

Figura 10.10: Assi di inerzia di un cono circolare retto.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 20)

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80} m(4r^2 + h^2), \quad I_3 = \frac{3}{10} mr^2, \quad (45.10)$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse e passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono e_3 è (cfr. l'esercizio 21)

$$I_e = 3m \left(\frac{1}{5} h^2 + \frac{1}{20} r^2 \right).$$

§46 Angoli di Eulero

Consideriamo due sistemi di riferimento κ e K , il primo fisso e il secondo mobile, solidale con un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso di $O \in \kappa$. Scegliamo in κ una terna levogira $\{e_x, e_y, e_z\}$ tale che O sia l'origine nel sistema κ . Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una terna levogira nel sistema mobile, con origine in O e tale che i suoi versori siano orientati lungo gli assi principali di inerzia del sistema rigido. Supponiamo anche che i due assi e_3 ed e_z non coincidano. Poiché i due sistemi di riferimento κ e K hanno la stessa origine, il moto $D_t: K \rightarrow \kappa$ è una rotazione $B_t = B$ (cfr. pag. 383).

Indichiamo con e_N il versore dell'asse $[e_z, e_3]$; poiché e_z ed e_3 non coincidono, il versore e_N è ben definito e appartiene al piano contenente i versori e_x ed e_y .

Per sovrapporre il sistema fisso κ al sistema mobile K si devono compiere tre rotazioni:

1. una rotazione di un angolo φ intorno all'asse e_z , durante la quale e_z rimane fisso ed e_x si sovrappone a e_N ;

2. una rotazione di un angolo θ intorno all'asse e_N , durante la quale e_N rimane fisso ed e_z si sovrappone a e_3 ;
3. una rotazione di un angolo ψ intorno all'asse e_3 , durante la quale e_3 rimane fisso ed e_N si sovrappone a e_1 .

Come risultato delle tre rotazioni, e_x si sovrappone a e_1 ed e_z a e_3 ; di conseguenza e_y si sovrappone a e_2 , essendo ciascuna terna una terna levogira. Si veda la figura 10.11.

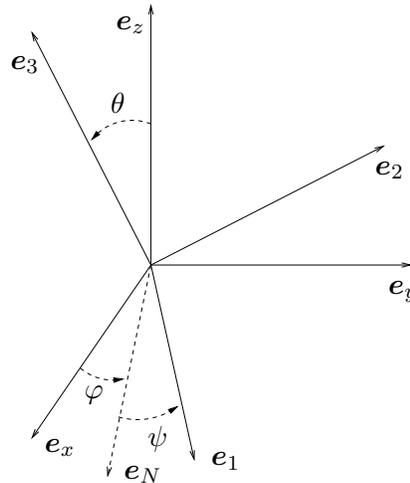


Figura 10.11: Angoli di Eulero.

Indichiamo con $S^3(\varphi)$ la rotazione 1, con $S^1(\theta)$ la rotazione 2 e con $S^3(\psi)$ la rotazione 3; notiamo anche che si ha $\theta \neq 0$, poiché, per ipotesi, gli assi e_3 ed e_z non coincidono.

Gli indici in alto 1 e 3 indicano che si tratta di rotazioni intorno al primo asse e, rispettivamente, al terzo asse di una terna, che è: per $S^3(\varphi)$ la terna $\{e_x, e_y, e_z\}$, per $S^1(\theta)$ la terna ottenuta da $\{e_x, e_y, e_z\}$ attraverso la rotazione $S^3(\varphi)$, e per $S^3(\psi)$ la terna ottenuta dalla precedente attraverso la rotazione $S^1(\theta)$. Questo vuol dire che, sebbene si tratti di rotazioni rispetto a terne diverse, tuttavia le rotazioni con lo stesso indice in alto hanno la stessa forma analitica nelle rispettive terne (cfr. l'osservazione 46.3 più avanti). La rotazione totale è data dalla composizione delle tre rotazioni:

$$S(\varphi, \theta, \psi) := S^3(\psi) \circ S^1(\theta) \circ S^3(\varphi). \quad (46.1)$$

Definizione 46.1 (ANGOLI DI EULERO). *Gli angoli (φ, θ, ψ) introdotti nella costruzione precedente si chiamano angoli di Eulero. Il versore e_N nella direzione $e_z \wedge e_3$ si dice di asse dei nodi e la retta che lo contiene linea dei nodi. L'angolo φ si chiama angolo di precessione (o angolo azimutale o semplicemente azimut), l'angolo θ angolo di nutazione e l'angolo ψ angolo di rotazione propria.*

Osservazione 46.2 Gli angoli di Eulero formano in $SO(3)$ un sistema locale di coordinate, con singolarità ai poli ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) e plurivocità ai meridiani, similmente a quanto accade alle coordinate geografiche. Gli intervalli di variabilità degli angoli di Eulero sono

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad (46.2)$$

e l'applicazione $(\varphi, \theta, \psi) \rightarrow S(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$ definisce una rotazione che trasporta il sistema di riferimento κ nel sistema di riferimento K solidale con il sistema rigido.

Osservazione 46.3 Per costruzione, se si tengono presenti le relazioni (34.15) e (34.17) e l'esercizio 9 del capitolo 8, si ha

$$S^3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\alpha = \varphi$ o $\alpha = \psi$. Allo stesso modo la rotazione intorno al primo asse può essere rappresentata dalla matrice

$$S^1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

con $\beta = \theta$. La matrice che definisce la trasformazione di coordinate è data da

$$B(\varphi, \theta, \psi) = S^T(\varphi, \theta, \psi),$$

dove $S^T(\varphi, \theta, \psi)$ indica la trasposta della matrice (46.1).

Osservazione 46.4 Non tutti i punti del dominio di variabilità degli angoli di Eulero dato dalla (46.2) individuano configurazioni distinte del sistema rigido; per esempio, per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$, i punti $(0, \varphi + \sigma, \psi - \sigma)$ corrispondono tutti alla stessa configurazione.

Dalla (46.1) e dall'osservazione 46.3, ricaviamo che la trasformazione del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \mapsto \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ è data da

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (46.3)$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici di rotazione in (46.3), otteniamo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

che costituiscono le *formule del cambiamento di base dal sistema solidale al sistema fisso*.

Si noti che le matrici colonna, in (46.3) e nell'equazione successiva, devono essere interpretate come matrici 3×3 , di cui ogni riga è costituita dai tre elementi corrispondenti alle componenti del vettore che compare in quella riga (questo vuol dire che le (46.3) definiscono le trasformazioni di tre vettori).

Se indichiamo con $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ la base che otteniamo dalla base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ del sistema fisso κ mediante l'azione della rotazione $S^3(\varphi)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_x \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}'_z \end{pmatrix}, \quad (46.4)$$

abbiamo $\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_N$ ed $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$ per costruzione. Si ottiene quindi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_N \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (46.5)$$

come si può leggere dalla (46.3) e dalla definizione (46.4). Confrontando le formule del cambiamento di base dal sistema solidale al sistema fisso con le (46.5), otteniamo allora le formule che esprimono i versori \mathbf{e}_z ed \mathbf{e}_N come combinazioni lineari dei versori della base del sistema solidale con il sistema rigido, i.e.

$$\mathbf{e}_z = \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \quad (46.6a)$$

$$\mathbf{e}_N = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2, \quad (46.6b)$$

che saranno utili più avanti (cfr. il lemma 46.6).

Osservazione 46.5 Notiamo che se si sceglie l'asse dei nodi \mathbf{e}_N coincidente con il versore \mathbf{e}_1 (questo sarà sempre lecito se il sistema rigido è invariante per rotazioni intorno all'asse \mathbf{e}_3), le formule (46.6) si semplificano in

$$\mathbf{e}_z = \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \quad (46.7a)$$

$$\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_1, \quad (46.7b)$$

poiché $\psi = 0$ in tale caso.

Lemma 46.6 *La velocità angolare di un sistema rigido, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \mathbf{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \mathbf{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{e}_3, \quad (46.8)$$

nel sistema di riferimento K solidale con il sistema rigido.

Dimostrazione. La velocità angolare del moto descritto da $S^3(\varphi)$ è data da $\dot{\varphi}\mathbf{e}_z$, quella del moto descritto da $S^1(\theta)$ è data da $\dot{\theta}\mathbf{e}_N(t)$, e quella del moto descritto da $S^3(\psi)$ è data da $\dot{\psi}\mathbf{e}_3(t)$, dove abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza dal tempo dei versori che si muovono rispetto al sistema fisso κ e abbiamo tenuto conto di come si trasformano le matrici di rotazione cambiando sistema di riferimento.

Se ricordiamo la legge di composizione delle velocità angolari (cfr. il lemma 34.25), abbiamo che la velocità angolare del moto composto è

$$\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_z + \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_N(t) + \dot{\psi}(t)\mathbf{e}_3(t), \quad (46.9)$$

che, utilizzando la (46.6), possiamo esprimere nel sistema di riferimento solidale K con il corpo rigido, ottenendo la (46.8). ■

Corollario 46.7 *L'energia cinetica di un sistema rigido nel sistema di riferimento solidale, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2, \quad (46.10)$$

dove I_1 , I_2 e I_3 sono gli assi principali di inerzia, e si riduce a

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2, \quad (46.11)$$

nel caso di un sistema rigido simmetrico rispetto a rotazioni intorno all'asse \mathbf{e}_3 ($I_1 = I_2$).

Dimostrazione. L'energia cinetica di un sistema rigido, nel sistema di riferimento solidale, è data dalla (44.15), così che, utilizzando l'espressione (46.8) per la velocità angolare, otteniamo la (46.10).

Nel caso di un sistema rigido simmetrico (rispetto a rotazioni intorno all'asse \mathbf{e}_3) l'energia cinetica si ottiene dalla (46.10) ponendo $I_1 = I_2$. Si ottiene così la (46.11). ■

Osservazione 46.8 Alternativamente, nella dimostrazione del corollario 46.7 per $I_1 = I_2$, non volendo usare la formula (46.8) che esprime la velocità angolare nel caso generale, si può semplificare la trattazione come segue. Possiamo assumere, in ogni istante t_0 , senza perdita di generalità, che l'asse dei nodi $\mathbf{e}_N(t_0)$ coincida con l'asse $\mathbf{e}_1(t_0)$ (cfr. l'osservazione 46.5). Nel sistema K le componenti di \mathbf{e}_z all'istante t_0 sono (cfr. la (46.7a))

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta(t_0)\mathbf{e}_3(t_0) + \sin\theta(t_0)\mathbf{e}_2(t_0),$$

e la velocità angolare (46.8) diventa

$$\boldsymbol{\Omega}(t_0) = \dot{\theta}(t_0)\mathbf{e}_1(t_0) + \dot{\varphi}(t_0)\sin\theta(t_0)\mathbf{e}_2(t_0) + (\dot{\varphi}(t_0)\cos\theta(t_0) + \dot{\psi}(t_0))\mathbf{e}_3(t_0).$$

Per ogni t_0 si ha

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad (46.12)$$

pur di scegliere, come detto, $\mathbf{e}_N(t_0) = \mathbf{e}_1(t_0)$. L'energia cinetica (46.10) diventa quindi

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3^2 \Omega_3^2 \right),$$

poiché $I_1 = I_2$, e, utilizzando le (46.12), si ottiene la (46.11).

§47 Equazioni di Eulero

Utilizzando i risultati del §44, studieremo ora in dettaglio il moto del vettore velocità angolare (o equivalentemente del momento angolare) di un sistema rigido con un punto fisso.

Questo non risolve completamente il problema di determinare il moto del sistema rigido (cfr. l'osservazione 47.10 più avanti). Vedremo comunque che le equazioni che descrivono il moto della velocità angolare definiscono un sistema dinamico di per sé interessante.

Teorema 47.1 *Dato un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso O in assenza di forze esterne, si ha*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \wedge \boldsymbol{\Omega}, \quad (47.1)$$

se \mathbf{L} è il momento angolare rispetto a O e $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare del sistema rigido.

Dimostrazione. Utilizzando il lemma 35.2, si ha

$$\dot{\mathbf{i}} = B(\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L}).$$

In assenza di forze esterne si conserva il momento angolare (cfr. la seconda delle (42.11)), così che $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$. Poiché il prodotto vettoriale è antisimmetrico, segue subito la (47.1). ■

Usando il fatto che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, possiamo considerare la (47.1) come un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle variabili $\boldsymbol{\Omega}$. Se $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$ è la decomposizione di $\boldsymbol{\Omega}$ nella base degli assi di inerzia, la (47.1) assume la forma

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2, \end{cases} \quad (47.2)$$

che sono note come *equazioni di Eulero* (per un sistema rigido non sottoposto a forze).