Esercizio 73 Si dimostri che la trasformazione di coordinate $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, definita da

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}, \\ q_2 = \sqrt{\dfrac{Q_2}{2P_2} - \dfrac{1}{2P_2}\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}}, \\ p_1 = P_2 + 2P_1^2\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}, \\ p_2 = 2P_2^2\sqrt{\dfrac{Q_2}{2P_2} - \dfrac{1}{2P_2}\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}}, \end{cases}$$

è una trasformazione simplettica, utilizzando il teorema 75.10. [*Suggerimento.* Può essere conveniente definire $A = A(Q_1, P_1) := \sqrt{Q_1/2P_1}$ e $B = B(Q_1, Q_2, P_1, P_2) := \sqrt{(Q_2/2P_2) - (1/2P_2)A}$, così che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial P_1} = \frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = 0, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial P_2} = 0, \\ &\frac{\partial q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial P_1} = \frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial B}{\partial Q_2}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial P_2} = \frac{\partial B}{\partial P_2}, \\ &\frac{\partial p_1}{\partial Q_1} = 2P_1^2\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial P_1} = 4P_1A + 2P_1^2\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial Q_2} = 0, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial P_2} = 1, \\ &\frac{\partial p_2}{\partial Q_1} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial P_1} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial Q_2} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial Q_2}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial P_2} = 4P_2B + 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial P_2}. \end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial Q_1} = \frac{1}{4AP_1}, \qquad \frac{\partial A}{\partial P_1} = -\frac{Q_1}{4AP_1^2}, \\ &\frac{\partial B}{\partial A} = -\frac{1}{4BP_2}, \qquad \frac{\partial B}{\partial Q_2} = \frac{1}{4BP_2}, \qquad \frac{\partial B}{\partial P_2} = \frac{A - Q_2}{4BP_2}, \end{aligned}$$

si verifica facilmente che $\{q_1, p_1\} = \{q_2, p_2\} = 1$, mentre $\{q_1, q_2\} = \{q_1, p_2\} = \{q_2, p_1\} = \{p_1, p_2\} = 0$.]

Esercizio 74 Si trovi una funzione generatrice della trasformazione dell'esercizio 73. [*Suggerimento.* Si cerchi una funzione generatrice di seconda specie: si trova $F(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1P_2 + q_1^2P_1^2 + q_2^2P_2^2$.]

Esercizio 75 Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p}\cos q, \\ P = -2\sqrt{p}\sin q, \end{cases}$$

si dimostri che è simplettica. Se $\mathcal{H}(q, p) = -p\sin 2q$ è l'hamiltoniana nel sistema di coordinate (q, p) si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P). Si trovi la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (\pi/4, 1)$. Si trovi infine la funzione generatrice di seconda specie della trasformazione. [*Suggerimento.* Si ha $\mathcal{K}(Q, P) = QP$. La soluzione con i dati iniziali considerati è

$$(q(t), p(t)) = (\operatorname{arctg}(\mathrm{e}^{-2t}), \operatorname{ch} 2t).$$

La funzione generatrice di seconda specie è $F(q, P) = -(P^2/4)\operatorname{cotg} q$.]