

Per ogni t_0 si ha

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad (46.12)$$

pur di scegliere, come detto, $\mathbf{e}_N(t_0) = \mathbf{e}_1(t_0)$. L'energia cinetica (46.10) diventa quindi

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3^2 \Omega_3^2 \right),$$

poiché $I_1 = I_2$, e, utilizzando le (46.12), si ottiene la (46.11).

§47 Equazioni di Eulero

Utilizzando i risultati del §44, studieremo ora in dettaglio il moto del vettore velocità angolare (o equivalentemente del momento angolare) di un sistema rigido con un punto fisso.

Questo non risolve completamente il problema di determinare il moto del sistema rigido (cfr. l'osservazione 47.10 più avanti). Vedremo comunque che le equazioni che descrivono il moto della velocità angolare definiscono un sistema dinamico di per sé interessante.

Teorema 47.1 *Dato un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso O in assenza di forze esterne, si ha*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \wedge \boldsymbol{\Omega}, \quad (47.1)$$

se \mathbf{L} è il momento angolare rispetto a O e $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare del sistema rigido.

Dimostrazione. Utilizzando il lemma 35.2, si ha

$$\dot{\mathbf{i}} = B(\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L}).$$

In assenza di forze esterne si conserva il momento angolare (cfr. la seconda delle (42.11)), così che $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$. Poiché il prodotto vettoriale è antisimmetrico, segue subito la (47.1). ■

Usando il fatto che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, possiamo considerare la (47.1) come un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle variabili $\boldsymbol{\Omega}$. Se $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$ è la decomposizione di $\boldsymbol{\Omega}$ nella base degli assi di inerzia, la (47.1) assume la forma

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2, \end{cases} \quad (47.2)$$

che sono note come *equazioni di Eulero* (per un sistema rigido non sottoposto a forze).

Osservazione 47.2 Se sul sistema rigido agiscono forze esterne, si ha $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{n}$, dove \mathbf{n} è la somma dei momenti delle forze esterne rispetto al punto O (cfr. il §42). Se $\mathbf{n} = B\mathbf{N}$, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}$$

in luogo della (47.1), così che, per componenti, possiamo scrivere

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + N_1, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 + N_2, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + N_3, \end{cases}$$

che sono le equazioni di Eulero nel caso generale.

Teorema 47.3 *Le equazioni di Eulero (47.2) ammettono due integrali primi quadratici*

$$2E = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = \mathbf{L} \cdot I^{-1} \mathbf{L}, \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}, \quad (47.3)$$

dove $E = T$ è l'energia cinetica e L è il modulo del momento angolare \mathbf{L} . I due integrali primi sono indipendenti purché $I \neq c\mathbb{1}$, per ogni costante c .

Dimostrazione. Utilizzando le (47.2) e ricordando che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, si trova

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \Omega_1 (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + \Omega_2 (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 + \Omega_3 (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 \\ &= (I_2 - I_3 + I_3 - I_1 + I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = 0, \\ L\dot{L} &= L_1 \dot{L}_1 + L_2 \dot{L}_2 + L_3 \dot{L}_3 \\ &= I_1 \Omega_1 (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + I_2 \Omega_2 (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 + I_3 \Omega_3 (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 \\ &= (I_1 I_2 - I_1 I_3 + I_2 I_3 - I_2 I_1 + I_3 I_1 - I_3 I_2) \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = 0, \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che E ed L sono costanti del moto. ■

Definizione 47.4 (ROTAZIONE STAZIONARIA) *Il moto di un sistema rigido, durante il quale la velocità angolare rimane costante, si chiama rotazione stazionaria.*

Osservazione 47.5 Le equazioni (47.2) descrivono un sistema dinamico in \mathbb{R}^3 ; le rotazioni stazionarie di un sistema rigido costituiscono quindi i punti di equilibrio del sistema dinamico (47.2), i.e. i punti in cui si annulla il corrispondente campo vettoriale.

Teorema 47.6 *Un sistema rigido vincolato a un punto ammette una rotazione stazionaria intorno a uno qualsiasi dei suoi tre assi di inerzia.*

Dimostrazione. Dal teorema 47.3 segue che \mathbf{L} deve giacere sull'intersezione della superficie dell'ellissoide $\mathbf{L} \cdot I^{-1}\mathbf{L} = 2E = 2T$ con la superficie della sfera $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L^2$. Le traiettorie del sistema si svolgono sulle curve di intersezione. Fissiamo l'ellissoide (i.e. il valore di E) e facciamo variare il raggio della sfera (i.e. $L = |\mathbf{L}|$), per studiare i possibili casi che si presentano.

1. Supponiamo inizialmente che sia

$$I_1 < I_2 < I_3, \quad (47.4)$$

così che i semiassi dell'ellissoide sono $\sqrt{2EI_1} < \sqrt{2EI_2} < \sqrt{2EI_3}$ (cfr. la figura 10.12).

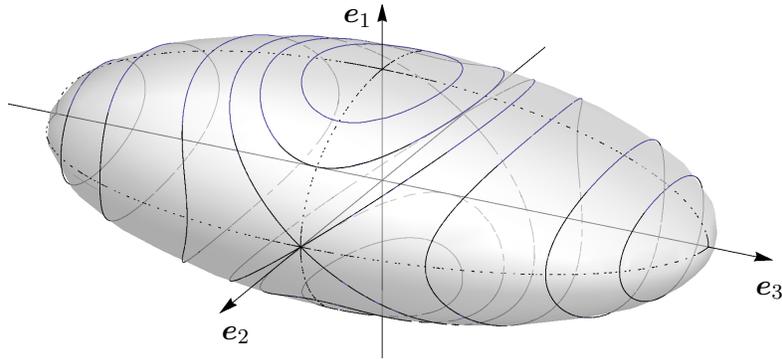


Figura 10.12: Discussione del teorema 47.6: caso $I_1 < I_2 < I_3$.

Se il raggio L della sfera è uguale alla lunghezza del semiasse più grande, l'intersezione consiste in due punti antipodali $(0, 0, \pm\sqrt{2EI_3})$. Diminuendo il valore del raggio ($\sqrt{2EI_3} > L > \sqrt{2EI_2}$), si ottengono due curve chiuse intorno agli estremi del semiasse più grande (cfr. l'esercizio 22 e la figura 10.13).

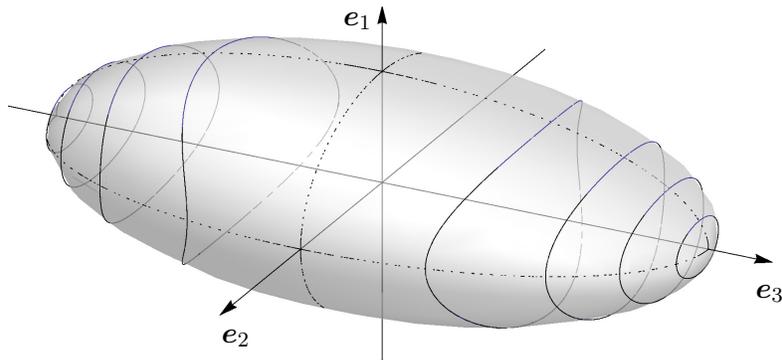


Figura 10.13: Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_3}$.

Allo stesso modo se il raggio L della sfera è uguale alla lunghezza del semiasse più piccolo, l'intersezione consiste in due punti antipodali $(\pm\sqrt{2EI_1}, 0, 0)$. Aumentando il valore del raggio ($\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$), si ottengono due curve chiuse intorno agli estremi del semiasse più piccolo (cfr. l'esercizio 23 e la figura 10.14).

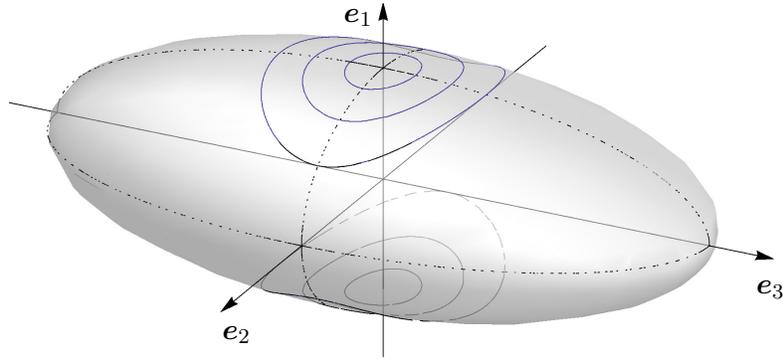


Figura 10.14: Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$.

Se $L = \sqrt{2EI_2}$ l'intersezione consiste in due curve chiuse che hanno in comune gli estremi del semiasse intermedio dell'ellissoide, i.e. i due punti antipodali $(0, \pm\sqrt{2EI_2}, 0)$.

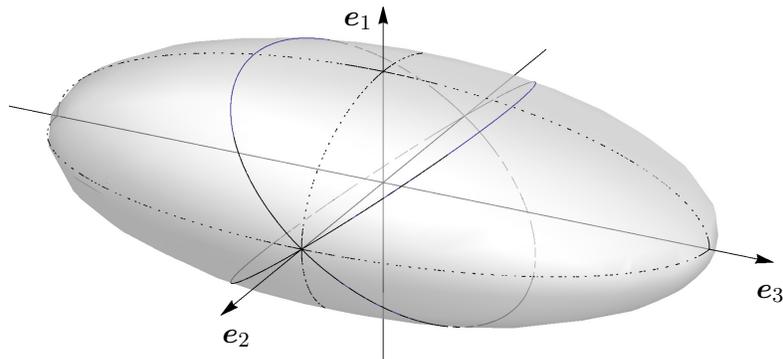


Figura 10.15: Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $L = \sqrt{2EI_2}$.

È facile vedere che le due curve sono delle circonferenze. Infatti, se $L = \sqrt{2EI_2}$, moltiplicando la prima delle (47.3) per I_2 e considerandone la differenza con la seconda otteniamo

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1} L_1^2 = \frac{I_3 - I_2}{I_3} L_3^2 \quad (47.5)$$

che è l'equazione di due piani, che intersecano il piano $L_2 = 0$ lungo le rette

$$L_1 = \pm \sqrt{\frac{I_1}{I_3} \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}} L_3.$$

I piani (47.5) passano per il centro della sfera: intersecano pertanto la superficie della sfera lungo due cerchi di raggio massimo (cfr. l'esercizio 25 e la figura 10.15).

Ognuno dei 6 estremi dei semiassi rappresenta una singola traiettoria del sistema di equazioni (47.2) e precisamente un punto di equilibrio (la loro stabilità sarà discussa nel teorema 47.8). Ad esso corrisponde un valore costante del momento angolare, che rimane diretto lungo uno degli assi di inerzia per tutto il tempo. Inoltre \mathbf{L} risulta parallelo a $\boldsymbol{\Omega}$. Infatti, se $\mathbf{L} = L_j \mathbf{e}_j$, si ha $L_j \mathbf{e}_j = \mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega} = I(\Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3) = I_1 \Omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \Omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3$, così che $I_j \Omega_j = L_j$ e $\Omega_i = 0$ per $i \neq j$, i.e. $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_j$. Inoltre, poiché \mathbf{L} è costante, anche $\boldsymbol{\Omega}$ è costante. Per definizione di velocità angolare, si ha $\dot{B}B^{-1} = A_\omega$ (cfr. l'osservazione 34.10). D'altra parte $A_\omega = BA_\Omega B^{-1}$, così che $\dot{B} = BA_\Omega$. Se si assume $B = \mathbf{1}$ per $t = 0$ (come si può fare senza perdita di generalità), si ottiene $B = \exp[tA_\Omega]$, dato che A_Ω è costante, così che $A_\omega = \dot{B}B^{-1} = A_\Omega$, ovvero $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0)$ per ogni t . Poiché \mathbf{l} e $\boldsymbol{\omega}$ sono entrambi costanti e $\mathbf{l} = B\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$, con $\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}$ collineari, anche il vettore \mathbf{l} rimane collineare a $\boldsymbol{\omega}$ nello spazio κ : il sistema rigido ruota con velocità angolare uniforme intorno a uno degli assi di inerzia \mathbf{e}_j . Si ha perciò una rotazione stazionaria (cfr. la definizione 47.4).

2. Supponiamo ora che due autovalori di I coincidano, per esempio $I_1 = I_2 < I_3$ (il caso $I_1 < I_2 = I_3$ si discute allo stesso modo). Si veda la figura 10.16.

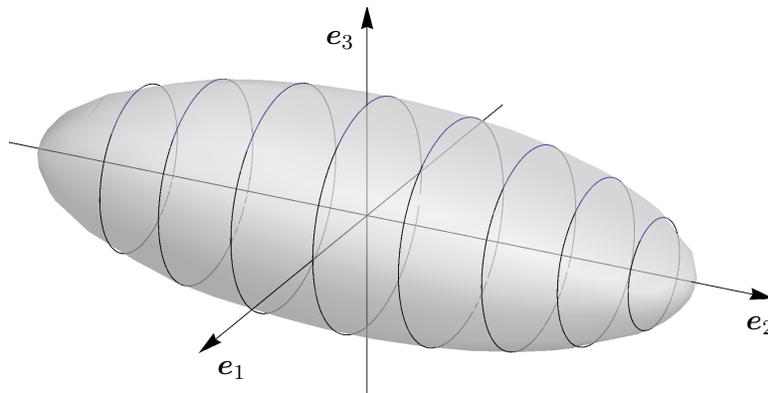


Figura 10.16: Discussione del teorema 47.6: caso $I_1 = I_2 < I_3$.

Per $L = \sqrt{2EI_1} = \sqrt{2EI_2}$, l'intersezione dell'ellissoide con la sfera è una circonferenza γ_0 costituita interamente da punti di equilibrio per il moto di $\boldsymbol{\Omega}$ (cfr. le (47.2): se

$I_1 = I_2$ ogni $\boldsymbol{\Omega}$ con $\Omega_3 = 0$ è un punto di equilibrio). Si tratta di punti di equilibrio instabili. Infatti per $L \approx \sqrt{2EI_1}$, l'intersezione è una curva γ di raggio finito, che, per $L \rightarrow \sqrt{2EI_1}$, tende a γ_0 . Tuttavia la curva γ non contiene punti di equilibrio e quindi il moto corrispondente è periodico. È facile vedere che per ogni valore $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_3}$ l'intersezione dell'ellissoide con la sfera definisce due circonferenze contenute in due piani ortogonali all'asse \mathbf{e}_3 ed equidistanti dal piano (L_1, L_2) (cfr. l'esercizio 26). Se $L = \sqrt{2EI_3}$, si ha un punto di equilibrio stabile. La trattazione è identica a quella fatta al punto 1, e, in particolare, la stabilità potrà essere discussa come nel teorema 47.8 più avanti.

3. Se infine $I_1 = I_2 = I_3$, anche l'ellissoide in (47.3) è in realtà una sfera, e le due sfere o non hanno intersezione o si sovrappongono ($2EI_1^2 = L^2$). In quest'ultimo caso si ha identicamente $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$, i.e. $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0)$ per ogni $\boldsymbol{\Omega}(0)$ (cfr. le (47.2)): sono possibili solo rotazioni stazionarie stabili.

Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione 47.7 Se i momenti principali di inerzia sono tutti distinti (cfr. la (47.4)), i membri di destra delle equazioni di Eulero non si annullano mai se non quando sono nulle almeno due componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$, e quindi non sono possibili altre rotazioni stazionarie oltre a quelle intorno agli assi di inerzia. Se due momenti principali di inerzia sono uguali, per esempio $I_1 = I_2$, sono possibili rotazioni stazionarie, che sono instabili (cfr. il caso 2 della dimostrazione del teorema 47.6) intorno a qualsiasi asse che giaccia nel piano individuato dagli assi di inerzia \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 (che può essere scelto come asse di inerzia). Infine, nel caso in cui tutti i momenti principali di inerzia coincidano (cfr. il caso 3), ogni asse passante per il centro della sfera è un asse di inerzia, e le rotazioni stazionarie intorno a esso sono stabili. In conclusione, avremo rotazioni stazionarie solo intorno ad assi che sono (o comunque possono essere scelti come) assi di inerzia.

Teorema 47.8 *Nel caso in cui i momenti principali di inerzia siano tutti distinti, le soluzioni stazionarie delle equazioni di Eulero che corrispondono a rotazioni intorno agli assi di inerzia minore o maggiore ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1$ e $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_3 \mathbf{e}_3$) sono stabili, mentre la soluzione stazionaria che corrisponde alla rotazione intorno all'asse di inerzia intermedio ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega_2 \mathbf{e}_2$) è instabile.*

Dimostrazione. Segue dalla discussione della dimostrazione del teorema 47.6, come ora mostriamo. Si noti innanzitutto che per valori $L \neq \sqrt{2EI_j}$, per ogni $j = 1, 2, 3$, le curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera sono curve chiuse, lungo le quali il campo vettoriale non si annulla mai. Le traiettorie che si svolgono su tali curve sono quindi periodiche. Per L vicino a $\sqrt{2EI_1}$ (o L vicino a $\sqrt{2EI_3}$) l'intersezione dell'ellissoide con la sfera consiste in due curve di diametro piccolo che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) il punto di equilibrio $L = \sqrt{2EI_1}$ (o $L = \sqrt{2EI_3}$), e il diametro tende a zero quando i dati iniziali tendono al punto di equilibrio.

Al contrario, per $L = \sqrt{2EI_2}$, i punti di equilibrio dividono le due curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera in quattro archi su cui si svolgono moti asintotici (per il teorema di unicità delle soluzioni). E per dati iniziali vicino ai punti di equilibrio corrispondenti a $L = \sqrt{2EI_2}$ si hanno sia orbite chiuse che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) un punto di equilibrio $L = \sqrt{2EI_1}$ sia orbite chiuse che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) un punto di equilibrio $L = \sqrt{2EI_3}$. Quindi i punti di equilibrio che corrispondono $L = \sqrt{2EI_2}$ sono punti di equilibrio instabili.

Alternativamente si può considerare la linearizzazione del sistema dinamico (47.2) intorno alle posizioni di equilibrio che corrispondono a $L = \sqrt{2EI_2}$, i.e. nell'intorno dei due punti d'equilibrio $\Omega = (0, \pm\sqrt{2E/I_2}, 0)$ e verificare che gli autovalori della matrice corrispondente sono (cfr. l'esercizio 27)

$$0, \quad \pm\sqrt{\frac{2E(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_2^2 I_3}}, \quad (47.6)$$

così che uno di essi è positivo e possiamo applicare il teorema 18.7. ■

Esempio 47.9 Immaginiamo di lanciare in aria un libro imprimendogli una rotazione iniziale intorno a un asse. Ovviamente il libro è soggetto anche alla forza di gravità; si può tuttavia assumere che essa non alteri in maniera apprezzabile il moto rotatorio del libro ma ne determini solo la caduta verso il basso. Altrettanto ovvio è che un libro che sia lasciato cadere non ha punto fissi. Tuttavia i risultati precedenti valgono anche se il sistema rigido non ha un punto fisso ma si descrive il moto nel sistema di riferimento solidale con il sistema rigido che abbia l'origine nel suo centro di massa. In tale sistema di riferimento, se si trascurano gli effetti della forza di gravità, il moto è descritto dalle equazioni di Eulero (47.2). Se si imprime al libro una rotazione o intorno all'asse perpendicolare alla copertina o intorno all'asse parallelo al lato più lungo della copertina, esso cade ruotando in maniera (approssimativamente) uniforme intorno allo stesso asse. Se invece lo si lancia imprimendogli una rotazione intorno all'asse parallelo al lato più corto della copertina, tende a cadere compiendo un moto irregolare.

Osservazione 47.10 Le traiettorie $(B_t, \Omega(t))$ del sistema rigido che corrispondono alle rotazioni stazionarie intorno agli assi di inerzia non sono stabili. Per verificare tale asserzione, è sufficiente considerare le rotazioni stazionarie intorno agli assi di inerzia maggiore e minore (intorno alle quali il moto di $\Omega(t)$ è stabile), nel caso in cui i momenti principali di inerzia sono tutti distinti. Il moto è determinato da $(B_0, \Omega(0))$, i.e. dalla configurazione e dalla velocità iniziali. Senza perdita di generalità possiamo supporre $B_0 = \mathbb{1}$. Sia $\{\Omega_n(0)\}$ una successione tale che $\Omega_n(0) \rightarrow \Omega(0) = \Omega_0$, dove Ω_0 è un punto di equilibrio $\Omega_0 = \Omega_1 e_1$ o $\Omega_0 = \Omega_3 e_3$ per le equazioni di Eulero (47.2). In generale si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |B_t(\mathbb{1}, \Omega_n(0)) - B_t(\mathbb{1}, \Omega_0)| \neq 0,$$

i.e. piccole variazioni della velocità angolare iniziale producono, in un tempo sufficientemente lungo, un completo sfasamento dei punti rappresentativi sulle orbite. Una dimostrazione più

formale si vedrà come conseguenza del teorema 50.4 più avanti: il moto può essere caratterizzato da due frequenze, che in generale non sono commensurabili, così che il moto non è in generale periodico. Al contrario, si ha uno sfasamento progressivo, con conseguente instabilità delle traiettorie.

Teorema 47.11 *Se due momenti di inerzia principali sono uguali, ogni soluzione delle equazioni di Eulero la cui orbita non contiene punti di equilibrio è periodica.*

Dimostrazione. Il teorema segue direttamente dalla discussione fatta per dimostrare il teorema 47.6, nel caso $I_1 = I_2 < I_3$. Una deduzione equivalente si può fare analiticamente studiando direttamente le equazioni (47.2). Se $I_1 = I_2$, si vede subito dalla terza equazione in (47.2) che deve essere

$$\Omega_3(t) = \Omega_3(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (47.7)$$

così che

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -\alpha \Omega_2, \\ \dot{\Omega}_2 = \alpha \Omega_1, \end{cases} \quad (47.8)$$

dove $\alpha := (I_3 - I_1)\Omega_3(0)/I_1$. Quindi la proiezione di $\boldsymbol{\Omega}(t)$ lungo l'asse \mathbf{e}_3 è costante, mentre la proiezione $\boldsymbol{\Omega}_p(t) := \Omega_1(t)\mathbf{e}_1 + \Omega_2(t)\mathbf{e}_2$ sul piano perpendicolare all'asse \mathbf{e}_3 si muove di moto rotatorio uniforme con velocità angolare α (cfr. la figura 10.17).

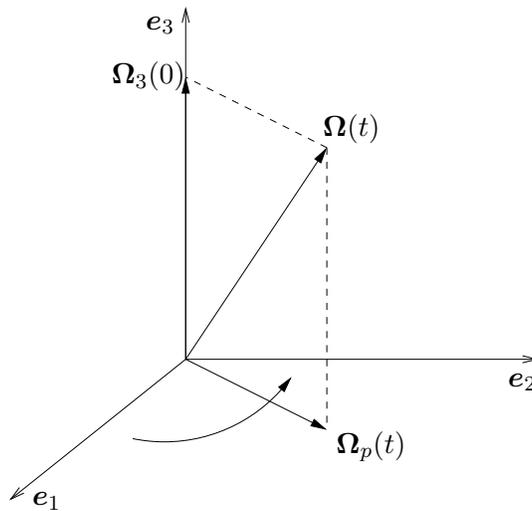


Figura 10.17: Discussione del teorema 47.11 nel caso $I_1 = I_2 < I_3$.

Infatti, introducendo il vettore costante $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{e}_z = (0, 0, \alpha)$, possiamo riscrivere le (47.8) nella forma $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\Omega}$, che mostra che $\boldsymbol{\Omega}$ ruota uniformemente intorno all'asse \mathbf{e}_3 , con velocità

angolare costante α . In particolare

$$\Omega_p^2(t) := |\boldsymbol{\Omega}_p(t)|^2 = \Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t)$$

è costante; infatti si ha

$$|\mathbf{L}|^2 = I_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3^2 \Omega_3^2 = I_1^2 \Omega_p^2 + I_3 \Omega_3^2$$

e poiché $|\mathbf{L}|$ e Ω_3 sono costanti, deve essere costante anche Ω_p . Perciò anche $|\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 = \Omega_p^2(t) + \Omega_3^2(t)$ è costante. ■

§48 Descrizione del moto secondo Poinsot

Nel presente paragrafo studieremo la *descrizione secondo Poinsot* del moto di un sistema rigido non sottoposto a forze. Notiamo che ci si può sempre ridurre al caso di un sistema rigido con un punto fisso: se il sistema è libero se ne può descrivere il moto nel sistema di riferimento (inerziale) in cui il centro di massa è fisso. La descrizione secondo Poinsot è una descrizione geometrica molto suggestiva, ma in fondo meno fondamentale di quella che verrà data nel paragrafo successivo; infatti mentre l'approccio che verrà seguito nella discussione analitica di §50 si presta a un'estensione al caso in cui il sistema rigido sia sottoposto a forze, mediante l'utilizzazione del formalismo lagrangiano (cfr. il capitolo 15), la descrizione secondo Poinsot non può essere generalizzata a tale caso, per lo meno non in modo altrettanto costruttivo.

Si ricordi la definizione di ellissoide di inerzia (definizione 44.12). In ogni istante t , l'ellissoide di inerzia \mathcal{E} occupa nello spazio κ la posizione $\mathcal{E}_t = B_t \mathcal{E}$, tale che

$$\mathcal{E}_t = \{\boldsymbol{\omega} : \langle \boldsymbol{\omega}, i(t)\boldsymbol{\omega} \rangle = 1\}. \quad (48.1)$$

Si noti che l'ellissoide \mathcal{E}_t si muove solidalmente con il sistema rigido. Infatti, se $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_t$, allora $\boldsymbol{\omega} = B_t \boldsymbol{\Omega}$, con $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{E}$.

Lemma 48.1 *Nel moto di un sistema rigido con un punto fisso, se $\boldsymbol{\omega}(t)$ è la velocità angolare del sistema rigido, si ha $\boldsymbol{\omega}(t)/\sqrt{2T} \in \mathcal{E}_t$.*

Dimostrazione. Poiché $2T = \langle \boldsymbol{\omega}(t), i(t)\boldsymbol{\omega}(t) \rangle$, l'asserto segue immediatamente dalla (48.1). ■

Lemma 48.2 *Se $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_t$, la normale a \mathcal{E}_t nel punto $\boldsymbol{\omega}$ è parallela al vettore $i(t)\boldsymbol{\omega}$.*

Dimostrazione. La normale a \mathcal{E}_t in un punto $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione data da $\nabla \langle \boldsymbol{\omega}, i(t)\boldsymbol{\omega} \rangle = 2i(t)\boldsymbol{\omega}$ (cfr. anche l'osservazione 44.14). ■

Teorema 48.3 (TEOREMA DI POINSOT) *L'ellissoide di inerzia \mathcal{E}_t rotola senza strisciare su un piano fisso π_0 ortogonale al vettore momento angolare.*