Definizione 76.30 (Invariante integrale di Poincaré-Cartan) *Si definisce* invariante integrale di Poincaré-Cartan *l'integrale* (76.27).

Teorema 76.31 *Il flusso hamiltoniano conserva l'integrale*

$$\oint_\gamma \langle p, \mathrm{d}q \rangle \tag{76.28}$$

dove l'integrale è calcolato su una qualsiasi curva chiusa γ ottenuta tagliando un tubo di rotore con una superficie su cui t sia costante.

Dimostrazione. Segue dal teorema 76.28 prendendo γ sulla superficie ottenuta tagliando un tubo di rotore con una superficie $t =$ *cost.* ∎

Definizione 76.32 (Invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan) *Si chiama* invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan *l'integrale* (76.28).

§77 Funzioni generatrici

Il teorema 75.10 fornisce un criterio per riconoscere se una trasformazione di coordinate sia canonica. Tuttavia, in situazioni in cui si intenda studiare un sistema hamiltoniano di interesse fisico, tipicamente le equazioni di Hamilton sono espresse in un sistema di coordinate dato, e si vuole trovare una trasformazione canonica che porti le equazioni in una forma in cui sia più semplice cercarne la soluzione. In altre parole, il problema consiste nel determinare la trasformazione canonica opportuna. A tal fine introdurremo e discuteremo qui la nozione di funzione generatrice. Vedremo nel prossimo capitolo come utilizzare le funzioni generatrici in modo da costruire trasformazioni canoniche (metodo di Hamilton-Jacobi).

77.1 Condizione di Lie

Definizione 77.1 *Data una funzione $f(z,t)$, con $z \in \mathbb{R}^N$, di classe C^1 la forma differenziale*

$$\widetilde{\mathrm{d}} f = \mathrm{d}f - \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, \mathrm{d}z \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial z_k}\,\mathrm{d}z_k.$$

è detta differenziale a tempo bloccato *di f.*

Osservazione 77.2 Noi saremo interessati al caso $N = 2n$ e $z = (q,p)$. In tal caso

$$\widetilde{\mathrm{d}} f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial q}, \mathrm{d}q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \mathrm{d}p \right\rangle.$$

Ovviamente se $f = f(z)$ non dipende esplicitamente dal tempo il differenziale a tempo bloccato di f coincide con il suo differenziale.

Definizione 77.3 (CONDIZIONE DI LIE) *Data una trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z,t)$ poniamo $z = (q,p)$ e $Z = (P,Q)$. Se esiste una funzione f di classe C^1 tale che*

$$\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle = \sum_{k=1}^{n} (p_k \mathrm{d}q_k - P_k \mathrm{d}Q_k) = \widetilde{\mathrm{d}}f, \tag{77.1}$$

diremo che la trasformazione soddisfa la condizione di Lie.

Osservazione 77.4 La condizione di Lie equivale a richiedere che la forma differenziale

$$\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle \tag{77.2}$$

è un differenziale esatto a tempo bloccato.

Teorema 77.5 *Una trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z,t)$ è canonica se e solo se vale la condizione di Lie.*

Dimostrazione. Si ha

$$\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}\left(\langle p,q\rangle - \langle P,Q\rangle\right) - \left\langle q, \widetilde{\mathrm{d}}p\right\rangle + \left\langle Q, \widetilde{\mathrm{d}}P\right\rangle,$$

così che possiamo riscrivere la (77.2) in modo più simmetrico come

$$\begin{aligned}\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\right\rangle - \left\langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\right\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\left\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\right\rangle - \left\langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{d}}\left(\langle p,q\rangle - \langle P,Q\rangle\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\left\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\right\rangle - \left\langle q, \widetilde{\mathrm{d}}p\right\rangle\right) - \left(\left\langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\right\rangle - \left\langle Q, \widetilde{\mathrm{d}}P\right\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{d}}\left(\langle p,q\rangle - \langle P,Q\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\left\langle Ez, \widetilde{\mathrm{d}}z\right\rangle - \left\langle EZ, \widetilde{\mathrm{d}}Z\right\rangle\right),\end{aligned} \tag{77.3}$$

dove i prodotti scalari nelle ultime parentesi tonde sono in $\mathbb{R}^{2n}$. In (77.3) la forma differenziale $\widetilde{\mathrm{d}}\left(\langle p,q\rangle - \langle P,Q\rangle\right)$ è un differenziale esatto a tempo bloccato. Vogliamo dimostrare che esiste una funzione Ψ tale che

$$\omega := \langle Ez, \widetilde{\mathrm{d}}z\rangle - \langle EZ, \widetilde{\mathrm{d}}Z\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}\Psi$$

se e solo se la trasfomazione $z \mapsto Z(z,t)$ è canonica. Riscriviamo ω come

$$\omega = \langle Ez, \widetilde{\mathrm{d}}z\rangle - \langle EZ, J\widetilde{\mathrm{d}}z\rangle = \langle Ez - J^T EZ, \widetilde{\mathrm{d}}z\rangle, \tag{77.4}$$

così che, se definiamo

$$f_k(z) := \left(Ez - J^T EZ\right)_k = \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} z_i - \sum_{i,j=1}^{2n} J^T_{ki} E_{ij} Z_j,$$

la (77.4) diventa

$$\omega = \sum_{k=1}^{2n} f_k(z)\, \widetilde{\mathrm{d}}z_k = \langle f(z), \widetilde{\mathrm{d}}z\rangle.$$

Poiché (localmente) una forma esatta se e solo se è chiusa, dobbiamo far vedere che si ha

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_m} = \frac{\partial f_m}{\partial z_k} \qquad \forall k, m = 1, \ldots, 2n,$$

ovvero che la matrice M di elementi $M_{km} = \partial f_k / \partial z_m$ è una matrice simmetrica, se e solo se la matrice J è simplettica. Per calcolo esplicito si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial z_m} &= \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial z_m} - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(\frac{\partial J^T_{ki}}{\partial z_m} E_{ij} Z_j + J^T_{ki} E_{ij} \frac{\partial Z_j}{\partial z_m} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} \delta_{i,m} - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(\frac{\partial J^T_{ki}}{\partial z_m} E_{ij} Z_j + J^T_{ki} E_{ij} J_{jm} \right) \\
&= - \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_k \partial z_m} E_{ij} Z_j + E_{km} - \left(J^T E J \right)_{km},
\end{aligned}$$

e quindi la matrice M è simmetrica se e solo se è simmetrica la matrice $N := E - J^T E J$. D'altra parte si ha

$$N^T = \left(E - J^T E J \right)^T = E^T - J^T E^T J = - \left(E - J^T E J \right) = -N,$$

quindi si può avere $N^T = N$ se e solo se $N = 0$. Ma $N = 0$ significa $J^T E J = E$, che è la condizione che deve soddisfare J perché sia simplettica. In conclusione si ha $M = M^T$ se e solo se J è simplettica, e l'asserto è dimostrato. ■

Lemma 77.6 *Una trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z,t)$ è canonica se e solo se conserva l'invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan.*

Dimostrazione. Per il teorema 77.5 la trasformazione $z \mapsto Z(z,t)$ è canonica se e solo se vale la condizione di Lie (77.1). D'altra parte se vale la condizione di Lie, data una qualsiasi curva chiusa γ ottenuta tagliando un tubo di rotore con una superficie nell'iperpiano (q,p) (o in un qualsiasi altro iperpiano con $t = cost.$), si deve avere

$$\oint_\gamma \left(\langle p, \mathrm{d}q \rangle - \langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t) \rangle \right) = \oint_\gamma \Big(\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q \rangle - \langle P(q,p,t), \widetilde{\mathrm{d}}Q(q,p,t) \rangle \Big) = \oint_\gamma \widetilde{\mathrm{d}} f = \oint_\gamma \mathrm{d} f,$$

che è nullo poiché l'integrale di una forma differenziale lungo una curva chiusa è nullo se e solo se la forma è esatta (cfr. l'esercizio 49). In conclusione, si ha

$$\oint_\gamma \langle p, \mathrm{d}q \rangle = \oint_\gamma \Big\langle P(q,p,t), \widetilde{\mathrm{d}}Q(q,p,t) \Big\rangle = \oint_\Gamma \langle P, \mathrm{d}Q \rangle ,$$

dove Γ è l'immagine di γ sotto la trasformazione $z \mapsto Z(z,t)$. Quindi l'invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan è conservato dalla trasformazione se e solo se questa è canonica. ■

Teorema 77.7 *Una trasformazione di coordinate* $z \mapsto Z(z,t)$ *è canonica se e solo se la differenza delle forme differenziali di Poincaré-Cartan è esatta, i.e. se e solo se conserva l'invariante integrale di Poincaré-Cartan.*

Dimostrazione. Sia γ_1 una curva chiusa in un iperpiano $t = \mathit{cost.}$, e sia γ_2 una qualsiasi altra curva appartenente al tubo di rotore passante per γ_1 e topologicamente equivalente (i.e. omeomorfa) a γ_1. Supponiamo che la trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z,t)$ sia canonica. Per il teorema 76.28 si ha

$$\oint_{\gamma_1} \langle p, \mathrm{d}q\rangle = \oint_{\gamma_2} \left(\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t\right).$$

Siano Γ_1 e Γ_2 le immagini delle curve γ_1 e γ_2 sotto la trasformazione $z \mapsto Z(z,t)$. Per il lemma 77.6 si ha

$$\oint_{\gamma_1} \langle p, \mathrm{d}q\rangle = \oint_{\gamma_1} \langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t)\rangle = \oint_{\Gamma_1} \langle P, \mathrm{d}Q\rangle\,,$$

e, di nuovo per il teorema 76.28 si ha

$$\oint_{\Gamma_1} \langle P, \mathrm{d}Q\rangle = \oint_{\Gamma_2} \left(\langle P, \mathrm{d}Q\rangle - \mathcal{K}\,\mathrm{d}t\right),$$

dove $\mathcal{K}$ è l'hamiltoniana nelle nuove variabili. Infatti sappiamo per il teorema 74.20 che nelle nuove coordinate le equazioni del moto sono canoniche con hamiltoniana $\mathcal{K}(Z) = \hat{\mathcal{H}}(Z) + \Psi$ (cfr. l'osservazione 74.21). Quindi possiamo scrivere

$$\oint_{\gamma_2} \Big(\left(\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t\right) - \left(\langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t)\rangle - \mathcal{K}(Q(q,p,t), P(q,p,t))\,\mathrm{d}t\right) \Big) = 0. \tag{77.5}$$

La (77.5) deve valere comunque siano scelte γ_1 e γ_2 (e quindi, fissata γ_1, comunque sia scelta γ_2). Di conseguenza la forma differenziale

$$\left(\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t\right) - \left(\langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t)\rangle - \mathcal{K}(Q(q,p,t), P(q,p,t))\,\mathrm{d}t\right), \tag{77.6}$$

i.e. la differenza delle forme di Poincaré-Cartan, deve essere un differenziale esatto.

Viceversa supponiamo che la forma differenziale (77.6), per qualche funzione $\mathcal{K}$, sia esatta. Vale allora la (77.5). In particolare se scegliamo la curva γ_2 appartenente a un iperpiano $t = \mathit{cost.}$ otteniamo

$$\oint_{\gamma_2} \left(\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t)\rangle\right) = 0.$$

così che si conserva l'invariante relativo di Poincaré-Cartan: quindi la trasformazione di coordinate deve essere canonica per il teorema 77.5.

Che $\mathcal{K}$ sia proprio l'hamiltoniana segue dal fatto che le trasformazioni canoniche conservano la struttura canonica delle equazioni (cfr. il teorema 74.20), quindi le linee di rotore della forma differenziale

$$\Omega = \langle P(q,p,t), \mathrm{d}Q(q,p,t)\rangle - \mathcal{K}(Q(q,p,t), P(q,p,t))\,\mathrm{d}t$$

sono descritte dalle traiettorie del sistema. D'altra parte le linee di rotore non cambiano se modifichiamo la forma differenziale Ω aggiungendo a essa un differenziale totale (cfr. l'esercizio 59). Se l'hamiltoniana fosse una funzione $\mathcal{K}' \neq \mathcal{K}$, allora $(\mathcal{K}' - \mathcal{K})\mathrm{d}t$ dovrebbe essere un differenziale esatto. In altre parole $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$ dovrebbero differire per una funzione della sola t. Poiché le equazioni di Hamilton non cambiano se modifichiamo l'hamiltoniana per una funzione che non dipenda esplicitamente dalle coordinate, possiamo allora identificare $\mathcal{K}'$ con $\mathcal{K}$. ■

Teorema 77.8 *Una trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z)$, indipendente dal tempo, è canonica se e solo se risulta*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}P_k \wedge \mathrm{d}Q_k. \tag{77.7}$$

Dimostrazione. Poiché stiamo considerando trasformazioni di coordinate indipendenti dal tempo, la condizione di Lie richiede che si abbia

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k \mathrm{d}Q_k = \mathrm{d}f,$$

per qualche funzione f. Applicando la derivata esterna a entrambi i membri, utilizzando la proprietà (76.15) e la definizione (76.13), otteniamo quindi la (77.7). ■

Definizione 77.9 (Forma simplettica) *La 2-forma $\omega = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k$ prende il nome di* forma simplettica.

Osservazione 77.10 Possiamo enunciare il teorema 77.8 dicendo che una trasformazione indipendente dal tempo è canonica se e solo se conserva la forma simplettica.

Teorema 77.11 *Il flusso hamiltoniano definisce una trasformazione canonica.*

Dimostrazione. Indichiamo con $z(t) = (q(t), p(t))$ la soluzione delle equazioni di Hamilton con condizioni iniziali $z(0) = (q(0), p(0)) = (Q, P)$. Dimostriamo allora che la trasformazione $(Q, P) \mapsto (q(t), p(t))$ è una trasformazione canonica (ovviamente dipendente dal tempo). Faremo vedere che vale la condizione di Lie (77.1) con

$$f(Q,P,t) := \int_0^t \mathrm{d}\tau \left(\left\langle p, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau} \right\rangle - \mathcal{H} \right), \tag{77.8}$$

dove $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q(\tau), p(\tau), \tau)$. Si noti che, se consideriamo $z(t)$ come funzione di Z e t, poiché Z non dipende dal tempo, si ha $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = \partial z/\partial t$.

Richiedere la (77.1) significa quindi richiedere che sia

$$\frac{\partial f}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} - P_k, \qquad \frac{\partial f}{\partial P_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k}. \tag{77.9}$$

A partire dalla definizione (77.8) di f e utilizzando che $q(t)$ e $p(t)$ risolvono le equazioni del moto, i.e. $\dot{q} = \partial\mathcal{H}/\partial p$ e $\dot{p} = -\partial\mathcal{H}/\partial p$, si verifica immediatamente che le (77.9) sono soddisfatte (cfr. l'esercizio 60). ■

Osservazione 77.12 La funzione integranda in (77.8) non è altro che la lagrangiana. Quindi la funzione f è l'azione del sistema.

77.2 Procedimento di prima specie

Utilizzando la proprietà, espressa dal teorema 77.5, che una trasformazione di coordinate è canonica se e solo se soddisfa la condizione di Lie, vogliamo descrivere un metodo generale per costruire trasformazioni canoniche.

Definizione 77.13 (Funzione generatrice) *Una funzione* $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2*, tale che*

$$\det \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} F(x, y, t) \neq 0, \tag{77.10}$$

è detta funzione generatrice*.*

Si può costruire una trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q, P)$ nel modo seguente. Consideriamo una funzione generatrice $F(x, y, t)$ e poniamo $x = q$ e $y = Q$. Definiamo

$$p = \frac{\partial}{\partial q} F(q, Q, t), \qquad P = -\frac{\partial}{\partial Q} F(q, Q, t). \tag{77.11}$$

In virtù della condizione (77.10), la matrice di elementi

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial Q_j} F(q, Q, t)$$

è non singolare, quindi, applicando il teorema della funzione implicita, possiamo invertire la prima relazione in (77.11) ed esprimere Q in funzione di (q, p), i.e. $Q = Q(q, p, t)$. Introdotta questa nella seconda di (77.11) troviamo anche P in funzione di (q, p), i.e. $P = P(q, p, t)$.

Abbiamo quindi ottenuto una trasformazione di coordinate $(q,p) \mapsto (Q,P)$ (dipendente dal tempo se F dipende esplicitamente dal tempo). Tale trasformazione è canonica. Infatti risulta

$$\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \widetilde{\mathrm{d}}q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q}, \widetilde{\mathrm{d}}Q \right\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}F,$$

e quindi la condizione di Lie (77.1) è soddisfatta. Il metodo sopra descritto per costruire una trasformazione canonica viene chiamato *procedimento di prima specie.*

Possiamo anche calcolare la nuova hamiltoniana $\mathcal{K}(Q,P,t)$. Se la funzione F non dipende dal tempo allora anche la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo e quindi è una trasformazione simplettica: in particolare si ha $\mathcal{K}(Q,P,t) = \mathcal{H}(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t)$. Se invece la funzione F dipende esplicitamente dal tempo allora si ha, utilizzando come coordinate indipendenti (q,Q,t),

$$\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \langle P, \mathrm{d}Q\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}F = \mathrm{d}F - \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t,$$

e, poiché la differenza delle forme di Poincaré-Cartan $\omega = \langle p, \mathrm{d}q\rangle - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t$ e $\Omega = \langle P, \mathrm{d}Q\rangle - \mathcal{K}\,\mathrm{d}t$ deve essere un differenziale esatto, per il teorema 77.7, si trova (cfr. l'esercizio 62)

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{77.12}$$

ovvero

$$\mathcal{K}(Z,t) = \mathcal{H}(z(Z,t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(Z,t),Q,t),$$

dove la derivata parziale va calcolata a q,Q costanti (e solo dopo si esplicita q in funzione di (Q,P,t)).

Definizione 77.14 (FUNZIONE GENERATRICE DI PRIMA SPECIE) *Una funzione generatrice $F(x,y,t)$ si dice* funzione generatrice di prima specie *se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di prima specie.*

77.3 Procedimento di seconda specie

Si può anche costruire una trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (Q,P)$ nel modo seguente. Consideriamo una funzione generatrice $F(x,y,t)$ e poniamo $x = q$ e $y = P$. Definiamo

$$p = \frac{\partial}{\partial q}F(q,P,t), \qquad Q = \frac{\partial}{\partial P}F(q,P,t). \tag{77.13}$$

Di nuovo, per la condizione (77.10), la matrice di elementi

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial P_j}F(q,P,t)$$

è non singolare, quindi per il teorema della funzione implicita, possiamo invertire la prima relazione in (77.13) ed esprimere P in funzione di (q,p), i.e. $P = P(q,p,t)$. Introdotta questa nella seconda di (77.13) troviamo anche Q in funzione di (q,p), i.e. $Q = Q(q,p,t)$. Risulta

$$\langle p, \widetilde{\mathrm{d}}q\rangle - \langle P, \widetilde{\mathrm{d}}Q\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \widetilde{\mathrm{d}}q \right\rangle - \widetilde{\mathrm{d}}\,\langle P, Q\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial P}, \widetilde{\mathrm{d}}P \right\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}\Psi, \tag{77.14}$$

avendo definito

$$\Psi := F - \langle P, Q\rangle\,.$$

Poiché la condizione di Lie (77.1) è soddisfatta, la trasformazione è canonica. Si parla in questo caso di *procedimento di seconda specie.*

Anche in questo caso possiamo calcolare la nuova hamiltoniana $\mathcal{K}(Q,P,t)$. Per prima cosa si scrive $\langle p, \mathrm{d}q\rangle - \langle P, \mathrm{d}Q\rangle = -\mathrm{d}\,\langle P, Q\rangle + \langle p, \mathrm{d}q\rangle + \langle Q, \mathrm{d}P\rangle = \widetilde{\mathrm{d}}F - \mathrm{d}\,\langle P, Q\rangle$. Ragionando come prima troviamo quindi (cfr. l'esercizio 63)

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{77.15}$$

che si riduce a $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ nel caso di trasformazioni indipendenti dal tempo. In questo caso la derivata parziale va fatta a (q,P) costanti, e dopo averla calcolata si esplicita $q = q(Q,P,t)$.

Definizione 77.15 (Funzione generatrice di seconda specie) *Una funzione generatrice $F(x,y,t)$ si dice* funzione generatrice di seconda specie *se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di seconda specie.*

77.4 Altri procedimenti per generare trasformazioni canoniche

Si possono considerare anche procedimenti di tipo diverso. Se si sceglie una funzione generatrice $F(x,y,t)$, si pone $x = p$ e $y = Q$ e quindi si definisce

$$q = -\frac{\partial F}{\partial p}, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \tag{77.16}$$

si ottiene un *procedimento di terza specie.* Analogamente, se si pone $x = p$ e $y = P$ e si definisce, in corrispondenza,

$$q = -\frac{\partial F}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}, \tag{77.17}$$

si ottiene un *procedimento di quarta specie.*

Definizione 77.16 (Funzione generatrice di terza specie) *Una funzione generatrice $F(x,y,t)$ si dice* funzione generatrice di terza specie *se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di terza specie.*

Definizione 77.17 (FUNZIONE GENERATRICE DI QUARTA SPECIE) *Una funzione generatrice $F(x, y, t)$ si dice* funzione generatrice di quarta specie *se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di quarta specie.*

Più in generale si possono considerare trasformazioni ottenute ponendo nella funzione generatrice $F(x, y, t)$ alcune x_i uguali a q_i, altre x_i uguali a p_i, e allo stesso modo, alcune y_i uguali a Q_i, altre uguali a P_i. Si possono considerare quindi vari procedimenti per costruire trasformazioni canoniche: in tutto sono possibili 4^n procedimenti (inclusi i procedimenti di prima, seconda, terza e quarta specie, che ne costituiscono casi particolari), a seconda della scelta delle variabili x_i e y_i. Si verifica facilmente che per ogni procedimento la vecchia hamiltoniana $\mathcal{H}$ e la nuova hamiltoniana $\mathcal{K}$ sono legate alla funzione generatrice F dalla relazione

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{77.18}$$

indipendentemente dal procedimento seguito. La dimostrazione della (77.18) si effettua seguendo le stesse linee di quella indicata esplicitamente per i procedimenti di prima e di seconda specie.

Osservazione 77.18 Le funzioni generatrici possono essere utilizzate per verificare se una trasformazione di coordinate data sia canonica. Infatti, se si riesce a trovare una funzione generatrice F tale che la trasformazione si possa ottenere da F attraverso un procedimento di una qualsiasi specie, se ne conclude che la trasformazione è canonica (per costruzione). Si noti che non sempre è possibile trovare una funzione generatrice di specie arbitraria (cfr. per esempio gli esercizi 69 e 71).

Osservazione 77.19 Le varie funzioni generatrici, quando esistono, si ottengono l'una dall'altra attraverso una trasformata di Legendre. Per esempio, se una trasformazione di coordinate ammette sia una funzione generatrice di prima specie F_1 che una di seconda specie F_2, allora F_2 è la trasformata di Legendre di $-F_1$, e così via (cfr. l'esercizio 64).

Le funzioni generatrici di seconda specie sono particolarmente importanti, almeno per due motivi. In primo luogo la trasformazione identità si ottiene attraverso un procedimento di seconda specie. Inoltre dato un qualsiasi cambiamento di coordinate $q \mapsto Q(q, t)$ è sempre possibile costruire una trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q(q, t), P(q, p, t))$ utilizzando un procedimento di seconda specie. Valgono infatti i seguenti risultati.

Teorema 77.20 *La trasformazione identità si può ottenere da una funzione generatrice di seconda specie.*

Dimostrazione. Si può costruire la trasformazione identità $z \mapsto Z(z) = z$ attraverso un procedimento di seconda specie prendendo come funzione generatrice la funzione

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle$$

e ponendo $x = q$ e $y = P$. Infatti, a partire dalla funzione $F(q, P) = \langle q, P\rangle$, si ottiene, dalle (77.13), $p = P$ e $Q = q$, i.e. $Z = z$. ■

Osservazione 77.21 Il teorema 77.20 è importante alla luce della seguente osservazione. Supponiamo di avere un sistema hamiltoniano di cui si sappiano calcolare le soluzioni, e consideriamo il sistema ottenuto come perturbazione di quello dato. Se il sistema dato è descritto da un'hamiltoniana $\mathcal{H}$, il sistema perturbato sarà descritto da un'hamiltoniana $\mathcal{H}+\varepsilon\mathcal{H}_1$, con ε parametro reale molto piccolo (in qualche senso: saremo più precisi su questo punto nel capitolo 19); tale parametro prende il nome di *parametro perturbativo*. Ci si può chiedere allora se esiste una trasformazione canonica che porti le soluzioni del sistema perturbato nelle soluzioni del sistema imperturbato. Se questo è possibile mediante una trasformazione canonica che sia almeno continua in ε, tale trasformazione è necessariamente vicina all'identità, i.e. deve ridursi all'identità per $\varepsilon \to 0$. La corrispondente funzione generatrice sarà allora della forma $\langle x, y\rangle + F(x, y, \varepsilon)$, dove $F(x, y, \varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Teorema 77.22 *Ogni trasformazione di coordinate $q \mapsto \Phi(q)$ si può estendere in modo unico a una trasformazione canonica dello spazio delle fasi.*

Dimostrazione. Si $q \mapsto Q = \Phi(q)$ una trasformazione di coordinate. Consideriamo la funzione generatrice

$$F(x, y) = \langle y, \Phi(x)\rangle$$

e utilizziamola per un procedimento di seconda specie ponendo $x = q$ e $y = P$, così che F diventa $F = \langle P, \Phi(q)\rangle$. Si ha allora

$$\begin{cases} Q = \dfrac{\partial F}{\partial P} = \Phi(q), \\ p = \dfrac{\partial F}{\partial Q} = \left\langle P, \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} \right\rangle = I^T(q)\, P, \end{cases} \tag{77.19}$$

dove $I(q) = \partial\Phi(q)/\partial q$ è la matrice jacobiana della trasformazione $q \mapsto \Phi(q)$. La (77.19) si può riscrivere

$$\begin{cases} Q = \Phi(q), \\ P = (I^T(q))^{-1} p, \end{cases} \tag{77.20}$$

che estende la trasformazione data a una trasformazione $(q, p) \mapsto (Q, P)$. ■

Osservazione 77.23 La trasformazione dei momenti coniugati $p \mapsto P$ in (77.20) è una trasformazione lineare in p.

Osservazione 77.24 Se la trasformazione $q \mapsto \Phi(q)$ è lineare, i.e. $\Phi(q) = Aq$, allora si ha $I = A$, e la (77.20) diventa

$$Q = Aq, \qquad P = (A^T)^{-1} p. \tag{77.21}$$

In particolare se A è una matrice ortogonale (i.e. se la trasformazione $q \mapsto \Phi(q)$ descrive una rotazione), allora $A^T = A^{-1}$ e la (77.21) dà

$$Q = Aq, \qquad P = Ap, \tag{77.22}$$

i.e. coordinate e momenti si trasformano secondo la stessa legge.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito prevalentemente [Dell'Antonio, Cap. XI] e [Fasano & Marmi, Cap. 10].

Per i richiami sulle forme differenziali e sulle varietà, in particolare per il teorema di Stokes, si vedano [Giusti-2, Cap. 16] e [Courant & John, Cap. 5], per i risultati in $\mathbb{R}^3$, mentre, in un contesto più generale, si rimanda a [Rudin-1, Cap. 10], [do Carmo, Cap. 4] e [Sernesi-2, Cap. 7].

Per le proprietà di permutazioni, trasposizioni e combinazioni si possono vedere, per esempio, [Sernesi-1, App. B], [Lang, Cap. 6] o [Kuroš, Cap. 1].

Per l'esercizio 21 si è tenuto conto di [Figueiredo].

Esercizi

Esercizio 1 Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso (cfr. la definizione 17.19 del capitolo 4). Sia $\Phi(x_0, x)$ l'insieme delle curve regolari a tratti γ in $\mathcal{A}$ che hanno x_0 come primo estremo e x come secondo estremo, i.e. l'insieme delle curve regolari a tratti $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{A}$ tali che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Si dimostri che la forma differenziale ω è esatta se e solo se

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$$

per ogni $x_0, x \in \mathcal{A}$ e per ogni $\gamma, \gamma' \in \Phi(x_0, x)$. [*Soluzione* Se ω è esatta si ha $\omega = \mathrm{d}\psi$ per qualche funzione ψ di classe C^1, così che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}\psi = \int_a^b \mathrm{d}t \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\psi(\gamma(t)), \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \int_a^b \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(\gamma(t)) = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

dipende solo dagli estremi della curva γ. Viceversa, supponiamo che l'integrale di ω abbia lo stesso valore per ogni curva $\gamma \in \Phi(x_0, x)$. Consideriamo la funzione

$$\psi(x) := \int_\gamma \omega, \qquad \omega = \sum_{k=1}^n f_k(x)\, \mathrm{d}x_k,$$

dove $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{A}$ appartiene a $\Phi(x_0, x)$. Poiché per ipotesi l'integrale dipende solo dagli estremi di γ, la funzione $x \mapsto \psi(x)$ è ben definita. Essendo $\mathcal{A}$ aperto, fissato $x \in \mathcal{A}$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni vettore v il punto $x + \varepsilon v$ appartiene ad $\mathcal{A}$ purché si abbia $|\varepsilon| < \delta$: se definiamo $\varphi(t) = x + (t-b)\varepsilon v$ si