

# 15 | Moto dei sistemi rigidi pesanti

## §68 Trottola di Lagrange

Consideriamo un sistema rigido di massa  $m$  vincolato a un punto fisso  $O$  e soggetto all'azione della forza peso  $-m\mathbf{g}$ , dove  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ , o di un'altra forza che risulti invariante per rotazioni intorno all'asse verticale (cfr. la figura 15.1). Scegliamo un sistema di riferimento in cui l'asse verticale sia l'asse  $e_z$ . Il problema ha tre gradi di libertà e ammette due integrali primi; oltre all'energia  $E = T + V$ , dove  $T$  è l'energia cinetica e  $V$  è l'energia potenziale, si conserva anche la componente  $l_z$  del momento angolare lungo l'asse  $e_z$ , per il teorema di Noether (teorema 62.19), come conseguenza dell'invarianza per rotazioni intorno all'asse  $e_z$ .

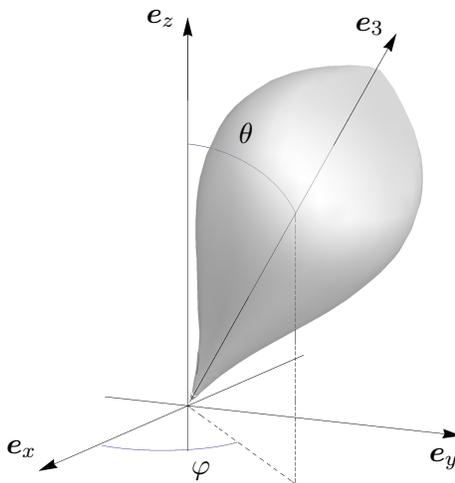


Figura 15.1: Trottola di Lagrange.

**Definizione 68.1** (TROTTOLE SIMMETRICHE O DI LAGRANGE) *La trottola simmetrica (o trottola di Lagrange) è un sistema rigido vincolato a un punto fisso,*

- che sia sottoposto a una forza di energia potenziale simmetrica rispetto all'asse verticale,
- il cui ellissoide d'inerzia sia un ellissoide di rotazione,
- il cui centro di massa si trovi sull'asse di simmetria rotazionale.

L'asse di simmetria del sistema rigido si chiama asse della trottola. Se l'energia potenziale è quella gravitazionale, la trottola simmetrica viene chiamata trottola pesante.

**Osservazione 68.2** Nel caso della trottola di Lagrange, una rotazione intorno all'asse di simmetria  $\mathbf{e}_3$  non cambia la lagrangiana, e quindi deve esistere, per il teorema di Noether, un ulteriore integrale primo (oltre a  $l_z$  ed  $E$ ).

**Teorema 68.3** Gli angoli di Eulero  $(\varphi, \theta, \psi)$  costituiscono un sistema di coordinate per la trottola di Lagrange, in cui le coordinate  $\varphi$  e  $\psi$  sono cicliche.

*Dimostrazione.* La lagrangiana della trottola di Lagrange è invariante per rotazioni intorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  e per rotazioni intorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ . Gli angoli  $\varphi$  e  $\psi$  rappresentano, rispettivamente, una rotazione intorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  e una rotazione intorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ . Inoltre i gruppi corrispondenti commutano tra loro (cfr. l'esercizio 1), quindi, per il teorema di Noether (teorema 63.15),  $\varphi$  e  $\psi$  sono entrambe coordinate cicliche. ■

**Definizione 68.4** Nel moto della trottola di Lagrange, l'angolo  $\varphi$  prende il nome di angolo azimutale o azimuth.

**Osservazione 68.5** Come conseguenza del teorema 68.3 il problema del moto della trottola di Lagrange, che *a priori* ha tre gradi di libertà, si riduce a un problema con un solo grado di libertà (per la coordinata  $\theta$ ). Lo stesso risultato vale purché l'energia potenziale sia invariante per rotazioni intorno a un qualsiasi asse prefissato, che può quindi essere scelto come asse  $\mathbf{e}_z$ .

**Lemma 68.6** Se la forza a cui è sottoposta la trottola di Lagrange di massa  $m$  è la forza peso  $-m\mathbf{g}$ , allora l'energia potenziale, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da

$$V = V(\theta) = mg\ell \cos \theta, \quad (68.1)$$

dove  $\ell$  è la distanza dal punto fisso  $O$  del centro di massa della trottola e  $g = |\mathbf{g}|$ .

*Dimostrazione.* Usando la definizione di energia potenziale gravitazionale, e integrando sul sistema rigido  $\mathcal{C}$ , si ottiene (cfr. l'esercizio 23 del capitolo 12)

$$\int_{\mathcal{C}} d\mathbf{Q} g z(\mathbf{Q}) \rho(\mathbf{Q}) = mg \left( \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{Q} z(\mathbf{Q}) \rho(\mathbf{Q}) \right),$$

dove  $\rho(\mathbf{Q})$  è la densità di massa e  $z(\mathbf{Q})$  è la coordinata lungo l'asse  $\mathbf{e}_z$  del punto di coordinata  $\mathbf{Q}$ . La (68.1) segue dalla definizione della variabile  $\theta$  e dalla definizione di centro di massa. ■

**Lemma 68.7** *L'energia cinetica della trottola di Lagrange, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2,$$

dove  $I_1 = I_2$  e  $I_3$  sono gli assi d'inerzia principali della trottola.

*Dimostrazione.* Segue dal corollario 46.7. ■

**Teorema 68.8** *La lagrangiana della trottola di Lagrange, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta, \quad (68.2)$$

con le notazioni del lemma 68.6 e del lemma 68.7.

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V$  e dai lemmi 68.6 e 68.7. ■

**Osservazione 68.9** La lagrangiana (68.2) non dipende da  $\varphi$  né da  $\psi$ , consistentemente con il fatto che  $\varphi$  e  $\psi$ , per il teorema 68.3, sono variabili cicliche. ■

**Corollario 68.10** *Alle coordinate cicliche  $\varphi$  e  $\psi$  corrispondono gli integrali primi*

$$l_z = \dot{\varphi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta, \quad L_3 = \dot{\varphi} I_3 \cos \theta + \dot{\psi} I_3, \quad (68.3)$$

che costituiscono le componenti del momento angolare, rispettivamente, lungo l'asse  $e_z$  e lungo l'asse  $e_3$ .

*Dimostrazione.* Poiché le coordinate  $\varphi$  e  $\psi$  sono cicliche, per il teorema di Noether, i momenti  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}$  e  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\psi}$  si conservano. Per calcolo esplicito a partire dalla (68.2) si trova che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = l_z, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = L_3,$$

se  $l_z$  e  $L_3$  sono definiti come in (68.3). ■

**Teorema 68.11** *L'inclinazione  $\theta$  dell'asse della trottola rispetto alla verticale varia nel tempo come nel sistema unidimensionale di energia*

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad (68.4)$$

dove

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (68.5)$$

prende il nome di energia potenziale efficace della trottola.

*Dimostrazione.* Esprimendo, in  $\mathcal{L}$ ,  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  in termini degli integrali primi  $l_z$  e  $L_3$ , troviamo che l'energia del sistema descritto dalla lagrangiana (68.2) è data da

$$E_{\text{TOT}} = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + \frac{(l_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta,$$

così che, definendo

$$E := E_{\text{TOT}} - \frac{L_3^2}{2I_3},$$

si ottiene la (68.4). ■

**Osservazione 68.12** Il sistema unidimensionale con energia (68.4) soddisfa le equazioni di Lagrange corrispondenti alla *lagrangiana ridotta*

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta), \quad (68.6)$$

che si ottiene a partire dalla (68.2), utilizzando il fatto che le due variabili  $\varphi$  e  $\psi$  sono cicliche e applicando, due volte di seguito, il metodo di Routh (cfr. il §59 del capitolo 12).

**Definizione 68.13** (SISTEMA RIDOTTO) *Il sistema unidimensionale di lagrangiana (68.6) prende il nome di sistema ridotto della trottola di Lagrange.*

**Lemma 68.14** *La legge di variazione dell'angolo azimutale  $\varphi$  è data da*

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad (68.7)$$

dove  $l_z$  e  $L_3$  sono gli integrali primi in (68.3).

*Dimostrazione.* Segue dalle definizioni di  $l_z$  e  $L_3$  in (68.3), moltiplicando la seconda delle (68.3) per  $\cos \theta$  e quindi considerandone la differenza con la prima. ■

**Osservazione 68.15** La funzione  $\mathcal{L}_0$  in (68.6) è singolare in  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . Tuttavia la funzione  $\theta(t)$ , tale che  $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$  individua la configurazione della trottola all'istante  $t$ , non presenta singolarità in corrispondenza degli istanti in cui l'asse di simmetria della trottola  $\mathbf{e}_3$  viene a trovarsi in posizione verticale, i.e. parallelo a  $\mathbf{e}_z$ . Questa apparente contraddizione si risolve tenendo conto che

- $l_z$  e  $L_3$  in (68.3) sono integrali primi;
- $\mathcal{L}_0$  descrive il moto in corrispondenza di valori fissati per  $l_z$  e  $L_3$ .

Se i dati iniziali sono tali che  $|l_z| \neq |L_3|$ , si deve avere  $\theta(t) \neq 0$  e  $\theta(t) \neq \pi$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e pertanto la singolarità di  $\mathcal{L}_0$  è fuori della regione in cui si svolge il moto. Se al contrario  $l_z = L_3$ ,  $\mathcal{L}_0$  assume la forma

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - \frac{L_3^2(1 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta, \quad (68.8)$$

dove la funzione

$$\frac{L_3^2(1 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}$$

è differenziabile anche in  $\theta = 0$ . Inoltre in questo caso si ha  $\theta(t) \neq \pi \forall t \in \mathbb{R}$ . Si noti che, se  $\theta(t)$  varia nel tempo, in corrispondenza degli istanti  $t_0$  tali che  $\theta(t_0) = 0$ , gli angoli  $\varphi(t_0)$  e  $\psi(t_0)$  in principio non sono definiti (cfr. l'osservazione 46.4). Tuttavia, poiché  $\theta(t)$  è differenziabile anche in  $t = t_0$ , utilizzando la soluzione  $\theta(t)$  in (68.3), si determinano  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  che, in  $t = t_0$ , saranno definiti per continuità come

$$\varphi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t_0 + \varepsilon), \quad \psi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(t_0 + \varepsilon),$$

con i limiti presi lungo la traiettoria (per  $t \neq t_0$  entrambi  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  sono definiti in modo univoco). Analogamente può essere discusso il caso  $l_z = -L_3$ :  $\mathcal{L}_0$  assume allora la forma

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - \frac{L_3^2(1 + \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

e, ragionando come per la (68.8), si vede facilmente che  $\mathcal{L}_0$  non è singolare in  $\theta = \pi$ . Di nuovo, se  $\theta(t)$  varia nel tempo e se  $t_0$  è l'istante in cui  $\theta(t_0) = \pi$ , gli angoli  $\varphi(t_0)$  e  $\psi(t_0)$  sono definiti come limiti lungo le traiettorie.

**Osservazione 68.16** Riscrivendo le (68.3) nella forma

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_3}{I_1} + \frac{L_3 - l_z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad (68.9)$$

si vede che, se i dati iniziali sono tali che  $l_z = L_3$ , allora

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_1(1 + \cos \theta)}, \quad \dot{\psi} = L_3 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_1(1 + \cos \theta)} \right),$$

così che, per  $\theta = 0$ ,

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \frac{d}{dt}(\varphi + \psi) = \frac{L_3}{I_3} = \Omega_3,$$

coerentemente con il fatto che, se  $\theta = 0$ , l'angolo di rotazione è  $\varphi + \psi$  e la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione è  $L_3$ . Analogamente si discute il caso  $l_z = -L_3$ .

## §69 Studio del sistema ridotto della trottola di Lagrange

Per studiare il sistema unidimensionale di energia (68.4), può essere conveniente introdurre la variabile  $u = \cos \theta$ , con  $u \in [-1, 1]$ . Poniamo anche

$$a := \frac{l_z}{I_1}, \quad b := \frac{L_3}{I_1}, \quad \alpha := \frac{2E}{I_1}, \quad \beta := \frac{2mg\ell}{I_1}, \quad (69.1)$$

così che la legge di conservazione dell'energia (68.4) si può esprimere attraverso l'equazione

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2, \quad (69.2)$$

purché sia  $\sin \theta \neq 0$ , e la legge di variazione della coordinata  $\varphi$ , espressa dalla (68.7), diventa

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}. \quad (69.3)$$

**Osservazione 69.1** La funzione  $f(u)$  è un polinomio di terzo grado e si ha  $f(\pm\infty) = \pm\infty$ . A un moto effettivo corrispondono solo costanti  $a, b, \alpha, \beta$  tali che  $f(u) \geq 0$  per qualche  $u \in [-1, 1]$ . Nella trattazione seguente considereremo quindi il caso in cui esiste almeno un valore  $u \in [-1, 1]$  in corrispondenza del quale la funzione  $f(u)$  sia positiva.

**Osservazione 69.2** Per ottenere la (69.2) si è utilizzato il fatto che  $\dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$ , così che l'uso della (69.2) per descrivere il moto dell'angolo d'inclinazione dell'asse della trottola è giustificato fintanto che si abbia  $\sin \theta \neq 0$ . Il caso  $\sin \theta = 0$  corrisponde a  $l_z = \pm L_3$  (i.e.  $a = \pm b$ , in termini dei parametri in (69.1)) e va quindi discusso a parte, utilizzando il fatto che, essendo  $l_z, L_3$  costanti del moto, per lo studio del moto vicino ai poli, si deve tener conto della forma che assume la lagrangiana in tal caso (cfr. l'osservazione 68.15). La legge di conservazione dell'energia dà

$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta \cos \theta) - a^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (69.4)$$

per  $l_z = L_3$ , e

$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta \cos \theta) - a^2 \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (69.5)$$

per  $l_z = -L_3$ , avendo tenuto conto delle notazioni (69.1). Le (69.4) e (69.5) sono le equazioni da studiare per determinare il moto dell'asse della trottola nelle vicinanze dei poli. Si noti che il campo vettoriale è differenziabile in tutta la regione in cui si svolge il moto: infatti se  $l_z = \pm L_3$  non può aversi, rispettivamente,  $\cos \theta = \mp 1$ .

### 69.1 Caso 1: $b \neq 0, a \neq \pm b$

Consideriamo prima il caso  $b \neq 0$  (i.e.  $L_3 \neq 0$ ); se  $b = 0$  la trattazione in realtà si semplifica, come vedremo (cfr. il caso 4 più avanti). Supponiamo inizialmente che sia  $a \neq \pm b$ : in tal caso

$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$  e, quindi,  $f(u)$  ha una radice reale  $u_3 > 1$  e, in corrispondenza di moti per il sistema, due radici reali nell'intervallo  $(-1, 1)$ , che corrispondono a due radici semplici  $u_1$  e  $u_2$ , se distinte (cfr. la figura 15.2), e a una radice doppia  $u_1$ , se coincidenti.

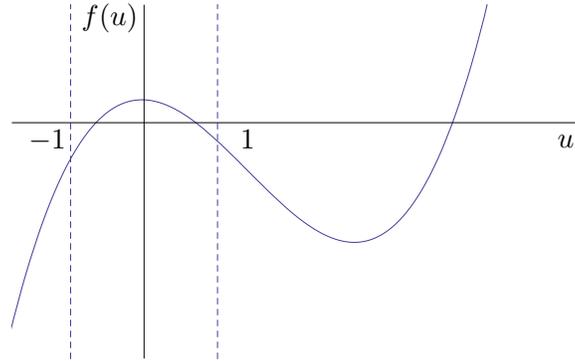


Figura 15.2: Grafico della funzione  $f(u)$  nel caso di due radici distinte nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

Nel secondo caso la radice doppia  $u_1 = \cos \theta_1$  costituisce l'unico valore  $u$  per cui sia possibile il moto: corrispondentemente si ha  $u(t) = u_1 \forall t \in \mathbb{R}$  (e  $\dot{u}(t) = f(u(t)) = 0$ ). L'asse della trottola si muove lungo il cono di rotazione intorno alla verticale che ha angolo di semiapertura costante  $\theta_1$  (il moto si dice allora *moto merostatico*). La (69.3) implica che  $\dot{\varphi}$  è costante (poiché  $\theta$  è costante) e dalla seconda delle (68.3) segue che anche  $\dot{\psi}$  deve essere costante. Poiché la velocità angolare, tenendo conto che  $\dot{\theta} = 0$ , è data da  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}_3$  (cfr. la (46.9) del capitolo sulla cinematica dei sistemi rigidi), con  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  costanti, concludiamo che la trottola descrive un moto di *precessione regolare*.

Nel caso di due radici distinte  $u_1 = \cos \theta_1$  e  $u_2 = \cos \theta_2$ , l'asse della trottola varia periodicamente tra i due paralleli individuati dai valori  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , corrispondenti, rispettivamente, a  $u_1$  e  $u_2$ : se  $u_1 < u_2$  si ha  $\theta_1 > \theta_2$ , poiché in  $[0, \pi)$  la funzione  $\cos \theta$  è monotona decrescente. La variazione periodica dell'inclinazione  $\theta$  dell'asse della trottola si chiama *nutazione*.

Consideriamo ora il moto azimutale dell'asse della trottola. Il punto d'intersezione dell'asse con la sfera unitaria  $S_2$  (che prende il nome di *vertice della trottola*) si muove in un anello compreso tra i paralleli  $\theta_2$  e  $\theta_1$ , e la variazione dell'azimut è determinata dalla (69.3).

Se la radice  $u_0$  dell'equazione  $a - bu = 0$  si trova all'esterno dell'intervallo  $(u_1, u_2)$ , allora l'angolo  $\varphi$  varia monotonamente e l'asse traccia sulla sfera unitaria una curva qualitativamente di tipo *cicloide accorciata* (cfr. la figura 15.3 e l'esercizio 2); in realtà la sua espressione analitica è ben più complicata.

Se la radice  $u_0$  dell'equazione  $a - bu = 0$  si trova all'interno dell'intervallo  $(u_1, u_2)$  (e quindi in particolare  $a/b < 1$ ), allora le velocità di variazione di  $\varphi$ , rispettivamente, sui paralleli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono opposte, e l'asse traccia sulla sfera unitaria una curva con nodi, qualitativamente di tipo *cicloide allungata* (cfr. la figura 15.3 e l'esercizio 2).

Se infine la radice  $u_0$  dell'equazione  $a - bu = 0$  coincide con un estremo dell'intervallo  $[u_1, u_2]$ , allora l'angolo  $\varphi$  varia monotonamente e l'asse della trottola traccia sulla sfera unitaria una curva con cuspidi a tangenza meridiana, qualitativamente di tipo *cicloide* (cfr. la figura 15.3 e l'esercizio 2).

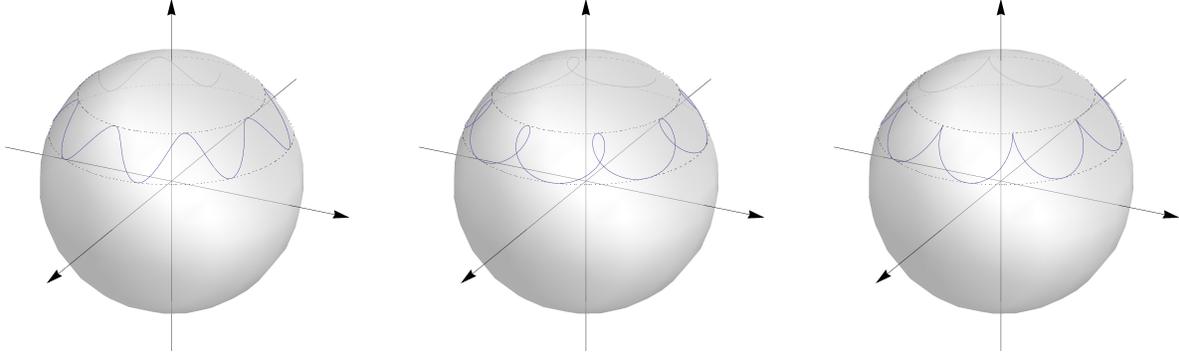


Figura 15.3: Moto del vertice della trottola a seconda del valore della radice  $u_0$ .

**Osservazione 69.3** L'eventualità che  $u_0$  coincida con un estremo può presentarsi solo per la radice maggiore  $u_2$  (corrispondente al parallelo superiore  $\theta_2$ ). Infatti  $\dot{\varphi}$  e  $f(u)$  devono annullarsi contemporaneamente, quindi dal confronto delle (69.2) e (69.3) deve risultare simultaneamente  $\alpha - \beta u = 0$  e  $a - bu = 0$ , i.e.  $u_0 = \alpha/\beta = a/b$ , così che

$$f(u) = \frac{\beta}{b} (a - bu) g(u), \quad g(u) := (1 - u^2) - \frac{b}{\beta} (a - bu), \quad (69.6)$$

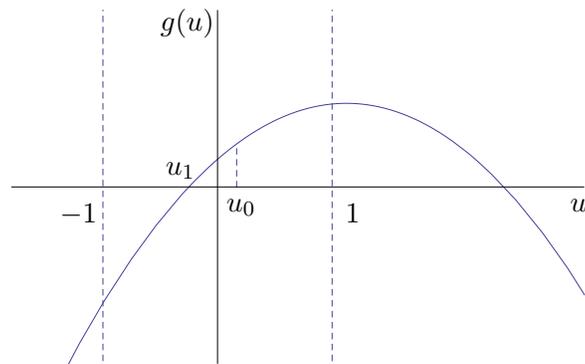


Figura 15.4: Grafico della funzione  $g(u)$  definita in (69.6).

dove la funzione  $g(u)$  ha due radici che coincidono con  $u_3$  e la radice di  $f(u)$  interna all'intervallo

$(-1, 1)$  e distinta da  $a/b$ . Poiché

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(u) = -\infty, \quad g(a/b) > 0,$$

la radice di  $g(u)$  interna a  $(-1, 1)$  si trova a sinistra di  $a/b$ , i.e. si ha  $u_1 < u_2 = a/b$  (cfr. la figura 15.4). Il caso  $u_0 = u_2$ , sebbene inusuale, si osserva ogni qual volta si lasci andare andare l'asse della trottola lanciata ( $\dot{\psi} \neq 0$ ), senza velocità azimutale iniziale ( $\dot{\varphi} = 0$ ), con un'inclinazione  $\theta_2$ : la trottola dapprima cade, poi si rialza, e descrive il moto indicato sopra.

Il moto azimutale dell'asse della trottola, cioè la variazione periodica dell'angolo  $\varphi$ , prende il nome di *precessione*. In conclusione possiamo dire che il moto risultante della trottola (nel caso in considerazione) consiste della rotazione intorno al proprio asse (o *rotazione propria*), della nutazione e della precessione. Ciascuna delle tre rotazioni ha un suo proprio periodo; se i periodi sono incommensurabili, la trottola non torna mai allo stato iniziale; se sono commensurabili il moto risultante è periodico.

## 69.2 Caso 2: $b \neq 0$ , $a = -b$

Se  $b \neq 0$  e  $a = -b$  occorre studiare l'equazione (cfr. la (69.5))

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_1} (E - V_{\text{eff}}(\theta)) = \tilde{f}_-(u), \quad \tilde{f}_-(u) := (\alpha - \beta u) - a^2 \frac{1+u}{1-u},$$

con  $u = \cos \theta$ . Si ha

$$\frac{d\tilde{f}_-}{du}(u) = -\beta - \frac{2a^2}{(1-u)^2},$$

quindi  $\tilde{f}_-$  è decrescente; inoltre  $\tilde{f}_-$  ha un asintoto verticale in  $u = 1$  e, in  $u = -1$ , vale  $\tilde{f}_-(-1) = \alpha + \beta$  (cfr. la figura 15.5).

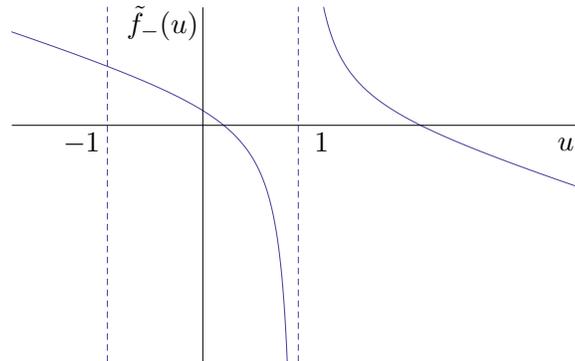


Figura 15.5: Grafico della funzione  $\tilde{f}_-(u)$  nel caso di una sola radice nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

Pertanto, se  $\alpha + \beta < 0$ , non si hanno moti possibili. Se  $\alpha + \beta = 0$  l'unica soluzione ammissibile è  $u = -1$  (i.e.  $\theta = \pi$ ), che corrisponde all'avere l'asse dell'trottola indefinitamente orientato lungo la verticale, verso il basso. Infine se  $\alpha + \beta > 0$  la funzione  $\tilde{f}_-$  ha una sola radice  $u_2 \in (-1, 1)$  e quindi l'asse della trottola arriva periodicamente al polo  $\theta = \pi$  con velocità  $\dot{\theta} \neq 0$  e, raggiuntolo, prosegue al di là verso il parallelo corrispondente alla radice  $u_2$ , e così via. Inoltre si ha  $\dot{\varphi} = a(1 + \cos\theta)/\sin^2\theta$ , così che  $\dot{\varphi} > 0$ : quindi mentre l'angolo  $\theta$  oscilla tra due valori intorno a  $\pi$ , l'angolo azimutale varia monotonamente.

**Osservazione 69.4** Si raggiungono le stesse conclusioni attraverso lo studio dell'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{I_1}{2} \left( \beta \cos\theta + a^2 \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right),$$

il cui grafico è rappresentato in figura 15.6. La funzione  $V_{\text{eff}}(\theta)$  ha un minimo in  $\theta = \pi$ ; la condizione  $\alpha + \beta > 0$  corrisponde a dati iniziali per cui  $E > V_{\text{eff}}(\pi)$ , a cui corrispondono traiettorie periodiche.

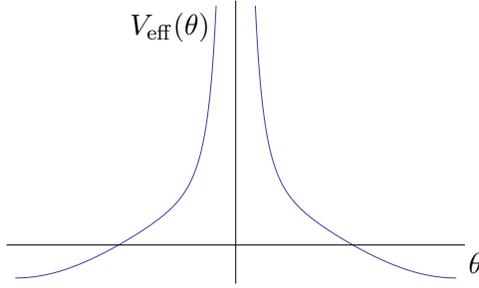


Figura 15.6: Grafico della funzione  $V_{\text{eff}}(\theta)$  per  $a = -b$ .

### 69.3 Caso 3: $b \neq 0$ , $a = b$

Se  $b \neq 0$  e  $a = b$  occorre studiare l'equazione (cfr. la (69.5))

$$\dot{\theta}^2 = 2I_1 (E - V_{\text{eff}}(\theta)) = \tilde{f}_+(u), \quad \tilde{f}_+(u) = (\alpha - \beta u) - a^2 \frac{1 - u}{1 + u}, \quad (69.7)$$

con  $u = \cos\theta$ . Si ha

$$\frac{d\tilde{f}_+}{du}(u) = -\beta + \frac{2a^2}{(1 + u)^2},$$

così che  $d\tilde{f}_+/du = 0$  per  $u_0 = -1 + a\sqrt{2/\beta}$ : quindi  $\tilde{f}_+$  ha un massimo per  $u = u_0$ , è crescente per  $u \in (-1, u_0)$  ed è decrescente per  $u > u_0$ . Inoltre  $\tilde{f}_+(-1) = -\infty$ ,  $\tilde{f}_+(1) = \alpha - \beta$ ,  $\tilde{f}_+(\infty) = -\infty$ . Si hanno perciò moti effettivi per il sistema solo se  $\tilde{f}_+(u_0) \geq 0$ . L'equazione

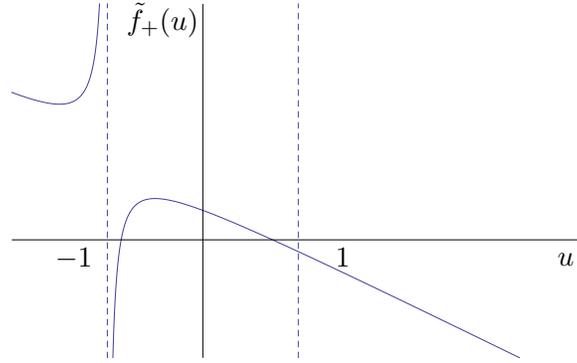


Figura 15.7: Grafico della funzione  $\tilde{f}_+(u)$  nel caso di due radici distinte nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

$\tilde{f}_+(u) = 0$  ha due radici semplici  $u_1$  e  $u_2$ , tali che  $u_1 < u_0 < u_2$ , se  $\tilde{f}_+(u_0) > 0$  (cfr. la figura 15.7) e a una radice doppia (ovvero due radici coincidenti  $u_1 = u_2 = u_0$ ) se  $\tilde{f}_+(u_0) = 0$ .

Nel caso in cui  $u_0$  sia l'unica radice si ha un unico valore  $u_0 = \cos \theta_0$  per cui il moto è possibile (moto merostatico). Nel caso in cui si abbiano invece due radici distinte  $u_1$  e  $u_2$  occorre distinguere diversi casi.

Se  $u_1 < u_2 < 1$ , si può ragionare come nel caso 1. In particolare si può utilizzare l'equazione (69.2) poiché in tale evenienza  $|u| \neq 1$  in ogni istante.

Se  $u = 1$  (i.e.  $\theta = 0$ ) è una delle due radici, si ha  $\tilde{f}_+(1) = \alpha - \beta = 0$ , che corrisponde a  $E = V_{\text{eff}}(0)$  in (69.7). Tenuto conto che l'energia potenziale efficace (68.5), per  $a = b$ , è

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{I_1}{2} \left( \beta \cos \theta + a^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \quad (69.8)$$

e quindi le sue derivate prime e seconde sono

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}(\theta) &= \frac{I_1}{2} \left( -\beta + \frac{2a^2}{(1 + \cos \theta)^2} \right) \sin \theta, \\ \frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2}(\theta) &= \frac{I_1}{2} \left[ \left( -\beta + \frac{2a^2}{(1 + \cos \theta)^2} \right) \cos \theta + \frac{4a^2 \sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^3} \right], \end{aligned}$$

si vede che, per  $\theta = 0$  risulta

$$V_{\text{eff}}(0) = E, \quad \frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}(0) = 0, \quad \frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2}(0) = \frac{I_1}{2} \left( -\beta + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{I_1}{2} \frac{d\tilde{f}_+}{du}(1) = \frac{I_1}{2} \left( -\beta + \frac{\alpha^2}{2} \right).$$

Sono allora possibili due sottocasi (cfr. la figura 15.8):

- se  $\alpha^2 < 2\beta$  si ha  $[d\tilde{f}_+/du](1) < 0$  (in tal caso  $u_2 = 1$ ) e l'energia potenziale ha un punto di massimo in  $\theta = 0$  e quindi, poiché  $E = V_{\text{eff}}(0)$ , l'asse della trottola descrive un moto asintotico a  $\theta = 0$ ;

- se  $\alpha^2 > 2\beta$  si ha  $[d\tilde{f}_+/du](1) > 0$  (in tal caso  $u_1 = 1$ ) e l'energia potenziale ha un punto di minimo in  $\theta = 0$ , che quindi costituisce l'unico valore per cui si possa avere un moto effettivo per il sistema (si noti che  $\tilde{f}_+(u) < 0$  per  $u \in (-1, 1)$  in tal caso):  $\theta = 0$  costituisce un'inclinazione fissa per l'asse della trottola (moto merostatico).

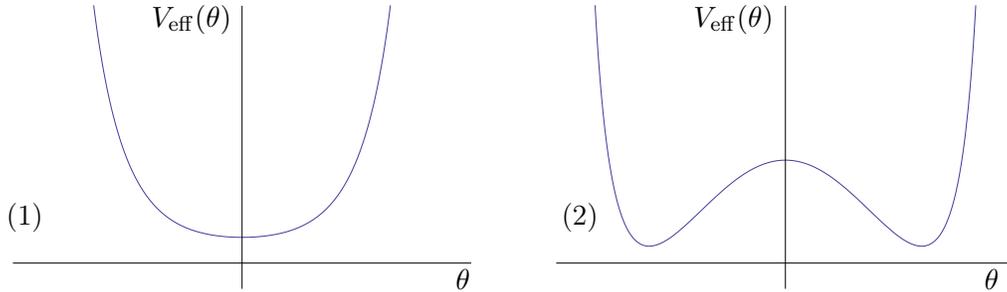


Figura 15.8: Grafico della funzione  $V_{\text{eff}}(\theta)$  per  $a = b$ : (1)  $a^2 > 2\beta$  e (2)  $a^2 < 2\beta$ .

**Osservazione 69.5** In termini della funzione  $\tilde{f}_+(u)$  i sue sottocasi corrispondono ai grafici rappresentati in figura 15.9.

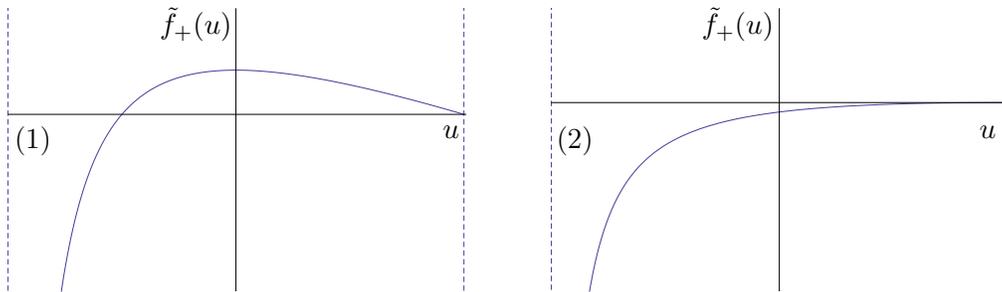


Figura 15.9: Grafico della funzione  $\tilde{f}_+(u)$  nell'intervallo  $(-1, 1]$  per  $a = b$ : (1)  $u_2 = 1$  e (2)  $u_1 = 1$ .

Il caso  $u_1 < 1 < u_2$  si discute in modo simile (cfr. l'esercizio 3). Il caso  $1 < u_1 < u_2$  non va considerato perché non corrisponde a moti ammissibili per il sistema.

#### 69.4 Caso 4: $b = 0$

Resta da discutere il caso  $b = 0$  (i.e.  $L_3 = 0$ ). Poiché  $L_3$  è una costante del moto (cfr. il corollario 68.10) e  $I_3$  è costante, anche

$$\Omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

è costante. In particolare se  $\Omega_3 = 0$  (assenza di rotazione intorno all'asse della trottola) l'analisi precedente si semplifica notevolmente. Infatti in tal caso la lagrangiana (68.2) si riduce a

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mg\ell \cos \theta,$$

che è la lagrangiana di un pendolo sferico di lunghezza  $\ell$  e massa  $m = I_1 \ell^{-2}$  (cfr. gli esercizi 58 del capitolo 11 e 30 del capitolo 13).

**Osservazione 69.6** Dalla discussione precedente si evince che la situazione più usuale è quella descritta come caso 1 (cfr. il §69.1), dal momento che le altre corrispondono a dati iniziali che hanno misura nulla (richiedendo relazioni specifiche tra i parametri del sistema).

### 69.5 Trottola di Lagrange in assenza di forze

In assenza di forza peso ( $g = 0$ ) l'energia potenziale efficace (68.5) si riduce a

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}. \quad (69.9)$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere  $L_3 \geq 0$  (questo corrisponde a una scelta dell'orientazione dell'asse di simmetria rotazionale). Se  $g = 0$  la direzione verticale non è fissata; possiamo sceglierla in modo che sia  $\mathbf{l} = l_z \mathbf{e}_z$ , con  $l_z = |\mathbf{l}| = |\mathbf{L}|$  (ricordiamo che  $|\mathbf{l}|$  è un integrale primo per  $g = 0$ ). Con questa scelta  $l_z \geq L_3$  e la (69.9) ha un minimo per  $\theta_0$  tale che  $L_3 = |\mathbf{L}| \cos \theta_0$ ; infatti risulta

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}(\theta) = \frac{(|\mathbf{L}| - L_3 \cos \theta)(L_3 - |\mathbf{L}| \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta},$$

che si annulla (solo) per  $\theta = \theta_0$ , se  $L_3 = |\mathbf{L}| \cos \theta_0$ , e

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2}(\theta_0) = |\mathbf{L}|^2 I_1 > 0.$$

Si ha in corrispondenza la soluzione  $\theta(t) = \theta_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ : l'angolo di nutazione è perciò costante, e le (68.9) danno

$$\dot{\varphi} = \frac{|\mathbf{L}|(1 - \cos^2 \theta_0)}{I_1 \sin^2 \theta_0} = \frac{|\mathbf{L}|}{I_1}, \quad \dot{\psi} = L_3 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right), \quad (69.10)$$

che esprimono, rispettivamente, la velocità angolare di precessione (intorno all'asse verticale) e di rotazione propria (intorno all'asse di simmetria).

**Osservazione 69.7** Le (69.10) vanno confrontate con le velocità angolari  $\mu$  e  $\nu$  dell'osservazione 49.4: risulta  $\dot{\varphi} = \nu$  e  $\dot{\psi} = \mu$  (cfr. la (49.5)). Ne concludiamo che la descrizione del moto di un sistema rigido in assenza di forza peso in termini degli angoli di Eulero corrisponde alla descrizione secondo Poincaré (con la scelta fatta degli assi coordinati).

**Osservazione 69.8** Se invece  $\mathbf{l}$  è parallelo all'asse  $\mathbf{e}_3$  (cioè all'asse della trottola), allora il moto della trottola consiste in una rotazione propria intorno al proprio asse (cfr. l'esercizio 4).

## §70 Trottola addormentata e trottola veloce

Nel presente paragrafo completiamo l'analisi iniziata nel paragrafo precedente riguardo alla trottola di Lagrange. In particolare consideriamo condizioni iniziali in cui l'asse della trottola sia parallelo o comunque vicino all'asse verticale. Vedremo che il moto della trottola dipende fortemente da quanto velocemente la trottola ruota intorno al proprio asse all'istante iniziale.

**Lemma 70.1** *La rotazione stazionaria intorno alla verticale è instabile per il moto della trottola di Lagrange.*

*Dimostrazione.* Si ragiona come nell'osservazione 47.10 (cfr. anche il teorema 50.4). ■

Il lemma 70.1 costituisce un risultato di instabilità per la trottola. Se tuttavia siamo interessati al moto dell'asse della trottola, piuttosto che al moto della trottola stessa, possiamo chiederci se l'asse rimanga vicino alla verticale quando lo sia inizialmente. In altre parole possiamo studiare la stabilità di  $\theta = 0$  per il moto dell'asse.

**Lemma 70.2** *Per il moto dell'asse della trottola di Lagrange,  $\theta = 0$  è una configurazione di equilibrio stabile se la velocità di rotazione  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  verifica la condizione*

$$\Omega_3^2 \geq \frac{4mg\ell I_1}{I_3^2}, \quad (70.1)$$

*ed è una configurazione di equilibrio instabile altrimenti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso in cui sia  $l_z = L_3$ . Sviluppando l'energia potenziale efficace (68.5) in potenze di  $\theta$ , si trova

$$V_{\text{eff}}(\theta) = A_0 + A_2\theta^2 + A_4\theta^4 + O(\theta^6),$$

dove

$$A_0 = mg\ell, \quad A_2 = \frac{L_3^2}{8I_1} - \frac{mg\ell}{2}, \quad A_4 = \frac{L_3^2}{48I_1} + \frac{mg\ell}{24}.$$

Quindi  $\theta = 0$  è un punto di minimo se  $A_2 \geq 0$  (se  $A_2 = 0$  si usa il fatto che  $A_4$  è positivo). Notando che  $L_3 = I_3\Omega_3$ , segue la stabilità della configurazione  $\theta = 0$  sotto la condizione (70.1).

Se  $l_z \neq L_3$ , poniamo  $l_z = L_3(1 + \mu)$ , dove  $\mu$  dipende dai dati iniziali  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$  ed tale che (cfr. l'esercizio 5)

$$\lim_{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \rightarrow (0,0)} \mu = 0. \quad (70.2)$$

Riscriviamo allora l'energia potenziale efficace come

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_3^2 (1 + \mu - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (70.3)$$

Per  $\theta$  grande, il grafico di  $V_{\text{eff}}(\theta)$  è simile a quello del caso precedente ( $l_z = L_3$ ); in particolare  $\lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} V_{\text{eff}}(\theta) = +\infty$ . Al fine di studiare il grafico di  $V_{\text{eff}}(\theta)$  per  $\theta$  vicino a 0, può essere conveniente introdurre la variabile riscalata  $y := \theta/\sqrt{|\mu|}$ , in termini della quale la (70.3) dà

$$V_{\text{eff}}(\sqrt{|\mu|}y) = A \frac{|\mu|}{y^2} + B_0 + B_2 |\mu| y^2 + B_4 |\mu|^2 y^4 + O(|\mu|^3 y^6), \quad (70.4)$$

dove

$$A = \frac{L_3^2}{2I_1}, \quad B_0 = mgl + \frac{L_3^2}{2I_1} \mu \left(1 + \frac{\mu}{3}\right),$$

$$B_2 = \frac{L_3^2}{8I_1} \left(1 + \mu + \frac{4}{15} \mu^2\right) - \frac{mgl}{2}, \quad B_4 = \frac{L_3^2}{48I_1} (1 + \mu) + \frac{L_3^2}{189I_1} \mu^2 + \frac{1}{24} mgl.$$

Se  $L_3^2 > 4I_1 mgl$ , si ha  $B_2 > 0$  purché  $\mu$  sia sufficientemente piccolo, ovvero, in virtù della (70.2), purché i dati iniziali  $\theta_0, \dot{\theta}_0$  siano sufficientemente vicini a 0.

I punti stazionari della (70.4) si trovano imponendo che la derivata prima sia nulla. Se  $B_2 > 0$  si trovano (cfr. l'esercizio 6) due punti di minimo simmetrici in corrispondenza dei valori  $y = \pm y_0$ , con

$$y_0 = \left( \frac{4L_3^2}{L_3^2 - 4I_1 mgl} \right)^{1/4} + O(\mu), \quad (70.5)$$

che corrispondono a due punti di minimo  $\theta_\mu = O(\sqrt{|\mu|})$  per la funzione (70.3).

Non si hanno invece punti stazionari se  $L_3^2 < 4I_1 mgl$ : in tal caso, per  $\mu$  piccolo, si ha  $B_2 < 0$ , e quindi, per  $y \neq 0$  vicino all'origine, la funzione (70.4) è decrescente per  $y > 0$  e crescente per  $y < 0$ . Ne deduciamo che  $\theta = 0$  corrisponde a un punto di equilibrio instabile.

Il caso  $L_3^2 = 4I_1 mgl$  va discusso a parte; si trova (cfr. l'esercizio 7) che esistono ancora due punti di minimo simmetrici  $y = \pm y_1$ , anche se in questo caso  $y_1 = O(|\mu|^{-1/6})$ , che implica  $\theta_\mu = O(|\mu|^{1/3})$  per i minimi dell'energia potenziale efficace (70.3).

In conclusione, sotto la condizione (70.1), la (70.3) ha due minimi per  $\theta = \pm \theta_\mu$ , con  $\theta_\mu = O(\sqrt{|\mu|})$  se  $L_3^2 > 4I_1 mgl$  e  $\theta_\mu = O(|\mu|^{1/3})$  se  $L_3^2 = 4I_1 mgl$ . Nonostante  $V_{\text{eff}}(\theta) \rightarrow +\infty$  per  $\theta \rightarrow 0$ , come segue dalla (70.3),  $\theta = 0$  è ugualmente una configurazione di equilibrio stabile per l'asse della trottola. Infatti, se  $|\theta_0|, |\dot{\theta}_0| < \delta$ , con  $\delta$  sufficientemente piccolo, il moto

si svolge in una regione del piano  $(\theta, \dot{\theta})$  tale che, per qualche costante  $C$  e per ogni  $t \geq 0$ , si ha  $|\theta(t)|, |\dot{\theta}(t)| < \varepsilon := C\delta^\gamma$ , con  $\gamma = 1$  se  $L_3^2 > 4I_1 mgl$  e  $\gamma = 1/2$  se  $L_3^2 = 4I_1 mgl$  (cfr. l'esercizio 8). In altre parole, per ogni  $\varepsilon > 0$ , se scegliamo  $\delta = O(\varepsilon^{1/\gamma})$ , tutti i dati iniziali in un intorno di  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  di raggio  $\delta$  generano traiettorie che rimangono vicine a  $(0, 0)$  entro  $\varepsilon$  per ogni tempo: quindi  $(0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile. ■

**Definizione 70.3** (TROTTOLO ADDORMENTATA) *Se vale la condizione (70.1), si dice che la trottola è addormentata.*

Una trottola “addormentata” rimane vicino all’asse verticale. Quando l’attrito porta la velocità di rotazione della trottola addormentata al di sotto del valore (70.1), la trottola “si sveglia” e si allontana dall’asse verticale.

**Definizione 70.4** (TROTTOLO VELOCE) *Una trottola si dice veloce se l’energia cinetica di rotazione è molto più grande di quella potenziale, i.e. se  $I_3\Omega_3^2 \gg mgl$ .*

**Osservazione 70.5** Aumentare di un fattore  $\lambda$  la velocità angolare è equivalente a diminuire di un fattore  $\lambda^2$  volte il peso. Più precisamente se, partendo dalla stessa posizione iniziale della trottola, si moltiplica per  $\lambda$  volte la velocità angolare, la trottola percorrerà la stessa traiettoria che se l’accelerazione di gravità fosse diminuita di un fattore  $\lambda^2$  lasciando inalterata la velocità angolare. Quindi possiamo analizzare il caso  $g \rightarrow 0^+$  e utilizzare i risultati che troveremo per lo studio del caso  $|\Omega| \rightarrow +\infty$ .

**Lemma 70.6** *In assenza di forza peso, l’angolo  $\theta_0$  tale che  $l_z = L_3 \cos \theta_0$  è una configurazione di equilibrio stabile dell’asse della trottola. La frequenza delle piccole oscillazioni  $\theta$  intorno a  $\theta_0$  è uguale a*

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{L_3}{I_1} = \frac{I_3\Omega_3}{I_1}. \quad (70.6)$$

*Dimostrazione.* In assenza della forza peso, l’energia potenziale efficace (68.5) si riduce a

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}, \quad (70.7)$$

che è una funzione non negativa con un minimo nullo per  $\theta = \theta_0$ , dove  $\theta_0$  è lo zero dell’equazione  $l_z = L_3 \cos \theta$  (cfr. l’esercizio 4). Quindi  $\theta_0$  è una configurazione di equilibrio stabile per l’asse della trottola. Per piccole deviazioni da  $\theta_0$  dell’inclinazione dell’asse della trottola, si avranno piccole oscillazioni intorno a  $\theta_0$  (nutazione), di frequenza  $\omega_{\text{nut}}$  data dalla (70.6), come è facile calcolare esplicitamente tenendo conto che

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{I_3^2 \Omega_3^2}{2I_1} (\theta - \theta_0)^2 + O((\theta - \theta_0)^3).$$

per  $\theta$  vicino a  $\theta_0$  (cfr. il teorema 29.6). ■

**Osservazione 70.7** Dalla formula (68.9) si vede che, per  $\theta = \theta_0$ , l'azimut dell'asse è costante nel tempo, e quindi l'asse è fisso.

**Osservazione 70.8** Il moto della trottola in assenza di forza peso si può esaminare attraverso la descrizione secondo Poincot del §48 (cfr. anche l'osservazione 69.7). Per  $\theta = \theta_0$ , tale che  $l_z = L_3 \cos \theta_0$ , l'asse di simmetria  $\mathbf{e}_3$  è diretto lungo la direzione del momento angolare  $\mathbf{l}$ , l'ellissoide ruota intorno al suo asse  $\mathbf{e}_3$  e l'asse  $\mathbf{e}_z$  forma un angolo  $\theta_0$  con  $\mathbf{e}_3$ . In tali condizioni non c'è moto di precessione secondo Poincot, e l'asse è fisso (cfr. l'osservazione 70.7). Per piccole deviazioni dall'equilibrio, si ha un'oscillazione di  $\theta$  con frequenza data approssimativamente da  $\omega_{\text{nut}}$  in (70.6) – la frequenza tende a  $\omega_{\text{nut}}$  quando l'ampiezza della nutazione tende a zero. Equivalentemente, nella descrizione secondo Poincot, l'asse della trottola ruota uniformemente intorno all'asse individuato dal momento angolare, che conserva la sua posizione nello spazio: quindi l'asse della trottola descrive sulla sfera unitaria  $S_2$  una circonferenza (di raggio piccolo) il cui centro corrisponde al momento angolare. Questo vuol dire che il moto dell'asse della trottola che si chiama *nutazione* nella descrizione secondo Lagrange corrisponde al moto di *precessione* nella descrizione secondo Poincot. La formula (70.6) valida per la frequenza di una nutazione di ampiezza piccola è in accordo con la formula  $\omega_{\text{pr}} = |\mathbf{L}|/I_1$ , dell'osservazione 49.4, per la frequenza di precessione nella descrizione secondo Poincot: quando l'ampiezza della nutazione tende a zero, si ha  $I_3\Omega_3 = L_3 \rightarrow |\mathbf{L}|$ . Mentre l'asse della trottola ruota intorno a  $\mathbf{l}$ , cambia l'angolo  $\theta$  che esso forma con l'asse verticale  $\mathbf{e}_z$ , oscillando intorno al valore  $\theta_0$ , e l'oscillazione è tale da mantenere costante la componente  $L_3$  di  $\mathbf{l}$  lungo l'asse della trottola ( $l_z$  rimane costante perché  $\mathbf{l}$  è costante, e l'asse  $\mathbf{e}_z$  è fisso).

**Lemma 70.9** Siano  $f, h$  funzioni di classe  $C^2$  in un intorno di  $x = 0$ . Se la funzione  $f$  ha un minimo per  $x = 0$  e ammette sviluppo di Taylor  $f(x) = Ax^2/2 + O(x^3)$ , con  $A > 0$ , e la funzione  $h$  ammette sviluppo di Taylor  $h(x) = B + Cx + O(x^2)$ , allora, per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, la funzione  $f_\varepsilon = f(x) + \varepsilon h(x)$  ha un minimo nel punto  $x_\varepsilon$  tale che

$$x_\varepsilon = -\frac{C\varepsilon}{A} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{d^2 f_\varepsilon}{dx^2}(x_\varepsilon) = A + O(\varepsilon).$$

*Dimostrazione.* Si definisca  $F(x, \varepsilon) = df_\varepsilon/dx$ . Si ha  $F(0, 0) = 0$  e  $[\partial F/\partial x](0, 0) = A > 0$ . Per il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4), per ogni  $\varepsilon$  in un intorno di 0 esiste  $x = x(\varepsilon)$  tale che  $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ . Inoltre si ha  $\partial x/\partial \varepsilon = -[\partial F/\partial x]/[\partial F/\partial \varepsilon]$ , da cui si ottiene  $x(\varepsilon) = -\varepsilon A/C + O(\varepsilon^2)$ . ■

**Corollario 70.10** L'energia potenziale efficace (68.5), per  $g$  sufficientemente piccolo, ha un minimo  $\theta_g$  vicino a  $\theta_0$ , e le piccole oscillazioni intorno alla posizione  $\theta_g$  (nutazione) hanno frequenza  $\omega_g$  tale che

$$\lim_{g \rightarrow 0^+} \omega_g = \omega_{\text{nut}}.$$

*Dimostrazione.* Segue dal lemma 70.9 applicato all'energia potenziale efficace (68.5). ■

**Teorema 70.11** *Se all'istante iniziale l'asse della trottola è fermo ( $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$ ) e la trottola ruota velocemente intorno al proprio asse inclinato rispetto alla verticale di un angolo  $\theta_0$ , allora asintoticamente, per  $\Omega_3 \rightarrow +\infty$ ,*

1. *la frequenza della nutazione  $\omega_{\text{nut}}$  è proporzionale alla velocità angolare;*
2. *l'ampiezza della nutazione  $a_{\text{nut}}$  è inversamente proporzionale al quadrato della velocità angolare;*
3. *la frequenza della precessione  $\omega_{\text{pr}}$  è inversamente proporzionale alla velocità angolare;*
4. *si hanno le formule asintotiche*

$$\omega_{\text{nut}} \approx \frac{I_3 \Omega_3}{I_1}, \quad a_{\text{nut}} \approx \frac{I_1 m g \ell}{I_3^2 \Omega_3^2} \sin \theta_0, \quad \omega_{\text{pr}} \approx \frac{m g \ell}{I_3 \Omega_3}, \quad (70.8)$$

dove  $f_1(\Omega_3) \approx f_2(\Omega_3)$  significa che, per  $\Omega_3 \rightarrow +\infty$ ,  $f_1(\Omega_3)/f_2(\Omega_3) \rightarrow 1$ .

*Dimostrazione.* In virtù dell'osservazione 70.5 possiamo studiare il caso in cui la velocità angolare iniziale è fissata e  $g \rightarrow 0$ . Con le condizioni iniziali scelte, l'asse della trottola traccia sulla sfera unitaria una curva con cuspidi (cfr. la discussione nel §69).

Poniamo  $\theta = \theta_0 + x$ , con  $\theta_0$  come nel lemma 70.6, e sviluppiamo  $\cos \theta = \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 + O(x^2)$ , così che si ha

$$V_{\text{eff}}(\theta) \Big|_{g=0} = \frac{L_3^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} = \frac{I_3^2 \Omega_3^2}{2I_1} x^2 + O(x^3),$$

$$m g \ell \cos \theta = m g \ell \cos \theta_0 - x m g \ell \sin \theta_0 + O(x^2),$$

Applicando il lemma 70.9, con  $f(x) = V_{\text{eff}} \Big|_{g=0}$ ,  $h(x) = m \ell \cos(\theta_0 + x)$  ed  $\varepsilon = g$ , troviamo che il minimo dell'energia potenziale efficace è raggiunto per un angolo d'inclinazione

$$\theta_g = \theta_0 + x_g, \quad x_g = \frac{I_1 m \ell \sin \theta_0}{I_3^2 \Omega_3^2} g + O(g^2).$$

L'asse della trottola oscillerà intorno a  $\theta_g$ . Poiché all'istante iniziale  $\theta = \theta_0$  e  $\dot{\theta} = 0$ , allora  $\theta_0$  corrisponde alla posizione più alta dell'asse della trottola.

La prima relazione in (70.8) segue dal corollario 70.10.

Per  $g$  sufficientemente piccolo, l'ampiezza della nutazione è data da

$$a_{\text{nut}} = \frac{I_1 m \ell \sin \theta_0}{I_3^2 \Omega_3^2} g + O(g^2),$$

che dà la seconda relazione in (70.8).

Per determinare il moto di precessione dell'asse, si ricordi la (68.7), con  $\theta = \theta_0 + x$ . Quindi

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_1 \sin \theta_0} x + O(x^2).$$

Inoltre  $x$  oscilla armonicamente tra 0 e  $2x_g$  (a meno di correzioni  $O(g^2)$ ), così che il valore medio, per periodo di nutazione  $T_{\text{nut}} = 2\pi/\omega_{\text{nut}}$ , della velocità di precessione è dato da

$$\frac{1}{T_{\text{nut}}} \int_0^{T_{\text{nut}}} dt \dot{\varphi}(t) = \frac{L_3}{I_1 \sin \theta_0} x_g + O(g^2) = \frac{mg\ell}{I_3 \Omega_3} + O(g^2),$$

che corrisponde alla terza relazione in (70.8). ■

**Definizione 70.12** (TROTTOLE LANCIATE VELOCEMENTE) *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema 70.11, diremo che la trottola è lanciata velocemente.*

**Nota bibliografica** Per i paragrafi §68 e §69 abbiamo seguito [Levi-Civita & Amaldi, Cap. VIII], nonché [Arnol'd, Cap. VI]. Per il §70 abbiamo seguito [Arnol'd, Cap. VI].

## Esercizi

**Esercizio 1** Si dimostri che il gruppo corrispondente a una rotazione intorno all'asse  $e_z$  e il gruppo corrispondente a una rotazione intorno all'asse  $e_3$  commutano tra loro.

**Esercizio 2** Si spieghi perché, nella discussione del caso (1) nel §69, la curva descritta dal vertice della trottola è di tipo cicloide, cicloide accorciata e cicloide allungata, a seconda della posizione della radice  $u_0$  rispetto all'intervallo  $[u_1, u_2]$ . [Suggerimento. La trocoide è la curva descritta da un punto che dista  $b$  dal centro di una circonferenza di raggio  $a$  la quale rotola lungo l'asse  $x$ , e ha quindi equazioni parametriche

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t.$$

Se  $b = a$  è detta *cicloide* (cfr. la figura 15.10); se  $b < a$  è detta *cicloide accorciata* (cfr. la figura 15.11); se  $b > a$  è detta *cicloide allungata* (cfr. la figura 15.12).]

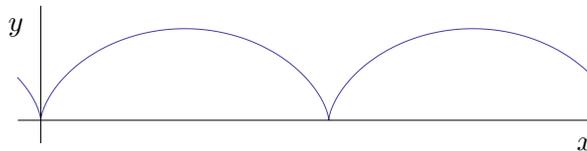


Figura 15.10: Cicloide.

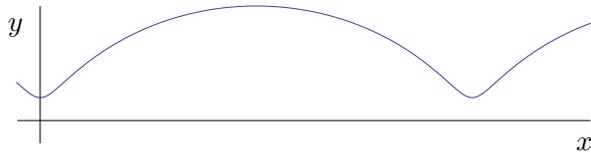


Figura 15.11: Cicloide accorciata.

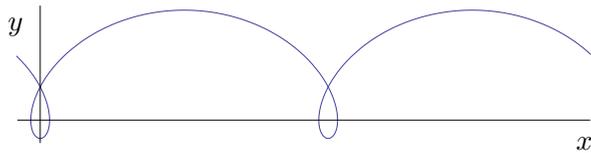


Figura 15.12: Cicloide allungata.

**Esercizio 3** Si discuta il caso  $u_2 > 1 > u_1$  alla fine del §69.3. [*Suggerimento.* Può essere utile ragionare direttamente in termini della variabile  $\theta$ , studiando l'energia potenziale efficace (69.8). Rispetto alla discussione del caso  $u_2 = 1$ , ora si ha  $\tilde{f}_+(1) > 0$ : questo implica  $E > V_{\text{eff}}(0)$  in (69.7), con il grafico di  $V_{\text{eff}}(\theta)$  come in figura 15.8. Quindi, nel piano  $(\theta, \dot{\theta})$ , il moto avviene lungo una curva chiusa. In particolare  $\theta$  varia tra due paralleli  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , con  $\theta_1 = -\theta_2$ : l'asse della trottola passa periodicamente dal parallelo  $\theta_1$  al parallelo  $\theta_2$ , attraversando il polo  $\theta = 0$ .]

**Esercizio 4** Si dimostri che in assenza di forza peso, oltre alla soluzione descritta alla fine del §69 (cfr. pag. 195), esiste anche la soluzione con angolo di nutazione costante e velocità di precessione nulla, in cui la trottola ruota semplicemente intorno al proprio asse. [*Soluzione.* L'energia potenziale efficace (69.9) ha due minimi, uno per  $\theta = \theta_0$ , tale che  $L_3 = l_z \cos \theta_0$  e  $d^2 V_{\text{eff}}(\theta_1)/d\theta^2 = l_z^2/I_1$ , e uno per  $\theta = \theta_1$ , tale che  $l_z = L_3 \cos \theta_1$  e  $d^2 V_{\text{eff}}(\theta_1)/d\theta^2 = L_3^2/I_1$ . Quindi entrambi i valori corrispondono a punti di equilibrio stabile per il moto dell'angolo di nutazione  $\theta$ . Nel primo caso si ha  $\mathbf{l} = l_z \mathbf{e}_z$  e  $\dot{\varphi} = l_z/I_1$ . Nel secondo caso si ha  $\mathbf{l} = L_3 \mathbf{e}_3$  e  $\dot{\varphi} = 0$ , i.e. non c'è precessione e il moto si riduce a una rotazione propria della trottola intorno al proprio asse, con velocità angolare  $\dot{\psi} = L_3/I_3$ .]

**Esercizio 5** Si dimostri la (70.2), facendo vedere che  $\mu = O(\theta_0^2)$ . [*Soluzione.* Per definizione si ha  $l_z = L_3 + \mu L_3$ , quindi dalla (68.3) si ottiene  $\mu L_3 = l_z - L_3 = \dot{\varphi} I_1 \sin^2 \theta + L_3(\cos \theta - 1)$ . Poiché  $l_z$  ed  $L_3$  sono entrambi costanti del moto si ha  $\mu L_3 = \dot{\varphi}_0 I_1 \sin^2 \theta_0 + L_3(\cos \theta_0 - 1)$ , dove  $\theta_0 = \theta(0)$  e  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$ . Usando che per  $0 \leq \theta \leq \pi$  si ha  $\sin^2 \theta \leq \theta^2$  e  $1 - \cos \theta \leq \theta^2/2$ , si trova

$$|\mu| \leq \left( \frac{\dot{\varphi}_0 I_1}{L_3} + \frac{1}{2} \right) \theta_0^2$$

e quindi  $\mu = O(\theta_0^2)$ .]

**Esercizio 6** Si dimostri che per  $L_3^2 > 4I_1 mg \ell$ , i punti di minimo della funzione  $f(y) := V_{\text{eff}}(\sqrt{|\mu|}y)$ , in (70.4) sono  $\pm y_0$ , con  $y_0$  dato dalla (70.5). [*Soluzione.* Derivando la (70.4) rispetto a  $y$  si trova

$$f'(y) = \frac{df}{dy}(y) = |\mu| \left( -\frac{2A}{y^3} + 2B_2 y + 4B_4 |\mu| y^3 + O(|\mu|^2 y^5) \right) = 0,$$

così che  $y$  è un punto stazionario se e solo se  $y$  risolve l'equazione

$$y = \left( \frac{A}{B_2 + 2B_4|\mu|y^2 + g(y)} \right)^{1/4},$$

per un'opportuna funzione  $g(y) = O(\mu^2)$ . Per il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4), i punti stazionari sono  $\pm y_0$ , con  $y_0 = (A/B_2)^{1/4} + O(\mu)$ . Infatti, se poniamo  $\varepsilon := |\mu|$  e  $\bar{y}_0 = \pm(A/B_2)^{1/4}$ , e definiamo  $F(\varepsilon, y) := y^4(B_2 + 2B_4\varepsilon y^2 + g(y)) - A$ , abbiamo  $F(0, \bar{y}_0) = 0$  e  $[\partial F/\partial y](0, \bar{y}_0) = 4y_0^3 B_2 \neq 0$ , da cui segue che per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo esiste  $y = y(\varepsilon)$  tale che  $F(\varepsilon, y(\varepsilon)) = 0$ ; inoltre si ha  $[\partial y/\partial \varepsilon](0) = -B_4 \bar{y}_0^3/2B_2$ , così che  $y_0 = y(\varepsilon) = \bar{y}_0 + O(\varepsilon)$ . Calcolando la derivata seconda, si trova

$$f''(y) = |\mu| \left( \frac{6A}{y^4} + 2B_2 + 12B_4|\mu|y^2 + O(|\mu|^2 y^4) \right) \implies f''(\pm y_0) = \frac{2|\mu|}{y_0^4} \left( 3A + y_0^4 B_2 + O(|\mu|) \right),$$

da cui si deduce che  $f(\pm y_0) > 0$  e che quindi  $\pm y_0$  sono punti di minimo isolati.]

**Esercizio 7** Si dimostri che per  $L_3^2 = 4I_1 m g \ell$ , la funzione  $f(y) := V_{\text{eff}}(\sqrt{|\mu|}y)$  in (70.4) ha due punti di minimo in  $\pm y_1$ , con  $y_1 = O(|\mu|^{-1/6})$ . [Suggerimento. Si ragiona come nella soluzione dell'esercizio 6. Poiché ora risulta  $B_2 = 0$  si trova  $f'(y) = 0$  se e solo se

$$y^6 (1 + O(|\mu|^2 y^2)) = \frac{2A}{4B_4|\mu|} \implies y = \pm y_1, \quad y_1 = \left( \frac{A}{2B_4|\mu|} \right)^{1/6} + O(\mu),$$

dove si è usato che  $B_4 > 0$  e si è applicato di nuovo il teorema della funzione implicita.]

**Esercizio 8** Si dimostri che, sotto la condizione (70.1), per  $\delta$  sufficientemente piccolo, il moto con dati iniziali  $\theta_0, \dot{\theta}_0$  di ordine  $\delta$  evolve in modo tale che  $\theta(t), \dot{\theta}(t)$  rimangono di ordine  $\delta$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . [Suggerimento. Definiamo  $\alpha := 4mg\ell I_1/L_3^2$ . Riscriviamo la (70.3) come

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_1} \left( V(\theta) + \frac{\alpha}{2} \right), \quad V(\theta) := \frac{(1 + \mu - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\alpha}{2} (\cos \theta - 1).$$

Consideriamo prima il caso  $\alpha < 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{\mu^2}{\theta^2} + \frac{1}{4}\theta^2 + \mu + \frac{\mu^2}{3} + \frac{\mu}{4}\theta^2 + \frac{\mu^2}{15}\theta^2 - \frac{\alpha}{4}\theta^2 + O(\theta^4) \\ &= \mu + \frac{\mu^2}{3} + \frac{\mu^2}{\theta^2} + A\theta^2 + O(\theta^4), \quad A = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\mu}{4} + \frac{\mu^2}{15}, \end{aligned}$$

così che  $A > 0$  se  $\alpha < 1$  e  $\mu$  è sufficientemente piccolo (tanto più piccolo quanto più  $\alpha$  è vicino a 1). La funzione  $V(\theta)$  ha un minimo per  $\theta = \theta_\mu = O(\sqrt{|\mu|})$ . Fissato un dato iniziale  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$  con  $|\theta_0|, |\dot{\theta}_0| \leq \delta$ , si ha  $\mu = O(\theta_0^2)$  per l'esercizio 5, quindi  $\theta_\mu = O(\delta)$ . Inoltre

$$0 \leq E - \frac{L_3^2 \alpha}{4I_1} \leq \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_0^2 + V_{\text{eff}}(\theta_0) - \frac{L_3^2 \alpha}{4I_1} \leq \frac{1}{2} I_1 \delta^2 + \frac{L_3}{2I_1} \left( 2|\mu| + \frac{O(\theta_0^4)}{\theta_0^2} + A\delta^2 + O(\delta^4) \right) \leq C_0 \delta^2,$$

per qualche costante  $C_0$ . Si ha perciò

$$0 \leq \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2(t) + V_{\text{eff}}(\theta(t)) - \frac{L_3^2 \alpha}{4I_1} \leq C_0 \delta^2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

che implica  $|\dot{\theta}(t)| \leq C_1 \delta^2$ , con  $C_1 = \sqrt{2C_0/I_1}$  e

$$0 < \frac{L_3^2}{2I_1} V(\theta_\mu) \leq V_{\text{eff}}(\theta(t)) - \frac{L_3^2 \alpha}{4I_1} \leq C_0 \delta^2,$$

da cui segue  $|\theta(t)| \leq C_2 \delta$  per un'opportuna costante  $C_2$ . Infatti, se consideriamo l'equazione

$$\mu + \frac{\mu^2}{3} + \frac{\mu^2}{\theta^2} + A\theta^2 + O(\theta^4) - \beta = 0, \quad \beta \leq \frac{2I_1 C_0}{L_3^2} \delta^2,$$

e trascuriamo i termini  $O(\theta^4)$ , otteniamo l'equazione di secondo grado in  $\theta^2$

$$A\theta^4 + \left( \mu + \frac{\mu^2}{3} - \beta \right) \theta^2 + \mu^2 = 0,$$

che ammette le due soluzioni

$$\theta_{\pm}^2 = \frac{1}{2A} \left( \beta - \mu - \mu^2/3 \pm \sqrt{(\beta - \mu - \mu^2/3)^2 - 4A\mu^2} \right),$$

tali che  $\theta_-^2 < \theta_+^2 < \beta$ , purché si abbia  $\beta - \mu - \mu^2/3 > 0$ ; dal momento che  $\mu = O(\delta^2)$ , possiamo scegliere  $\beta = O(\delta^2)$ . Tenendo conto delle correzioni  $O(\theta^4)$  e applicando il teorema della funzione implicita, si hanno ancora due radici, leggermente spostate rispetto a quelle precedenti. In particolare si ha ancora  $\theta_-^2 < \theta_+^2 < 2\beta = O(\delta^2)$ . In conclusione sia  $\theta(t)$  che  $\dot{\theta}(t)$  restano di ordine  $\delta$ . Consideriamo infine il caso  $\alpha = 1$ . In tal caso, nello sviluppo di Taylor di  $V(\theta)$  bisogna arrivare al quarto ordine:

$$V(\theta) = \mu + \frac{\mu^2}{3} + \frac{\mu^2}{\theta^2} + \left( \frac{\mu}{4} + \frac{\mu^2}{15} \right) \theta^2 + B\theta^4 + O(\theta^6), \quad B = \frac{1}{26} + \frac{\mu}{24} + \frac{2\mu^2}{189},$$

dove  $B > 0$ , così che, utilizzando di nuovo che  $\mu = O(\theta_0^2) = O(\delta^2)$ , si trova  $|\dot{\theta}(t)| \leq C_1 \delta^2$  e, trascurando i termini  $O(\theta^6)$  in  $V(\theta)$ ,

$$B\theta^6 + \left( \frac{\mu}{4} + \frac{\mu^2}{15} \right) \theta^4 + \left( \mu + \frac{\mu^2}{3} - \beta \right) \theta^2 + \mu^2 = 0, \quad \beta \leq \frac{2I_1 C_0}{L_3^2} \delta^2.$$

L'equazione di terzo grado in  $x = \theta^2$  si può discutere utilizzando il teorema della funzione implicita: se poniamo  $F(x, \mu) := Bx^3 + a(\mu)x^2 - c(\mu)x + \mu^2 = 0$ , dove  $a(\mu) = \mu/4 + \mu^2/15$  e  $c(\mu) = \beta - \mu - \mu^2/3$ , e definiamo  $x_0 = \sqrt{\beta/B}$ , si trova  $F(\pm x_0, 0) = 0$  e  $[\partial F/\partial x](\pm x_0, 0) = 2\beta \neq 0$ , così che si trovano due soluzioni  $x = x(\mu) = \pm x_0 \pm x_1 \mu + O(\mu^2)$ , dove  $x_1 = -[\partial F/\partial \mu](\pm x_0, 0)/[\partial F/\partial x](\pm x_0, 0) = O(1/\sqrt{\beta})$ , che sono ben definite finanto che  $\mu < 2\beta$ . Poiché  $\mu = O(\delta^2)$ , si può scegliere  $\beta = O(\delta^2)$ . Si trova quindi  $|\theta(t)| \leq C_2 \sqrt{\delta}$ , per un'opportuna costante  $C_2$ .]