistema rigido costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  e data una retta  $\mathbf{e}$ , che chiamiamo asse, indichiamo con  $r_i$  la distanza del punto  $P_i$  da  $\mathbf{e}$ , per  $i = 1, \dots, N$ . Definiamo momento di inerzia del sistema rigido rispetto all'asse  $\mathbf{e}$  la grandezza*

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (44.16)$$

dove  $m_i$  è la massa del punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Corollario 44.10** *Gli autovalori  $I_1, I_2, I_3$  dell'operatore di inerzia  $I$  sono i momenti di inerzia del sistema rispetto agli assi di inerzia.*

*Dimostrazione.* Segue dalle definizioni 44.5 e 44.9, non appena si tenga conto della forma della matrice (44.7) e del fatto che, nella base degli autovettori, la matrice che rappresenta l'operatore di inerzia  $I = \sum_{i=1}^N A_i$  è una matrice diagonale (cfr. l'osservazione 44.8). ■

**Osservazione 44.11** L'energia cinetica di un sistema rigido, che sia vincolato a un punto  $O$  e ruoti con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$  (dove  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ ) intorno all'asse  $\mathbf{e}$ , è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{e}} \Omega^2, \quad (44.17)$$

con le notazioni introdotte nella definizione 44.9. Infatti, scegliendo un sistema di coordinate in cui  $\mathbf{e}$  abbia componenti  $(0, 0, 1)$ , si ha  $\mathbf{e} \cdot A_i \mathbf{e} = A_{i33} = m_i(Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2) = m_i r_i^2$ , se  $m_i$  è la massa del punto  $P_i$  e  $r_i$  è la sua distanza dall'asse verticale (coincidente con  $\mathbf{e}$ ). Quindi

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e} \cdot I \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{e} \cdot I \mathbf{e} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e} \cdot A_i \mathbf{e} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^2 I_{\mathbf{e}},$$

in virtù della (44.16).

**Definizione 44.12** (ELLISSOIDE DI INERZIA). *Si definisce ellissoide di inerzia di un sistema rigido, che abbia operatore di inerzia  $I$ , l'ellissoide*

$$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\Omega} : \langle \boldsymbol{\Omega}, I \boldsymbol{\Omega} \rangle = 1\}.$$

Nella base degli assi di inerzia, l'ellissoide  $\mathcal{E}$  ha la forma

$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 1;$$

gli assi dell'ellissoide di inerzia sono perciò diretti lungo gli assi di inerzia e la lunghezza dei semiassi è  $1/\sqrt{I_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Se l'ellissoide di inerzia è invariante per rotazioni intorno a uno degli assi di inerzia, per esempio  $\mathbf{e}_3$  (così che  $I_1 = I_2$ ), diremo che è un ellissoide di rotazione.

**Osservazione 44.13** Se un sistema rigido è schiacciato lungo un qualsiasi asse, allora il momento di inerzia rispetto a tale asse sarà piccolo, per la (44.16), quindi anche il suo ellissoide di inerzia sarà schiacciato lungo lo stesso asse.

**Osservazione 44.14** Se  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  è la velocità angolare con cui ruota il sistema rigido, allora dal confronto della (44.13) con la (44.17) si vede che  $\boldsymbol{\Omega}(t)/\sqrt{2T} \in \mathcal{E}$ . Il vettore  $\mathbf{L}(t)$ , che rappresenta il momento angolare del sistema rigido, è *normale* (i.e. ortogonale) alla superficie del suo ellissoide di inerzia  $\mathcal{E}$  nel suo punto di intersezione con l'asse di  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ , i.e. nel punto  $\boldsymbol{\Omega}(t)/\sqrt{2T}$ ; infatti la normale all'ellissoide  $\mathcal{E}$  nel punto  $\boldsymbol{\Omega}$  è diretta lungo il vettore  $\nabla(\boldsymbol{\Omega} \cdot I \boldsymbol{\Omega}) = 2I \boldsymbol{\Omega}$  (cfr. l'esercizio 3) e, se  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  è la velocità angolare del sistema rigido, allora  $I \boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{L}(t)$  (cfr. la (44.14)).

**Teorema 44.15** (TEOREMA DI HUYGENS-STEINER) *Il momento di inerzia  $I$  di un sistema rigido rispetto a un asse  $\mathbf{e}$  parallelo all'asse  $\mathbf{e}_0$  passante per il centro di massa è legato al momento di inerzia  $I_0$  rispetto all'asse  $\mathbf{e}_0$  dalla relazione*

$$I = I_0 + m r^2, \tag{44.18}$$

dove  $m$  è la massa del sistema e  $r$  la distanza tra i due assi  $\mathbf{e}_0$  ed  $\mathbf{e}$ .

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di momento di inerzia. Infatti risulta

$$I = I_e = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad I_0 = I_{e_0} = \sum_{i=1}^N m_i (r_{0i})^2, \quad (44.19)$$

se  $r_i$  e  $r_{0i}$  denotano la distanza del punto  $P_i$ , rispettivamente, dall'asse  $e$  e dall'asse  $e_0$ .

Sia  $\pi$  un piano ortogonale ai due assi: ogni punto  $P_i$  sarà individuato da un vettore  $\mathbf{r}_i$ , la cui lunghezza  $r_i$  ne indica la distanza dall'asse  $e$ , e da un vettore  $\mathbf{z}_i$ , la cui lunghezza ne esprime la distanza dal piano  $\pi$ ; analogamente possiamo individuare tale punto dando i vettori  $\mathbf{r}_{0i}$  e  $\mathbf{z}_i$ , le cui lunghezze ne costituiscono la distanza dall'asse  $e_0$  e la distanza dal piano  $\pi$ , rispettivamente. Denotiamo con  $\mathbf{r}$  il vettore (di lunghezza  $r$ ) sul piano  $\pi$  che va dall'asse  $e$  all'asse  $e_0$ ; per ogni punto  $P_i$  si ha  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{r}$  (cfr. la figura 10.1).

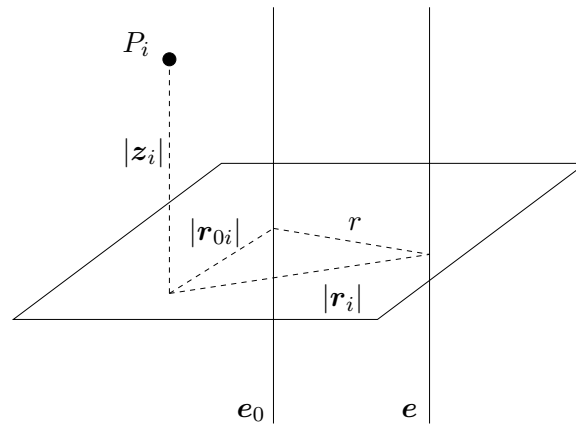


Figura 10.1: Discussione del teorema 44.15.

Possiamo riscrivere  $I_e$  in (44.19) come

$$I_e = \sum_{i=1}^N m_i (|\mathbf{r}_{0i}|^2 + |\mathbf{r}_0|^2 + 2\mathbf{r}_{0i} \cdot \mathbf{r}) = I_{e_0} + mr^2,$$

poiché, per definizione di centro di massa, il terzo termine della somma è nullo. ■

**Osservazione 44.16** Il teorema 44.15 è anche noto come *teorema degli assi paralleli*.

## §44.2 Momenti di inerzia di sistemi rigidi continui

Nel caso di un sistema rigido continuo (cfr. il §37.2), definiamo il momento di inerzia del sistema rispetto a un asse  $e$  la grandezza (cfr. la definizione 44.9)

$$I_e = \int_C dQ \rho(\mathbf{Q}) r^2(\mathbf{Q}), \quad (44.20)$$

se  $r(\mathbf{Q})$  è la distanza del punto di coordinate  $\mathbf{Q}$  dall'asse  $\mathbf{e}$ , Sia nel caso di sistemi continui bidimensionali che nel caso di sistemi continui unidimensionali il momento di inerzia rispetto a un asse  $\mathbf{e}$  si definisce ancora come in (44.20), con  $\rho(\mathbf{Q})$  sostituito da  $\sigma(\mathbf{Q})$  e da  $\lambda(\mathbf{Q})$ , rispettivamente (cfr. il §37.2).

### §44.3 Assi di simmetria

Un sistema rigido possiede un *asse di simmetria di ordine  $n$*  se si sovrappone a se stesso in seguito a una rotazione di  $2\pi/n$  intorno all'asse. Se  $\mathbf{e}$  è un asse di simmetria di ordine  $n$  per ogni  $n \geq 1$ , diremo che  $\mathbf{e}$  è un *asse di simmetria rotazionale*. Se un sistema rigido ha un asse di simmetria di ordine  $n$ , il suo ellissoide di inerzia ha la stessa simmetria rispetto a quell'asse.

Gli assi di inerzia costituiscono assi di simmetria di ordine 2 per l'ellissoide di inerzia; viceversa se un ellissoide di inerzia ammette un asse di simmetria  $\mathbf{e}$  di ordine 2 allora  $\mathbf{e}$  deve essere un suo asse di inerzia (cfr. l'esercizio 4). Se un sistema rigido ammette un asse di simmetria di ordine 2, tale asse deve essere anche un asse di simmetria di ordine 2 per il corrispondente ellissoide di inerzia, e quindi deve essere un asse di inerzia. Inoltre un ellissoide di inerzia non può avere assi di simmetria di ordine  $n > 2$  che non siano assi di simmetria rotazionale (cfr. l'esercizio 4); in tal caso l'ellissoide di inerzia è un ellissoide di rotazione. Se un sistema rigido ammette un asse di simmetria  $\mathbf{e}$  di ordine  $n > 2$ , tale asse è *a fortiori* un asse di simmetria di ordine  $n$  per l'ellissoide di inerzia. Ma, poiché abbiamo visto che un ellissoide di inerzia può avere assi di simmetria di ordine  $n > 2$  solo se è un ellissoide di rotazione, ne segue che in tal caso  $\mathbf{e}$  deve essere un asse di inerzia dell'ellissoide. Più precisamente uno degli assi di inerzia dell'ellissoide sarà diretto lungo  $\mathbf{e}$ , mentre gli altri due saranno due assi contenuti nel piano ortogonale a  $\mathbf{e}$  e ortogonali tra loro (ma per il resto arbitrari).

Se un sistema rigido ammette due assi di simmetria distinti di ordine  $n > 2$ , l'ellissoide di inerzia deve essere una sfera (cfr. l'esercizio 5). Se un sistema rigido ammette due assi di simmetria distinti  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ , tali che l'angolo tra i due assi sia diverso da  $\pi/2$  e almeno uno dei due assi sia un asse di simmetria di ordine  $n > 2$ , di nuovo l'ellissoide di inerzia deve essere una sfera (cfr. l'esercizio 5).

**Osservazione 44.17** In generale determinare gli assi di inerzia di un sistema rigido è complicato: fissata una base arbitraria, si calcola l'operatore di inerzia e se cercano quindi gli autovettori – il che può essere molto laborioso. Tuttavia, se un sistema rigido continuo ha un asse di simmetria rotazionale  $\mathbf{e}$  (i.e. è invariante per rotazioni intorno all'asse  $\mathbf{e}$ ), allora possiamo determinare *a priori* le direzioni dei suoi assi di inerzia rispetto al centro di massa. Infatti, il sistema continuo si può immaginare come limite di un sistema di  $N$  punti (cfr. il §37.2). Se scegliamo un sistema di coordinate in cui si abbia  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$  e definiamo

$$c_0 := \sum_{i=1}^N m_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2),$$