

così che la soluzione si trova immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0), \end{cases}$$

dove i dati iniziali  $(y_1(0), y_2(0))$  dipendono dai dati iniziali  $x_0$  nelle coordinate  $x$ . Risulta  $x(t) = Q^{-1}y(t)$ , dove  $P = (Q^T)^{-1}$  è la matrice che fa passare dalla base in cui si usano le coordinate  $x$  (base standard) alla base in cui si usano le coordinate  $y$  (base degli autovettori). Imponendo che  $x(t)$  soddisfi le condizioni iniziali, si trova la soluzione.

- Supponiamo ora che  $A$  abbia autovalori complessi coniugati  $\mu$  e  $\bar{\mu}$ , con  $\mu = a + ib$ ,  $b \neq 0$ . Esiste allora una base in cui il sistema ammette la forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \mu y_1, \\ \dot{y}_2 = \bar{\mu} y_2, \end{cases}$$

così che se ne può scrivere la soluzione

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\mu t} y_1(0), \\ y_2(t) = e^{\bar{\mu} t} y_2(0), \end{cases}$$

con  $y(0) \in \mathbb{C}$ , e procedere come prima. Ora ovviamente anche  $Q$  è complessa e tale che  $x(t) = Q^{-1}y(t)$  risulti reale per  $x_0$  reale. Oppure si può procedere passando alla base in cui la matrice ammette la rappresentazione (2.7) (cfr. il lemma 2.17), così che, utilizzando la proprietà 5 del lemma 3.5, la soluzione, in tale base, si scrive nella forma

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{at} (\cos(bt) z_1(0) - \sin(bt) z_2(0)), \\ z_2(t) = e^{at} (\sin(bt) z_1(0) + \cos(bt) z_2(0)). \end{cases}$$

La soluzione sarà allora data da  $x(t) = Q^{-1}z(t)$ , dove ora  $Q$  è la matrice (reale) che fa passare dalle coordinate  $x$  alle coordinate  $z$ .

## §7 Sistemi planari lineari

Il caso dei sistemi bidimensionali (*sistemi planari*) è particolarmente istruttivo perché consente di visualizzare facilmente la struttura delle soluzioni. Lo analizzeremo con un certo dettaglio.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

in  $E = \mathbb{R}^2$ . Esiste sempre una base in cui la matrice  $A \in M(2)$  ha una delle seguenti forme:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq \mu \text{ reali}, \quad (7.2a)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ reali}, b \neq 0, \quad (7.2b)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \text{ reale}, \quad (7.2c)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \text{ reale}. \quad (7.2d)$$

Infatti, se gli autovalori di  $A$  sono distinti, discende dai teoremi 2.3 e 2.13 che l'operatore  $A$  è diagonalizzabile o semisemplice; nel primo caso esiste una base in cui  $A$  è rappresentato dalla matrice (7.2a), nel secondo applichiamo il lemma 2.17 per dedurre che esiste una base in cui  $A$  è rappresentato dalla matrice (7.2b). Se gli autovalori sono coincidenti (quindi necessariamente reali) allora o la matrice  $A$  è diagonale ed è data dalla (7.2c) o ammette la rappresentazione in forma canonica di Jordan (7.2d), come risulta dalla discussione nel §5.

Sia  $x(t)$  la soluzione del sistema (7.1). Tale soluzione si può considerare una rappresentazione parametrica della curva piana  $x: t \rightarrow x(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  (una *curva piana* è un'applicazione continua  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dove  $J$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ ). In coordinate abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ci si può porre il problema di determinare che forma abbia tale curva nel piano, ovvero di trovare l'equazione cartesiana della curva della forma  $x_2 = X_2(x_1)$  o  $x_1 = X_1(x_2)$  per opportune funzioni  $X_1$  e  $X_2$ , almeno localmente, i.e. prescindendo da eventuali problemi di non univocità.

Lo stesso discorso si può ripetere nelle coordinate  $y = (y_1, y_2)$  in cui  $A$  ammette una delle rappresentazioni in (7.2). Poiché esiste sempre una base in cui  $A$  ha una delle forme elencate in (7.2), possiamo limitarci a considerare matrici che abbiano una di tali forme. Il risultato trovato darà informazioni anche nella base originaria, in cui si usano coordinate  $x = (x_1, x_2)$ , poiché si può passare da una base all'altra attraverso una matrice invertibile.

Nel seguito studieremo la forma delle curve  $y: t \rightarrow y(t)$  nel piano  $y = (y_1, y_2)$ .

### §7.1 Autovalori reali distinti

Nella base degli autovettori l'operatore  $A$  è rappresentato dalla matrice (7.2a). Quindi

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t} y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\mu t} y_{02}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Consideriamo prima il caso in cui entrambi  $\lambda$  e  $\mu$  siano non nulli. Si noti innanzitutto che, per  $y_{01} \neq 0$ , la funzione  $y_1(t) = e^{\lambda t} y_{01}$  è strettamente monotona in  $t$  e può quindi essere invertita, ponendo, con leggero abuso di notazione,  $t = t(y_1)$ , così che si può scrivere  $y_2(t) = y_2(t(y_1)) = Y_2(y_1)$ , dove  $Y_2 := y_2 \circ t$ .

Se  $y_{01} > 0$  (e quindi  $y_1(t) > 0$ ) possiamo scrivere  $y_2(t)$  in funzione di  $y_1(t)$  ponendo

$$y_2(t) = \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda} y_{02} = \left(\frac{y_1(t)}{y_{01}}\right)^{\mu/\lambda} y_{02} = a y_1^\alpha(t),$$

dove  $\alpha = \mu/\lambda$  e  $a = y_{02} y_{01}^{-\alpha}$ . L'equazione cartesiana della curva (7.3) è

$$y_2 = a y_1^\alpha, \quad \alpha := \frac{\mu}{\lambda}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

Se  $\alpha = \mu/\lambda > 0$  e  $y_{20} > 0$  si ottiene una curva passante per l'origine, convessa o concava (nel semipiano  $y_2 > 0$ ), a seconda che sia  $|\mu| > |\lambda|$  o  $|\mu| < |\lambda|$  (non si può avere  $|\lambda| = |\mu|$  poiché, se così fosse,  $\alpha > 0$  implicherebbe  $\lambda = \mu$ , contro l'ipotesi che i due autovalori siano distinti). Il moto su tale curva è “asintotico all'infinito”, i.e.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = +\infty$ , se  $\lambda$  e  $\mu$  sono positivi, ed è invece “asintotico all'origine”, i.e.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0$ , se  $\lambda$  e  $\mu$  sono negativi. Se  $y_{20} < 0$  si ragiona in modo analogo (la curva è in tal caso nel semipiano inferiore  $y_2 < 0$ ), mentre se  $y_{20} = 0$  allora  $y_2(t) = 0$  per ogni  $t$  e il moto avviene lungo l'asse  $y_1$ .

Diremo nei due rispettivi casi  $\lambda, \mu > 0$  o  $\lambda, \mu < 0$  che l'origine è una *sorgente* o un *pozzo* (cfr. la figura 2.1). In entrambi i casi diremo che l'origine è un *nodo proprio* (o semplicemente *nodo*): quindi un nodo può essere o un pozzo o una sorgente.

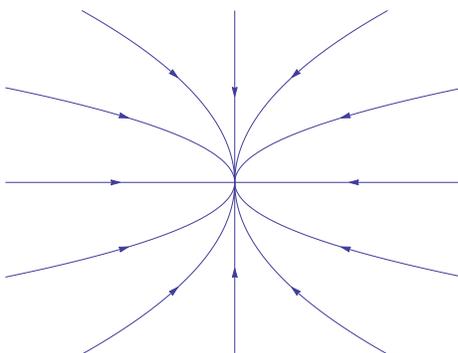


Figura 2.1: Nodo proprio (pozzo): caso (7.2a) con  $\lambda < \mu < 0$ .

Se  $\alpha = \mu/\lambda < 0$ , i.e. se i due autovalori hanno segno opposto, la (7.4) descriverà un'iperbole generalizzata, i.e.  $y_2 = a y_1^{-\alpha'}$ ,  $\alpha' = -\alpha > 0$ , con assi coincidenti con gli assi coordinati (si ha un'iperbole solo se  $\alpha = -1$ ). Se  $\lambda > 0 > \mu$  si avrà  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = +\infty$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$  e il moto sarà “asintotico all'asse  $y_1$ ”. Se invece  $\lambda < 0 < \mu$  si avrà  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$  e

$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = \pm\infty$  (a seconda del segno di  $y_{02}$ ) e il moto sarà “asintotico all’asse  $y_2$ ”. Diremo in tal caso che l’origine è un *punto di sella* (cfr. la figura 2.2).

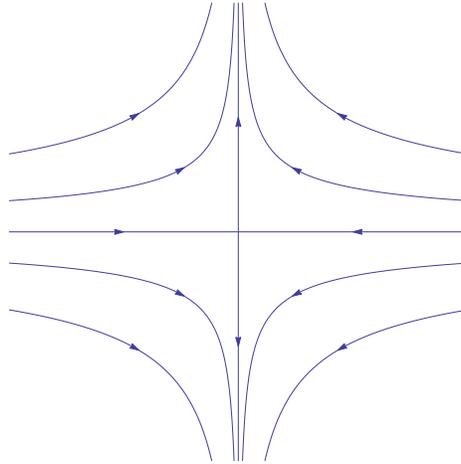


Figura 2.2: Punto di sella: caso (7.2a) con  $\lambda < 0 < \mu$ .

Il caso  $y_{01} < 0$  si tratta analogamente; poiché  $y_2(t)$  dipende dal rapporto  $y_1(t)/y_{01}$  si vede immediatamente che la curva  $y_2 = Y_2(y_1)$  è pari in  $y_1$ , quindi le curve nel semipiano  $y_1 < 0$  si ottengono da quelle nel semipiano  $y_1 > 0$  per riflessione rispetto all’asse  $y_2$ . Anche il caso  $y_{01} = 0$  si tratta facilmente: in tal caso  $y_1(t) = 0 \forall t$  e il moto avviene lungo l’asse  $y_2$ .

Si consideri ora il caso in cui uno dei due autovalori, per esempio  $\lambda$ , sia nullo (non possono essere entrambi nulli perché stiamo supponendo che siano distinti). In tal caso  $y_1(t) = y_{01} \forall t \in \mathbb{R}$  e il moto ha luogo su rette parallele all’asse verticale. Analogamente se  $\mu = 0$  si ha  $y_2(t) = y_{02} \forall t \in \mathbb{R}$  e le curve su cui si svolge il moto sono rette parallele all’asse orizzontale.

## §7.2 Autovalori complessi coniugati

Nella base in cui  $A$  è rappresentata dalla matrice (7.2b) si ha

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{at} (\cos(bt) y_{01} - \sin(bt) y_{02}), \\ y_2(t) = e^{at} (\sin(bt) y_{01} + \cos(bt) y_{02}), \end{cases} \quad (7.5)$$

se  $\mu = a + ib$ , con  $b \neq 0$ .

Se  $a = 0$  si vede che

$$|y(t)|^2 = y_1^2(t) + y_2^2(t) = y_{01}^2 + y_{02}^2 := r^2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con  $r > 0$ ; inoltre

$$|\dot{y}(t)| = \sqrt{b^2(y_{01}^2 + y_{02}^2)} = |b|r.$$

Quindi la curva (7.5) descrive un moto circolare uniforme (lungo la circonferenza di raggio  $r$  e centro l'origine) con velocità angolare  $b$  (cfr. l'esercizio 11). Diremo in tal caso che l'origine è un *centro* (cfr. la figura 2.3). Nel caso particolare in cui si abbia  $a = 0$  e  $b = -\omega$ , con  $\omega > 0$ , il sistema (7.1) descrive l'*oscillatore armonico*  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ .

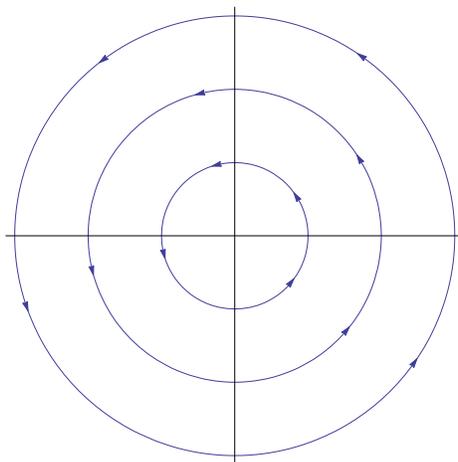


Figura 2.3: Centro: caso (7.2b) con  $\lambda = ib$  e  $\mu = -ib$ , dove  $b > 0$ .

Se  $a \neq 0$ , si ha  $|y(t)|^2 = e^{2at}r^2$ , se  $r := |y(0)|$ . Il moto è la composizione di un moto circolare e di un'espansione, se  $a > 0$ , o una contrazione, se  $a < 0$  (cfr. l'esercizio 12). Al variare di  $t$ ,  $y(t)$  descrive una spirale intorno all'origine, che, per  $t \rightarrow +\infty$ , tende all'origine se  $a < 0$  e tende all'infinito se  $a > 0$  (cfr. la figura 2.4).

Per visualizzare meglio il comportamento delle soluzioni può essere conveniente introdurre *coordinate polari*  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ , scrivendo

$$y_1 = \rho \cos \theta, \quad y_2 = \rho \sin \theta \quad \Longrightarrow \quad \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y_2}{y_1}.$$

Utilizzando il fatto che  $\dot{y}_1 = ay_1 - by_2$  e  $\dot{y}_2 = by_1 + ay_2$ , troviamo

$$\rho \dot{\rho} = y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2 = ay_1^2 - by_1y_2 + by_1y_2 + ay_2^2 = a\rho^2,$$

che, integrata, dà  $\rho(t) = e^{at}\rho(0)$ , e

$$\dot{\theta} = \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2} \left( \frac{\dot{y}_2}{y_1} - \frac{y_2 \dot{y}_1}{y_1^2} \right) = y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1 y_1^2 + y_2^2 = by_1^2 + by_1y_2 - ay_2y_1 + by_2^2 = \frac{b\rho^2}{\rho^2} = b,$$

che, integrata, dà  $\theta(t) = \theta(0) + bt$ . La variabile radiale rimane costante se  $a = 0$ , va a zero esponenzialmente se  $a < 0$  e diverge esponenzialmente se  $a > 0$ , mentre la variabile angolare ruota con velocità angolare costante  $b$  (in senso antiorario se  $b > 0$  e in senso orario se  $b < 0$ ).

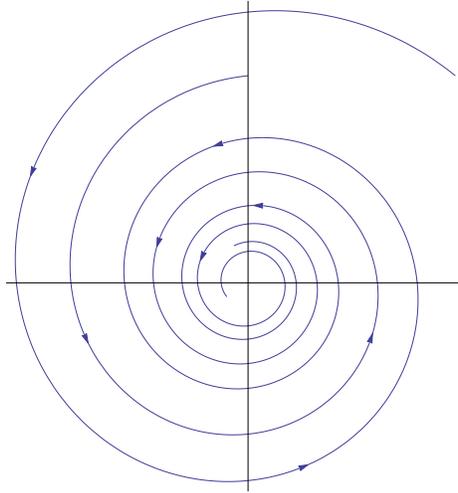


Figura 2.4: Spirale: caso (7.2b) con  $\lambda = a + ib$  e  $\mu = a - ib$ , dove  $a < 0$  e  $b > 0$ .

### §7.3 Autovalori reali coincidenti. Parte I

Supponiamo prima che la matrice  $A$  abbia la forma (7.2c). La soluzione è

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t} y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\lambda t} y_{02}, \end{cases}$$

e possiamo ragionare come nel §7.1. Valgono le stesse formule, con l'unica differenza che ora  $\lambda = \mu$ , quindi in particolare  $\lambda$  e  $\mu$  hanno lo stesso segno, se non sono nulli.

Se  $\lambda \neq 0$ , diremo di nuovo in tal caso che l'origine è un *nodo proprio*. In particolare può essere o un *pozzo* ( $\lambda < 0$ ) o una *sorgente* ( $\lambda > 0$ ). Le traiettorie  $t \mapsto y(t)$  descrivono rette passanti per l'origine, percorse in direzione dell'origine o in direzione opposta a seconda che l'origine sia, rispettivamente, un pozzo o una sorgente (cfr. la figura 2.5). In particolare, se  $\lambda < 0$ , il moto avviene lungo il segmento che unisce il dato iniziale all'origine.

Se invece  $\lambda = 0$  le soluzioni sono banali:  $y(t) = y_0$  per ogni dato iniziale  $y_0$ .

### §7.4 Autovalori reali coincidenti. Parte II

Se  $A$  ha la forma (7.2d), la soluzione sarà data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t} y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\lambda t} (t y_{01} + y_{02}), \end{cases} \quad (7.6)$$

come segue dal teorema 6.5 e dall'esempio 3.10, con  $a = \lambda t$  e  $b = t$ .

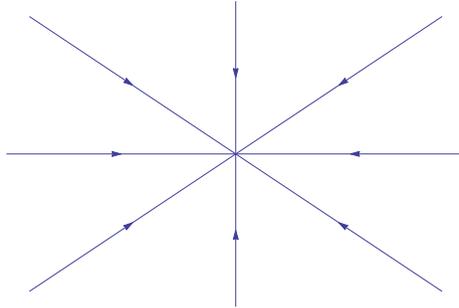


Figura 2.5: Nodo proprio (pozzo): caso (7.2c) con  $\lambda < 0$ .

Consideriamo prima il caso  $\lambda \neq 0$ . Possiamo scrivere  $y_2(t)$  in funzione di  $y_1(t)$  utilizzando il fatto che, come discende dalla (7.6), se  $y_{01} \neq 0$ , allora  $t = \lambda^{-1} \log[y_1(t)/y_{01}]$ . Si noti che  $y_1(t)$  ha il segno di  $y_{01} \forall t$ , così che l'argomento del logaritmo è sempre strettamente positivo; possiamo perciò porre  $t = \lambda^{-1}(\log |y_1(t)| - \log |y_{01}|)$ . Quindi

$$y_2 = Y_2(y_1) := y_1 (a \log |y_1| + b), \quad (7.7)$$

dove  $a := \lambda^{-1}$  e  $b := y_{02}y_{01}^{-1} - \lambda^{-1} \log |y_{01}|$ ; in particolare solo  $b$  dipende dal dato iniziale. La curva (7.7) passa per l'origine, dove ha tangente verticale.

Per determinarne l'andamento per  $y_1 > 0$  si ragiona come segue. Supponiamo preliminarmente  $y_{01} > 0$ . Se  $\lambda < 0$ , la funzione (7.7) è concava, ha un massimo positivo, quando  $a \log y_1 + b = 0$  cambia segno e tende a  $-\infty$  per  $y_1 \rightarrow +\infty$ , mentre se  $\lambda > 0$ , la curva  $y_2 = Y_2(y_1)$  è convessa, ha un minimo negativo, cambia segno in  $a \log y_1 + b = 0$  e tende a  $+\infty$  per  $y_1 \rightarrow +\infty$ . Il caso  $y_{01} < 0$  si tratta in modo analogo. Se  $y_{01} = 0$ , allora, dalle (7.6), si ha  $y_1(t) = 0$  e  $y_2(t) = e^{\lambda t} y_{02}$ . Quindi  $y_1(t)$  è identicamente nulla e  $y_2(t)$  tende a 0 se  $\lambda < 0$  e a  $\pm\infty$  (a seconda che il dato iniziale  $y_{02}$  sia positivo o negativo) se  $\lambda > 0$ .

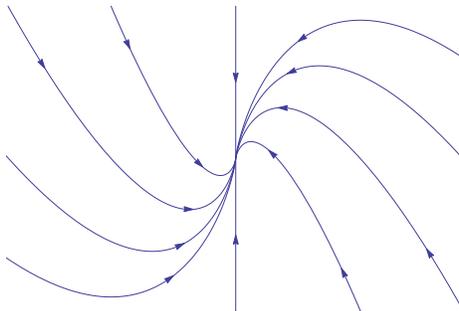


Figura 2.6: Nodo improprio (pozzo): caso (7.2d) con  $\lambda < 0$ .

Diremo in tal caso che l'origine è un *pozzo* o una *sorgente*, a seconda che il moto sia asintotico all'origine o all'infinito, rispettivamente. Per differenziare tali scenari dai corrispondenti incontrati nei §§7.1 e 7.3 per autovalori reali distinti, diremo ora che l'origine è un *nodo improprio* (cfr. la figura 2.6).

Se invece  $\lambda = 0$  la (7.6) dà

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{01}, \\ y_2(t) = t y_{01} + y_{02}. \end{cases}$$

Mentre  $y_1(t)$  rimane costante,  $y_2(t)$  cresce (o diminuisce) linearmente in  $t$ . Questo vuol dire che il moto avviene su una retta  $y_1 = y_{01}$ , parallela all'asse  $y_2$ , verso l'alto (i.e. verso  $y_2 = +\infty$ ) se  $y_{01} > 0$  e verso il basso se  $y_{01} < 0$ . Se infine  $y_{01} = 0$  ogni punto  $(0, y_2)$  è soluzione.

## §8 Soluzioni di sistemi lineari del primo ordine

Nei paragrafi precedenti abbiamo discusso come si determinano le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; abbiamo visto come il problema si riconduca a calcolare l'esponenziale di un operatore lineare. Nel presente paragrafo considereremo, in grande dettaglio, alcuni esempi concreti, in cui i risultati teorici del capitolo 1 sono applicati per trovare la soluzione. Per ogni esempio trattato saranno proposti più metodi, sostanzialmente equivalenti (cfr. comunque l'osservazione 8.5 più avanti).

**Teorema 8.1** *Dato il sistema di equazioni lineari omogenee con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono gli autovalori di  $A$  e  $n_1, \dots, n_r$  sono le rispettive molteplicità, allora la soluzione  $x(t) = e^{At}x_0$  è della forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k t} P_k(t), \quad P_k(t) = \sum_{j=0}^{n_k-1} a_{kj} t^j,$$

dove  $P_k(t)$  è un polinomio di grado  $n_k - 1$  in  $t$ , con coefficienti  $a_{kj}$  univocamente determinati dai dati iniziali.

*Dimostrazione.* Per il teorema 4.6 possiamo scrivere  $E$  come somma diretta degli autospazi generalizzati  $E_1, \dots, E_r$ . Sia  $T$  l'operatore lineare rappresentato dalla matrice  $A$  nelle coordinate  $x$ ; scrivendo  $T$  come in (4.11), si ha  $\forall k = 1, \dots, r$

$$T_k = S_k + N_k, \quad S_k = \lambda_k \mathbf{1}, \quad (8.1)$$