Esercizio 18 Si dimostri che il momento di inerzia di una sfera rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ tangente alla superficie è dato da $I_{\boldsymbol{e}} = 7mr^2/5$. [*Suggerimento.* Si combinano le (45.8) con il teorema 44.15.]

Esercizio 19 Si dimostrino le (45.9). [*Suggerimento.* Si ha

$$I_1 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, y^2, \qquad I_2 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, x^2, \qquad I_3 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \left(x^2 + y^2\right),$$

come segue dalla (44.20) e dall'osservazione 44.17.]

Esercizio 20 Si dimostrino le (45.10). [*Suggerimento.* Se α denota l'angolo al vertice del cono, si ha $\tan\alpha = r/h$; il centro di massa avrà coordinate $(0, 0, z_0)$, con

$$z_0 := \frac{1}{m}\left(\rho \int_0^h z\,\mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \frac{3}{4}h.$$

La densità di volume è $\rho = m/\pi r h^2$. Utilizzando coordinate cilindriche (cfr. l'esercizio 9) si trova

$$I_1 = I_2 = \rho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left((z - z_0)^2 + (r')^2 \sin^2\theta\right), \qquad I_3 = \rho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, (r')^2,$$

avendo tenuto conto dell'osservazione 44.17 e della (44.20).]

Esercizio 21 Si dimostri che il momento di inerzia di un cono circolare retto rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono è dato da $I_{\boldsymbol{e}} = 3m(h^2/5 + r^2/20)$. [*Suggerimento.* Si combinano le (45.10) con il teorema 44.15.]

Esercizio 22 Si dimostri che nella discussione delle equazioni di Eulero (47.2), per $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_3}$, l'intersezione dell'ellissoide $\boldsymbol{L} \cdot I^{-1}\boldsymbol{L} = 2E$ con la sfera $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = L^2$ consiste in due curve chiuse che si avvolgono intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3$. [*Soluzione.* Le curve d'intersezione sono curve in $\mathbb{R}^3$, che possono essere parametrizzate come $(L_1, L_2) \mapsto L_3 = f(L_1, L_2)$. Usando coordinate polari si ha $(L_1, L_2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{R}$: infatti in principio le curve potrebbero non chiudersi. Noi vogliamo appunto dimostrare che, dopo che θ ha compiuto un giro completo di 2π, le curve si sono chiuse. Dalle (47.3) si vede subito che, dati L_1 e L_2 sono definiti due valori di L_3, così che si hanno due curve. Inoltre si ha

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{I_1} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{I_2} + \frac{L^2 - \rho^2}{I_3} = 2E;$$

esplicitando ρ in funzione di θ,

$$\rho^2 = \frac{2EI_3 - L^2}{\dfrac{I_3}{I_1}\cos^2\theta + \dfrac{I_3}{I_2}\sin^2\theta - 1},$$

dove

$$2EI_3 - L^2 > 0, \qquad \frac{I_3}{I_1}\cos^2\theta + \frac{I_3}{I_2}\sin^2\theta > 1,$$

si vede che $\rho = \rho(\theta)$ è univocamente determinata come funzione periodica di θ. Pertanto

$$f(L_1, L_2) = G(\theta) := f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$$

è una funzione periodica di θ di periodo 2π.]

Esercizio 23 Si dimostri che nella discussione delle equazioni di Eulero (47.2), per $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$, l'intersezione dell'ellissoide $\boldsymbol{L} \cdot I^{-1}\boldsymbol{L} = 2E$ con la sfera $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = L^2$ consiste in due curve chiuse che si avvolgono intorno all'asse $\boldsymbol{e}_1$. [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 22.]

Esercizio 24 Si verifichi che le curve degli esercizi 22 e 23 non sono curve piane. [*Suggerimento.* Basta osservare che la funzione $G(\theta)$ definita nello svolgimento dell'esercizio 22 non è costante in θ.]

Esercizio 25 Si dimostri che l'intersezione di una sfera di raggio R e centro C con un piano π passante per C definisce un cerchio di raggio R e centro C. [*Suggerimento.* L'equazione di un piano nello spazio tridimensionale è data da $ax+by+cz+d = 0$, con a, b, c, d costanti reali. Possiamo fissare un sistema di riferimento con origine in C, così che l'equazione del piano diventa $ax + by + cz = 0$ e l'equazione della sfera diventa $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Attraverso una rotazione $(x, y, z) \to (x', y', z')$ possiamo trasformare l'equazione del piano in $z' = 0$, mentre l'equazione della sfera rimane $x'^2+y'^2+z'^2 = R^2$. L'intersezione della sfera con il piano individua allora il cerchio $x'^2 + y'^2 = R^2$.]

Esercizio 26 Si dimostri che, per $I_1 = I_2$ e $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_3}$, l'intersezione dell'ellissoide $\boldsymbol{L} \cdot I^{-1}\boldsymbol{L} = 2E$ con la sfera $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = L^2$ consiste in due circonferenze contenute in due piani ortogonali all'asse $\boldsymbol{e}_3$, equidistanti dall'origine. [*Suggerimento.* Per $I_1 = I_2$ l'espressione per ρ trovata nello svolgimento dell'esercizio 22 diventa

$$\rho^2 = I_1 \, \frac{2EI_3 - L^2}{I_3 - I_1} = \text{cost.},$$

quindi la proiezione delle due curve sul piano (L_1, L_2) definisce una circonferenza di raggio ρ. Poiché

$$L_3^2 = L^2 - L_1^2 - L_2^2 = L^2 - \rho^2 \qquad \Longrightarrow \qquad L_3 = \pm\sqrt{L^2 - \rho^2},$$

anche L_3 è costante.]

Esercizio 27 Sia A la matrice del sistema lineare ottenuto per linearizzazione del sistema (47.2). Si dimostri che gli autovalori corrispondenti sono dati dalla (47.6).

Esercizio 28 Si dimostrino le (50.3). [*Suggerimento.* Si veda il lemma 46.6.]

Esercizio 29 Si verifichi che le trasformazioni di coordinate descritte nella dimostrazione del teorema 50.4 sono trasformazioni regolari. [*Suggerimento.* Si verifica che si tratta di trasformazioni differenziabili e che la corrispondente matrice jacobiana ha determinante non nullo.]

Esercizio 30 Si consideri il sistema rigido costituito da 8 punti di massa m disposti in corrispondenza dei vertici di un cubo di lato ℓ.
(1) Si determini il centro di massa del sistema.
(2) Si determinino gli assi di inerzia rispetto al centro di massa.
(3) Si calcolino i corrispondenti momenti principali di inerzia.
(4) Si determini un solido che abbia gli stessi momenti principali di inerzia.
[*Soluzione.* (1) Il centro di massa del sistema corrisponde al centro del cubo. (2) Si scelga un sistema di riferimento in cui l'origine coincida con il centro di massa e gli assi siano paralleli ai lati del cubo: gli assi di inerzia costituiscono una terna di vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ diretti lungo i tre assi. (3) I momenti principali di inerzia sono $I_1 = I_2 = I_3 = 4m\ell^2$. (4) Un solido che abbia gli stessi momenti principali di inerzia è la sfera di massa m e raggio $r = \sqrt{10}\ell$ (cfr. il §45.6) – o il cubo di massa m e lato di lunghezza $\sqrt{15}\ell$ (cfr. l'esercizio 32 più avanti).]