

di primavera. L'intersezione con la semiretta opposta costituisce l'equinozio di autunno. La retta  $N$  si dice *linea degli equinozi*. Risulta allora dalla (49.4) che tale linea ruota sul piano dell'eclittica con velocità angolare  $\dot{\varphi} = \nu$ , che, in conformità con la (49.6), è lentissima e diventa apprezzabile solo su intervalli di tempo lunghi (dell'ordine di secoli o millenni). Poiché  $\nu < 0$  (cfr. di nuovo la (49.6)), la rotazione corrispondente è in senso orario sul piano dell'eclittica e dà luogo a un anticipo degli equinozi a cui si dà il nome di *precessione degli equinozi*. In conseguenza di tale precessione ogni 13.000 anni circa, i.e. mezzo anno platonico (cfr. l'esempio 49.5) si verifica un totale capovolgimento delle condizioni di temperatura caratteristiche delle singole stagioni.

## §50 Integrabilità di un sistema rigido con un punto fisso

Nel presente paragrafo diamo una differente soluzione al problema di determinare il moto di un sistema rigido con un punto fisso non soggetto a forze, facendo vedere anche, come conseguenza della dimostrazione, che tale sistema costituisce un sistema integrabile, nel senso seguente.

Ricordiamo che si definisce costante del moto – o integrale primo – di un sistema dinamico una quantità che rimane costante lungo le sue traiettorie (cfr. la definizione a pag. 167). Ricordiamo anche (cfr. per esempio pag. 237) che  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  indica l'insieme dei numeri reali definiti modulo  $2\pi$  (i.e. due numeri  $x, y$  tali che  $y = x + 2\pi n$  per qualche  $n \in \mathbb{Z}$  sono identificati tra loro);  $\mathbb{T}$  prende il nome di *toro unidimensionale* (o semplicemente *toro* o anche *circonferenza*) ed è indicato spesso anche con il simbolo  $S^1$ . Il prodotto cartesiano  $\mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$  di  $n$  tori unidimensionali definisce il *toro  $n$ -dimensionale*.

**Definizione 50.1** *Sia  $\mathcal{S}$  lo spazio dei dati iniziali di un sistema meccanico a  $n$  gradi di libertà sottoposto a forze conservative e vincoli ideali, e siano  $(x, \dot{x})$  le coordinate con cui si scrive il moto del sistema. Diremo che il sistema è integrabile nell'insieme aperto  $W \subset \mathcal{S}$  se in  $W$  è possibile definire  $n$  integrali primi  $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $n$  funzioni regolari  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n$ , tali che*

1. *la trasformazione*

$$(x, \dot{x}) \mapsto (\varphi, A)$$

*è una trasformazione regolare e invertibile tra  $W$  e  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ,*

2. *esistono  $n$  funzioni  $\omega(A) = (\omega_1(A), \dots, \omega_n(A))$ , che prendono il nome di frequenze, tali che, nelle variabili  $(\varphi, A)$  il moto è descritto dalla legge oraria*

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(A_0)t, \quad A(t) = A_0,$$

*dove  $(\varphi_0, A_0)$  dipendono dai dati iniziali  $(x_0, \dot{x}_0)$  per le coordinate  $(x, \dot{x})$ .*

Se un sistema a  $n$  gradi di libertà è integrabile, diciamo che il moto è *quasiperiodico* con  $n$  periodi. Se le componenti del vettore  $\omega(A)$  sono razionalmente indipendenti (i.e. se non esiste alcuna combinazione lineare a coefficienti interi che sia nulla) il moto quasiperiodico ha  $n$  periodi incommensurabili  $T_1 = 2\pi/\omega_1(A), \dots, T_n = 2\pi/\omega_n(A)$ . Se invece le componenti sono razionalmente dipendenti (per esempio alcune di esse possono essere nulle), esistono  $q < n$  componenti  $\omega_{i_1}(A), \dots, \omega_{i_q}(A)$ , con  $\{i_1, \dots, i_q\} \subset \{1, \dots, n\}$ , in termini delle quali si possono scrivere le restanti  $n - q$  frequenze: diciamo in tal caso che il moto ha  $q$  *periodi fondamentali*  $T_{i_1} = 2\pi/\omega_{i_1}(A), \dots, T_{i_q} = 2\pi/\omega_{i_q}(A)$ . Nel caso particolare in cui sia  $q = 1$  il moto è periodico.

**Osservazione 50.2** Usualmente in fisica si definisce “frequenza” l’inverso  $\nu$  del periodo  $T$  di un moto periodico, i.e.  $\nu = 1/T$ , e si chiama invece “pulsazione” (o “frequenza angolare”) la quantità  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ . Noi, per evitare il proliferare di definizioni ridondanti, ci discosteremo da tale consuetudine introducendo una sola nozione e chiameremo  $\omega$  frequenza.

**Teorema 50.3** *Un sistema rigido con un punto fisso, il cui ellissoide di inerzia sia un ellissoide di rotazione ( $I_1 = I_2$ ), in assenza di forza esterne, costituisce un esempio di sistema integrabile nella regione dei dati iniziali in cui  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ . Il moto è quasiperiodico con due periodi  $T_1 = 2\pi/\omega_\varphi$  e  $T_2 = 2\pi/\omega_\psi$ , dove  $\omega_\varphi$  e  $\omega_\psi$  sono due costanti che dipendono dai dati iniziali.*

*Dimostrazione.* Poiché il momento angolare è un integrale primo, possiamo scegliere una terna di riferimento nel sistema fisso  $\kappa$  tale che  $\mathbf{l}$  sia parallelo all’asse  $\mathbf{e}_z$ , in modo che si abbia

$$\mathbf{l} = (0, 0, l_z), \quad l_z > 0 \quad (50.1)$$

(il caso  $l_z = 0$  corrisponde a un sistema rigido in quiete). In termini degli angoli di Eulero, le formule del cambiamento di base dal sistema solidale al sistema fisso del §46 danno, scrivendo  $l_z \mathbf{e}_z = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{BL}$ ,

$$L_1 = I_1 \Omega_1 = l_z \sin \theta \sin \psi, \quad (50.2a)$$

$$L_2 = I_1 \Omega_2 = l_z \sin \theta \cos \psi, \quad (50.2b)$$

$$L_3 = I_3 \Omega_3 = l_z \cos \theta, \quad (50.2c)$$

dove  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  è data da (cfr. l’esercizio 28)

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (50.3a)$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (50.3b)$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad (50.3c)$$

e  $\mathbf{L}$  ha modulo  $L := |\mathbf{L}| = l_z$ . Se  $I_1 = I_2$  abbiamo dalla (47.7) che  $\Omega_3$  è costante, quindi possiamo concludere che le due quantità

$$l_z^2 = I_1^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + I_3^2 \Omega_3^2, \quad L_3 = I_3 \dot{\varphi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi}, \quad (50.4)$$

sono costanti del moto.

Consideriamo dunque insieme le equazioni (50.2) e (50.4), tenendo conto delle relazioni (50.3). Si tratta di un numero ridondante di equazioni (sono 5 equazioni in 3 incognite), tuttavia in questo modo è immediato determinare la soluzione del moto  $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$  in termini dei dati iniziali  $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$  e  $(\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0)$ .

La seconda delle (50.4) e la (50.2c) implicano che  $\cos \theta$  è costante; quindi

$$\theta(t) = \theta_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (50.5)$$

Sostituendo la (50.5) nella prima delle (50.4) troviamo che anche  $\dot{\varphi}$  è costante; quindi

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (50.6)$$

Le (50.5), (50.6) e la seconda delle (50.4) implicano che anche  $\dot{\psi}$  è costante, così che

$$\psi(t) = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo allora scegliere come integrali primi l'angolo  $\delta$  che il momento angolare forma con l'asse verticale (angolo che abbiamo fissato a zero nel sistema di riferimento scelto) e le due frequenze  $\dot{\varphi}_0$  e  $\dot{\psi}_0$ . Come angoli scegliamo  $(\gamma, \varphi, \psi)$ , dove  $\gamma$  è l'angolo che un versore prefissato ortogonale a  $\mathbf{l}$  forma con  $\mathbf{e}_x$  (ed è quindi costante). Da qui segue l'asserto, con  $\omega_\varphi = \dot{\varphi}_0$  e  $\omega_\psi = \dot{\psi}_0$ . ■

**Teorema 50.4** *Si consideri un sistema rigido non soggetto a forze e con un punto fisso, il cui ellissoide di inerzia sia tale che  $I_1 < I_2 < I_3$ . Sia  $V(x)$  la funzione*

$$V(x) = -\frac{[(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2)I_2x^2][(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1)I_2x^2]}{I_1I_2^2I_3}, \quad (50.7)$$

dove  $E$  è l'energia del sistema rigido e  $L := |\mathbf{L}|$ , se  $\mathbf{L}$  è il suo momento angolare. Siano  $\pm a_1, \pm a_2$  le radici di  $V(x)$ . Il sistema rigido considerato costituisce un esempio di sistema integrabile nella regione dei dati iniziali con  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  e  $a_1 \neq a_2$ . Il moto è quasiperiodico con due periodi

$$T_1 = 2 \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}}, \quad (50.8a)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{L} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}} \left[ \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}} \left( \frac{(2EI_3 - L^2) - (I_1 - I_2)I_2x^2}{I_1(2EI_3 - L^2) - I_2I_3(I_1 - I_2)x^2} \right) \right]^{-1}, \quad (50.8b)$$

dove  $\alpha_\pm$  sono le due radici più piccole in modulo di  $V(x)$ , i.e.  $\alpha_+ = \min\{a_1, a_2\}$  e  $\alpha_- = -\alpha_+$ .

*Dimostrazione.* Le equazioni (47.3), scrivendo  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$ , permettono di esprimere due delle tre componenti di  $\boldsymbol{\Omega}$  in termini della terza, per esempio

$$\Omega_1 = \pm \sqrt{\frac{(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2)I_2\Omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)}}, \quad (50.9a)$$

$$\Omega_3 = \pm \sqrt{\frac{(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1)I_2\Omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)}}. \quad (50.9b)$$

Utilizzando la seconda delle equazioni di Eulero (47.2), con  $\Omega_1$  e  $\Omega_3$  espresse in termini di  $\Omega_2$  secondo le (50.9), troviamo un'equazione chiusa per  $\Omega_2$ :

$$\dot{\Omega}_2 = \pm \sqrt{\frac{[(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2)I_2\Omega_2^2][(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1)I_2\Omega_2^2]}{I_1 I_2^2 I_3}}. \quad (50.10)$$

La discussione del segno in (50.10) si effettua come usuale nei sistemi unidimensionali (cfr. il capitolo 6): inizialmente  $\Omega_2$  ha un segno che conserva finché non diventa nullo, poi il segno cambia fino al successivo tempo in cui si annulla, e così via, con alternanza.

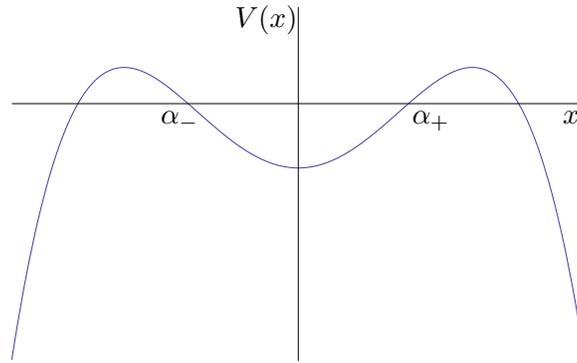


Figura 10.23: Grafico della funzione  $V(x)$  data dalla (50.7).

La (50.10) si può interpretare come legge del moto di un sistema unidimensionale di massa  $m = 2$ , energia totale nulla ed energia potenziale  $V(\Omega_2)$  data dalla (50.7) (cfr. la figura 10.23 per il grafico di  $V$ ), i.e.

$$2\ddot{\Omega}_2 = -\frac{dV(\Omega_2)}{d\Omega_2}, \quad \dot{\Omega}_2^2 + V(\Omega_2) = 0. \quad (50.11)$$

Possiamo dunque concludere che  $t \mapsto \Omega_2(t)$  è una funzione periodica di  $t$  che oscilla tra due valori  $\alpha_-$  e  $\alpha_+$  che sono gli estremi del più piccolo dei due intervalli  $(-a_1, a_1)$  e  $(-a_2, a_2)$ , se

$\pm a_1$  e  $\pm a_2$  sono le radici di  $V(x) = 0$ , i.e.

$$a_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_2(I_2 - I_1)}},$$

purché sia  $a_1 \neq a_2$ , altrimenti  $V(x) = 0$  ha solo due soluzioni  $\pm a$ , con  $[dV/dx](\pm a) = 0$ , e il moto risultante sarà non periodico (più precisamente sarà asintotico). Il periodo del moto  $t \mapsto \Omega_2$  è allora dato da  $T_1$ , come definito dalla prima delle (50.8). Nel piano  $(\Omega_2, \dot{\Omega}_2)$  l'orbita corrispondente è rappresentata nella figura 10.24.

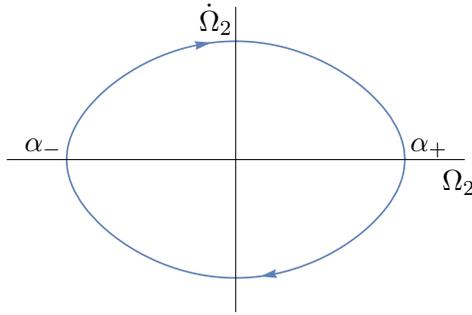


Figura 10.24: Orbita della traiettoria periodica  $t \mapsto \Omega_2(t)$ .

Se definiamo  $t \mapsto \Omega(t)$  la soluzione di (50.11) con dati iniziali  $(\Omega(0), \dot{\Omega}) = (\alpha_-, 0)$ , allora

$$\Omega_2(t) = \Omega(t + t_0), \quad (50.12)$$

dove  $t_0$  è il tempo (minimo) necessario perché la soluzione  $(\Omega(t), \dot{\Omega}(t))$  raggiunga il “dato iniziale”  $(\Omega_2(0), \dot{\Omega}_2(0))$ , i.e.

$$t_0 = \int_{\alpha_-}^{\Omega_2(0)} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}}.$$

Inoltre, per  $0 \leq t \leq T_1$ , si ha

$$t = \int_{\alpha_-}^{\Omega(t)} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}},$$

che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra  $t$  e  $\Omega = \Omega(t)$ .

Per determinare la configurazione del sistema rigido abbiamo bisogno di tre parametri: possiamo scegliere come coordinate gli angoli di Eulero. Se scegliamo la terna di riferimento in  $\kappa$  in modo tale che  $\mathbf{l}$  risulti parallelo all'asse  $\mathbf{e}_z$  (cfr. la (50.1)) e risulti di conseguenza  $L = |\mathbf{L}| = |\mathbf{l}| = l_z$ , si ha

$$I_1\Omega_1 = L \sin \theta \sin \psi, \quad I_2\Omega_2 = L \sin \theta \cos \psi, \quad I_3\Omega_3 = L \cos \theta, \quad (50.13)$$

e quindi

$$\theta(t) = \arccos \frac{I_3 \Omega_3(t)}{L}, \quad \psi(t) = \arctan \frac{I_1 \Omega_1(t)}{I_2 \Omega_2(t)},$$

dove la determinazione dell'arcotangente è scelta in maniera tale che  $t \mapsto \psi(t)$  sia continua.

In virtù delle (50.9), sia  $\theta$  che  $\psi$  sono espresse in termini di  $\Omega_2(t)$ ; resta da determinare la dipendenza dal tempo dell'angolo  $\varphi$ . Dalle (50.3a) e (50.3b), per eliminazione di  $\dot{\theta}$ , si deduce

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi}{\sin \theta} = L \frac{I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2}, \quad (50.14)$$

dove la seconda relazione è stata ottenuta dalla prima utilizzando il fatto che

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{I_1 \Omega_1}{L \sin^2 \theta}, \quad \frac{\cos \psi}{\sin \theta} = \frac{I_2 \Omega_2}{L \sin^2 \theta}, \quad \sin^2 \theta = \frac{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2}{L^2},$$

come segue dalle prime due equazioni in (50.13). Poiché  $t \mapsto \Omega_2(t)$  è periodica di periodo  $T_1$ , e  $\Omega_1(t)$  dipende da  $t$  attraverso  $\Omega_2$  (cfr. la (50.14)), il membro di destra di (50.14) è una funzione periodica di periodo  $T_1$ , così che possiamo scrivere

$$\dot{\varphi} = \Phi(t + t_0), \quad \Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi_n e^{in\omega_1 t}, \quad \omega_1 := \frac{2\pi}{T_1}, \quad (50.15)$$

dove  $\Phi(t + t_0)$  si ottiene dal membro di destra della (50.14) scrivendo  $\Omega_1(t)$  in termini di  $\Omega_2(t)$ , e quindi sostituendo  $\Omega_2(t)$ , ovunque appaia, con  $\Omega(t + t_0)$ , definito in (50.12). Integrando la (50.15), si trova

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \chi_0 t + S(t + t_0) - S(t_0), \quad S(t) := \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \chi_n \frac{e^{in\omega_1 t}}{in\omega_1}, \quad (50.16)$$

dove  $t \mapsto S(t)$  è una funzione periodica di periodo  $T_1$ .

In conclusione abbiamo tre integrali primi: l'energia  $E$ , il modulo del momento angolare  $L$  e l'angolo  $\delta$  che il momento angolare forma con l'asse verticale (angolo che abbiamo fissato a zero, con la scelta fatta della terna del sistema di riferimento). Scegliamo tre angoli ( $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$ ) nel modo seguente. Come  $\tilde{\gamma}$  si può scegliere l'angolo (costante) che un versore prefissato ortogonale a  $\mathbf{l}$  forma con  $\mathbf{e}_x$  (per esempio  $\tilde{\gamma} = 0$ ). Poniamo

$$\tilde{\psi} := \frac{2\pi}{T_1} t_0, \quad \tilde{\varphi} := \varphi - S(t_0), \quad (50.17)$$

dove  $t_0$  è definito dopo la (50.12) come il tempo necessario per andare da  $(\alpha_-, 0)$  a  $(\Omega_2(0), \dot{\Omega}_2(0))$ . Possiamo considerare  $t_0$  come funzione di  $t$  attraverso la relazione

$$t_0 = t_0(t) = \tau_0(\Omega_2(t)) := \int_{\alpha_-}^{\Omega_2(t)} \frac{dx}{\sqrt{-V(x)}}, \quad (50.18)$$

così che, se  $t_0 = t_0(0) = \tau_0(\Omega_2(0))$  è il tempo necessario per andare da  $\alpha_-$  a  $\Omega_2(0)$ , il tempo per andare da  $\alpha_-$  a  $\Omega_2(t)$  sarà semplicemente  $\tau_0(\Omega_2(t)) = t_0 + t$ . Di conseguenza anche  $S(t + t_0) = \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(t)))$  può essere vista come funzione di  $\tau_0(\Omega_2(t))$ , così che, in conclusione, la dipendenza dal tempo degli angoli (50.17) può essere espressa attraverso le relazioni

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{2\pi}{T_1} \tau_0(\Omega_2(t)), \quad \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(t))). \quad (50.19)$$

Da qui segue che  $\tilde{\psi}$  ruota con periodo  $T_1$ , mentre  $\tilde{\varphi}$  ruota con periodo  $T_2 := 2\pi/\omega_2$ , dove  $\omega_2 := \chi_0$  (cfr. la (50.16)). Infatti abbiamo

$$\tilde{\psi}(t + T_1) = \frac{2\pi}{T_1} \tau_0(\Omega_2(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1} [\tau_0(\Omega_2(t)) + T_1] = \tilde{\psi}(t) + 2\pi,$$

poiché  $\tau_0(\Omega_2(t + T_1)) = t_0 + t + T_1 = \tau_0(\Omega_2(t)) + T_1$ , e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t + 2\pi/\chi_0) &= \varphi(t + 2\pi/\chi_0) - \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(t + 2\pi/\chi_0))) \\ &= \varphi_0 + \chi_0 [t + 2\pi/\chi_0] - \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(0))) = \tilde{\varphi}(t) + 2\pi, \end{aligned}$$

poiché  $S(t_0) = \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(t)))$  in (50.17) (cfr. la (50.19)), laddove  $S(t_0)$  va considerata una costante nell'espressione di  $\varphi(t)$  in (50.16) (infatti in (50.16)  $S(t_0) = \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(0)))$  non è funzione di  $t$ ).

È immediato calcolare, a partire dalla (50.18) e dalla (50.10),

$$\frac{d\tau_0(\Omega_2(t))}{dt} = \frac{d\tau_0(\Omega_2)}{d\Omega_2} \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{-V(\Omega_2(t))}} \sqrt{-V(\Omega_2(t))} = 1, \quad (50.20a)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\varphi_0 + \chi_0 t - \tilde{S}(\tau_0(\Omega_2(0)))] = \chi_0, \quad (50.20b)$$

così che concludiamo che  $\tilde{\psi}$  e  $\tilde{\varphi}$  sono angoli che ruotano uniformemente con periodi, rispettivamente,  $T_1$  e  $T_2 := 2\pi/\chi_0$ . Si noti che la (50.20a) è in realtà una semplice verifica, poiché già abbiamo osservato che  $\tau_0(\Omega_2(t)) = \tau_0(\Omega_2(0)) + t = t_0 + t$ , così che  $d\tau_0(\Omega_2(t))/dt = 1$ .

Dalla definizione di  $\chi_n$  in (50.15) abbiamo

$$\chi_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \Phi(t). \quad (50.21)$$

Effettuando il cambio di variabili  $t \mapsto \Omega(t) = \Omega$  e usando il fatto che

$$dt = \frac{d\Omega}{\sqrt{-V(\Omega)}}, \quad \Omega(0) = \alpha_-, \quad \Omega(T_1) = \alpha_+,$$

si vede che la frequenza  $\chi_0$  in (50.21) si può riscrivere

$$\chi_0 = \frac{2}{T_1} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{d\Omega}{\sqrt{-V(\Omega)}} \Phi(t(\Omega)). \quad (50.22)$$

Tenendo conto delle definizioni di  $T_1$  e  $T_2$ , segue anche la seconda di (50.8). La determinazione della soluzione delle equazioni del moto è stata ridotta alle due quadrature (50.8). ■

**Osservazione 50.5** In generale le coordinate scelte nella dimostrazione del teorema 50.4 non si riducono a quelle del caso simmetrico ( $I_1 = I_2$ ) introdotte nella dimostrazione del teorema 50.3, quando  $I_1 \rightarrow I_2$ . Si osservi tuttavia che c'è grande arbitrarietà nel definire gli integrali primi, perché ogni funzione di  $(\delta, E, L)$  è ancora un integrale primo. È allora possibile scegliere due integrali primi  $\Phi$  e  $\Psi$  che divengono  $\dot{\varphi}_0$  e  $\dot{\psi}_0$  per  $I_1 \rightarrow I_2$ . Si pone

$$\Phi = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt L \frac{I_1 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1 \tilde{\Omega}_2^2(t)}{I_1^2 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1^2 \tilde{\Omega}_2^2(t)}, \quad (50.23a)$$

$$\Psi = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \frac{(L^2 - 2EI_3) \tilde{\Omega}_3(t)}{I_1^2 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1^2 \tilde{\Omega}_2^2(t)}, \quad (50.23b)$$

dove  $\tilde{\Omega}_2(t) = \Omega(t)$ , mentre  $\tilde{\Omega}_1(t)$  e  $\tilde{\Omega}_3(t)$  si ottengono dalle (50.9) sostituendo  $\Omega_2(t)$  con  $\tilde{\Omega}_2(t)$ , e l'ambiguità di segno di  $\tilde{\Omega}_3(t)$  è risolta notando che  $\Omega_3(t)$  in (50.9) non si annulla mai per  $L \neq 0$ , e quindi ha segno costante univocamente determinato dal valore iniziale. Se ricordiamo la (50.14) e notiamo che, analogamente, utilizzando la (50.4) e la (50.14) stessa, risulta

$$\dot{\psi} = \frac{L^2 - 2EI_3}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2} \Omega_3, \quad (50.24)$$

si deduce che le (50.23) esprimono le medie su un periodo di  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$ , e si riducono alle frequenze  $\omega_\varphi$  e  $\omega_\psi$  del teorema 50.3 per  $I_1 = I_2$ . Notiamo incidentalmente che, per  $I_1 = I_2$ , dalle (50.17) otteniamo  $\Phi = \dot{\varphi} = L/I_1$  e  $\Psi = \dot{\psi} = L_3(I_1^{-1} - I_3^{-1})$ , consistentemente con le (49.5). Ovviamente si potrebbe anche cambiare  $\tilde{\psi}$  in un angolo che si riduce a  $\psi$  per  $I_1 \rightarrow I_2$  (e utilizzare  $\varphi$  in luogo di  $\tilde{\varphi}$ ).

**Osservazione 50.6** Le trasformazioni di coordinate, che, nella dimostrazione dei teoremi 50.3 e 50.4, portano alle nuove variabili, sono regolari e invertibili (come richiede la definizione di integrabilità). Questo si verifica esplicitamente senza difficoltà (cfr. l'esercizio 29).

**Nota bibliografica** Per definizioni e proprietà dell'ellissoide di inerzia abbiamo tenuto presente essenzialmente [Arnold-1, Cap. VI]. Per gli angoli di Eulero abbiamo seguito [Gallavotti, Cap. 3], mentre, riguardo allo studio delle precessioni regolari, abbiamo fatto riferimento a