

Esercizio 24 Indicando con P_x, P_y, P_z i campi vettoriali associati alle componenti p_x, p_y, p_z della quantità di moto e con L_x, L_y, L_z i campi vettoriali associati alle componenti l_x, l_y, l_z del momento angolare, si dimostrino le seguenti identità:

$$\begin{aligned} [P_x, P_y] &= 0, & [P_y, P_z] &= 0, & [P_z, P_x] &= 0, \\ [L_x, L_y] &= L_z, & [L_y, L_z] &= L_x, & [L_z, L_x] &= L_y, \\ [L_x, P_y] &= -P_z, & [L_x, P_z] &= P_y, & [L_x, P_x] &= 0, \\ [L_y, P_z] &= P_x, & [L_y, P_x] &= -P_z, & [L_y, P_y] &= 0, \\ [L_z, P_x] &= -P_y, & [L_z, P_y] &= P_x, & [L_z, P_z] &= 0, \end{aligned}$$

[*Suggerimento.* Si utilizzino i risultati degli esercizi 4, 6 e 21 per le identità delle prime due righe. Le altre si ricavano facilmente per conto esplicito a partire dalla definizione (63.4).]

Esercizio 25 Si discuta l'esempio 63.21. [*Soluzione.* Segue dall'esercizio 24.]

Esercizio 26 Si discuta il moto di un punto materiale in un campo centrale alla luce dei risultati del §63. Se ne deduca in particolare che, nonostante si conservi il momento angolare, non è possibile trovare tre coordinate cicliche ma solo due (cfr. l'esempio 59.7). [*Suggerimento.* I campi vettoriali associati alle tre componenti del momento angolare non commutano.]

Esercizio 27 Nel caso dell'esercizio 26 si discuta perché la conservazione dell'energia non introduca un'ulteriore variabile ciclica. Si spieghi perché il moto avviene in \mathbb{R}^2 anziché in \mathbb{R}^6 . [*Suggerimento.* Si veda l'osservazione 62.22 per quanto riguarda il fatto che la conservazione dell'energia non implica una variabile ciclica. L'esistenza di quattro integrali primi (energia e momento angolare) comporta tuttavia che il moto avviene su una superficie di codimensione 4 in \mathbb{R}^6 .]

Esercizio 28 Si dimostri che dati due campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 associati a due gruppi di simmetrie per un sistema lagrangiano (Σ, \mathcal{L}) , allora o esiste un altro gruppo di simmetrie o si può trovare un sistema di coordinate in cui due coordinate sono cicliche. [*Soluzione.* Se $[\xi_1, \xi_2] \neq 0$ esiste un terzo gruppo di simmetrie di \mathcal{L} , per il teorema 63.16, mentre se $[\xi_1, \xi_2] = 0$ possiamo applicare il teorema 63.15.]

Esercizio 29 Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{|q_1 - q_2|}.$$

Si dimostri che il gruppo \mathcal{G} corrispondente alla trasformazione di coordinate

$$q_1 \mapsto q_1 + \alpha, \quad q_2 \mapsto q_2 + \alpha,$$

è un gruppo di simmetrie di \mathcal{L} e si determinino il campo vettoriale ξ e il momento π associati a \mathcal{G} . Si dia un'interpretazione del momento π .

Esercizio 30 Si consideri il pendolo sferico dell'esercizio 58 del capitolo 11. Si interpreti l'esistenza della variabile ciclica θ alla luce del teorema di Noether e si usi il metodo di Routh per integrare il sistema. [*Soluzione.* Poiché la forza peso agisce nella direzione dell'asse verticale, il sistema è invariante

per rotazioni intorno a tale asse. D'altra parte, in coordinate sferiche, l'angolo θ descrive rotazioni intorno all'asse verticale, quindi θ deve essere una variabile ciclica. Per il teorema di Routh, il momento

$$l_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}$$

è una costante del moto (l_z è la componente lungo l'asse verticale del momento angolare l). La lagrangiana ridotta è allora data da

$$\mathcal{L}_R(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\varphi}^2 - V_{\text{eff}}(\varphi), \quad V_{\text{eff}}(\varphi) = -mgl \cos \varphi + \frac{l_z^2}{2m\ell^2 \sin^2 \varphi}.$$

Fissati i dati iniziali $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0))$, se

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\varphi}^2(0) - V_{\text{eff}}(\varphi(0))$$

è l'energia del sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}_R(\varphi, \dot{\varphi})$, si ha, se $\dot{\varphi}(0) \geq 0$ e fin tanto che $\varphi(t)$ si mantiene positivo,

$$t = \sqrt{\frac{m\ell^2}{2}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\varphi)}}, \quad \theta(t) = \theta(0) + \frac{l_z}{\sqrt{2m\ell^2}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{E - V_{\text{eff}}(\varphi)}}.$$

La prima equazione definisce implicitamente $\varphi(t)$ e la seconda dà $\theta(t)$ in termini di $\varphi(t)$ e quindi di t . Se poniamo $a := l_z^2/2m\ell^2$ e $b := mgl$, si ha

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{a}{\sin^2 \varphi} - b \cos \varphi, \quad V'_{\text{eff}}(\varphi) = -\frac{2a}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad V''_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{6a}{\sin^4 \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{2a}{\sin^2 \varphi} + b \cos \varphi.$$

Il grafico dell'energia potenziale efficace è rappresentato nella figura 13.1 per $a = 1$ e $b = 4$ (per valori diversi dei parametri, l'andamento qualitativo del grafico non cambia).

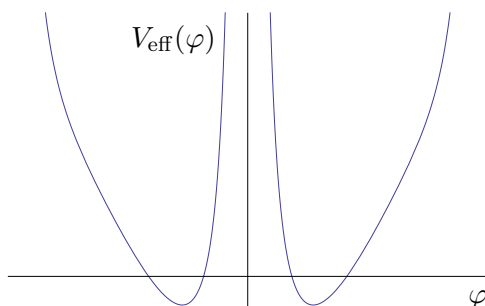


Figura 13.1: Grafico dell'energia potenziale efficace dell'esercizio 30 nel caso $a = 1$ e $b = 4$.

Si hanno punti d'equilibrio per valori di φ tali che

$$\frac{2a}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi = b \sin \varphi \implies \cos \varphi = \frac{2a}{b} \sin^4 \varphi.$$

Se $a \neq 0$, si vede graficamente (cfr. la figura 13.2) che l'ultima equazione ammette due soluzioni $\pm\varphi_0$, in corrispondenza delle quali si ha

$$V''_{\text{eff}}(\pm\varphi_0) = \frac{6a}{\sin^4 \varphi_0} \cos^2 \varphi_0 + \frac{2a}{\sin^2 \varphi_0} + b \cos \varphi_0 = \frac{24a^2}{b^2} \sin^4 \varphi_0 + \frac{2a}{\sin^2 \varphi_0} + 2a \sin^4 \varphi_0 > 0.$$

Quindi $\pm\varphi_0$ sono configurazioni di equilibrio stabili. In corrispondenza della soluzione $\varphi(t) = \varphi_0$ si ha $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$, dove $\omega := \ell_z^2 / 2m\ell^2 \sin^2 \varphi_0$: il pendolo ruota intorno all'asse verticale mantenendo un'inclinazione costante. Per qualsiasi altro dato iniziale il pendolo ruota intorno alla verticale, mentre l'angolo d'inclinazione φ compie delle oscillazioni intorno a uno dei due valori di equilibrio $\pm\varphi_0$. Se invece $a = 0$ (i.e. $\ell_z = 0$, che corrisponde a dati iniziali tali che $\dot{\theta}(0) = 0$), il pendolo si muove in un piano $\theta = \text{cost.}$ e le equazioni del moto si riducono a quelle del pendolo semplice: $\ell\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$.]

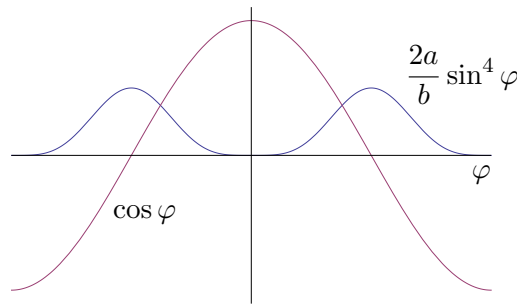


Figura 13.2: Grafico delle funzioni $(2a/b) \sin^4 \varphi$ e $\cos \varphi$ nel caso $a = 1$ e $b = 4$.

Esercizio 31 Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dot{\mathbf{x}}^{(1)}, \dot{\mathbf{x}}^{(2)}) = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{x}}^{(1)}|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{x}}^{(2)}|^2 - V(|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|) - \lambda (m_1 g z_1 + m_2 g z_2),$$

dove $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\lambda \in \{0, 1\}$, che descrive due punti materiali in \mathbb{R}^3 che interagiscono attraverso una forza che verifica le condizioni del §31.1 (problema dei due corpi) e, se $\lambda = 1$, sono inoltre sottoposti all'azione della forza peso. Si dimostri che è possibile trovare un sistema di coordinate tali che due di esse se $\lambda = 1$ e tre di esse se $\lambda = 0$ sono cicliche, e si interpreti il risultato alla luce del teorema di Noether (teorema 63.15). [Suggerimento. Il sistema è invariante per traslazioni lungo gli assi x e y e, se $\lambda = 0$, anche per traslazioni lungo l'asse z . Poiché i gruppi delle traslazioni commutano tra loro, per il teorema di Noether è possibile trovare un sistema di coordinate in cui due (se $\lambda = 1$) o tre (se $\lambda = 0$) sono cicliche. Il nuovo sistema di coordinate si ottiene definendo

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) := \frac{m_1 \mathbf{x}^{(1)} + m_2 \mathbf{x}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) := \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)},$$

che rappresentano, rispettivamente, le coordinate del centro di massa e le coordinate relative. In termini delle nuove coordinate la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{x}}_0|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(|\mathbf{x}|) - \lambda \left(M g z_0 + 2 \frac{m_1 m_2}{M} g z \right),$$