Diremo in tal caso che l'origine è un *pozzo* o una *sorgente*, a seconda che il moto sia asintotico all'origine o all'infinito, rispettivamente. Per differenziare tali scenari dai corrispondenti incontrati nei §§7.1 e 7.3 per autovalori reali distinti, diremo ora che l'origine è un *nodo improprio* (cfr. la figura 2.6).

Se invece $\lambda = 0$ la (7.6) dà

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{01}, \\ y_2(t) = t\, y_{01} + y_{02}. \end{cases}$$

Mentre $y_1(t)$ rimane costante, $y_2(t)$ cresce (o diminuisce) linearmente in t. Questo vuol dire che il moto avviene su una retta $y_1 = y_{01}$, parallela all'asse y_2, verso l'alto (i.e. verso $y_2 = +\infty$) se $y_{01} > 0$ e verso il basso se $y_{01} < 0$. Se infine $y_{01} = 0$ ogni punto $(0, y_2)$ è soluzione.

§8 Soluzioni di sistemi lineari del primo ordine

Nei paragrafi precedenti abbiamo discusso come si determinano le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; abbiamo visto come il problema si riconduca a calcolare l'esponenziale di un operatore lineare. Nel presente paragrafo considereremo, in grande dettaglio, alcuni esempi concreti, in cui i risultati teorici del capitolo 1 sono applicati per trovare la soluzione. Per ogni esempio trattato saranno proposti più metodi, sostanzialmente equivalenti (cfr. comunque l'osservazione 8.5 più avanti).

Teorema 8.1 *Dato il sistema di equazioni lineari omogenee con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori di A e $n_1, \ldots, n_r$ sono le rispettive molteplicità, allora la soluzione $x(t) = \mathrm{e}^{At} x_0$ è della forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_k t} P_k(t), \qquad P_k(t) = \sum_{j=0}^{n_k - 1} a_{kj} t^j,$$

dove $P_k(t)$ è un polinomio di grado $n_k - 1$ in t, con coefficienti a_{kj} univocamente determinati dai dati iniziali.

Dimostrazione. Per il teorema 4.6 possiamo scrivere E come somma diretta degli autospazi generalizzati $E_1, \ldots, E_r$. Sia T l'operatore lineare rappresentato dalla matrice A nelle coordinate x; scrivendo T come in (4.11), si ha $\forall k = 1, \ldots, r$

$$T_k = S_k + N_k, \qquad S_k = \lambda_k \mathbb{1}, \tag{8.1}$$

dove S_k, N_k sono operatori lineari in E_k (cfr. la dimostrazione del teorema 4.7). Se, per ogni $k = 1, \ldots, r$, indichiamo con

$$\{v_1^{(k)}, \ldots, v_{n_k}^{(k)}\}$$

l'insieme dei vettori in E che costituiscono una base per E_k, allora

$$\{v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{n_2}^{(2)}, \ldots, v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}\} \tag{8.2}$$

è una base per E; inoltre in tale base l'operatore T è rappresentato da una matrice diagonale a blocchi (cfr. l'osservazione 1.44)

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_r \end{pmatrix},$$

dove ogni blocco B_k è una matrice $n_k \times n_k$.

Siano y le coordinate nella base (8.2) e sia Q la matrice del cambiamento di coordinate $x \mapsto y$, i.e. $y = Qx$ (cfr. la (1.19)). Per definizione di somma diretta, per ogni vettore $v \in E$,

$$v = v_1 + \ldots + v_r, \qquad v_k \in E_k \quad \forall k = 1, \ldots, r.$$

Con leggero abuso di notazione indichiamo con y_k le coordinate del vettore v_k nella base y; in altre parole, y_k non denota la coordinata k-esima di v nella base (8.2), ma l'insieme delle n_k coordinate della componente v_k di v in tale base. Per costruzione y_k risolve l'equazione

$$\begin{cases} \dot{y}_k = B_k y_k, \\ y_k(t_0) = y_{0k}, \end{cases} \tag{8.3}$$

se $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0k})$ è definito come $y_0 := y(t_0) = Qx(t_0) = Qx_0$.

Poiché B_k è dato da $B_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k$, con $N_k^{n_k} = 0$, la soluzione del sistema (8.3) è

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \mathrm{e}^{B_k t} y_{0k} = \mathrm{e}^{\lambda_k \mathbb{1} t + N_k t} y_{0k} = \mathrm{e}^{\lambda_k \mathbb{1} t} \mathrm{e}^{N_k t} y_{0k} = \mathbb{1} \mathrm{e}^{\lambda_k t} \mathrm{e}^{N_k t} y_{0k} = \mathrm{e}^{\lambda_k t} \mathrm{e}^{N_k t} y_{0k} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_k t} \left(\mathbb{1} + N_k t + \ldots + \frac{(N_k t)^{n_k - 1}}{(n_k - 1)!} \right) y_{0k} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{(N_k t)^j}{j!} y_{0k} t^j, \end{aligned} \tag{8.4}$$

dove si è utilizzato il fatto che gli operatori $\lambda_k \mathbb{1}$ e N_k commutano per applicare la proprietà 2 del lemma 3.5. Dal momento che

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = Q^{-1}(y_1(t), \ldots, y_r(t)) = \sum_{k=1}^{r} Q^{-1} \left(0, \ldots, 0, y_k(t), 0, \ldots, 0\right),$$

si ottiene dalla (8.4)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{n_k-1} a_{kj} t^j, \qquad a_{kj} := Q^{-1}\Big(0, \ldots, 0, \frac{N_k^j}{j!} y_{0k}, 0, \ldots, 0\Big).$$

Il fatto che i coefficienti dei polinomi $P_k(t)$ siano determinati in modo univoco segue semplicemente dall'unicità della soluzione garantita dal teorema 6.5. ■

Esempio 8.2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione.

Discussione dell'esempio. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0,$$

così che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, i.e. sono coincidenti. A questo punto possiamo procedere seguendo due metodi diversi.

1. Scriviamo $A = S + N$, dove

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad N := A - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Si verifica immediatamente che $[S, N] = SN - NS = 0$ e $N^2 = 0$, così che si ha

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt} = e^{3t}(\mathbb{1} + Nt) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix},$$

   da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix},$$

   che, espressa per componenti, dà

$$x_1(t) = e^{3t}\left[(1+t)\, x_{01} - t x_{02}\right], \tag{8.5a}$$
$$x_2(t) = e^{3t}\left[t x_{01} + (1-t)\, x_{02}\right], \tag{8.5b}$$

   che costituisce la soluzione del sistema con dati iniziali (x_{01}, x_{02}).