Esercizio 89 Si dimostri che la trasformazione nel piano (q,p) che fa passare a coordinate polari non è canonica. Si mostri che è tuttavia possibile modificare la trasformazione in modo da ottenere una trasformazione canonica. [*Soluzione.* Se J è la matrice jacobiana della trasformazione $(q,p)\mapsto(\theta,\rho)$, tali che $q=\rho\sin\theta$ e $p=\rho\cos\theta$, allora $\det J=\rho$, quindi, per il teorema 74.11, la trasformazione non è canonica. D'altra parte se definiamo

$$q=\sqrt{2P}\,\sin Q, \qquad p=\sqrt{2P}\,\cos Q,$$

otteniamo una trasformazione canonica $(q,p)\mapsto(Q,P)$.]

Esercizio 90 Si dimostri che la seguente trasformazione di coordinate è canonica:

$$\begin{cases} q_1=\dfrac{P_1P_2-Q_1Q_2}{P_1^2+Q_2^2}, \\ q_2=\dfrac{P_1Q_1+P_2Q_2}{P_1^2+Q_2^2}, \\ p_1=-P_1Q_2, \\ p_2=\dfrac{P_1^2-Q_2^2}{2}. \end{cases}$$

[*Suggerimento.* Si utilizza il teorema 75.10. In alternativa si cerca una funzione generatrice; può essere conveniente cercarne una di tipo misto della forma $F(q_1,q_2,P_1,Q_2)$. Le ultime due equazioni dànno

$$p_1=\frac{\partial F}{\partial q_1}=-P_1Q_2, \qquad p_2=\frac{\partial F}{\partial q_2}=\frac{P_1^2-Q_2^2}{2}.$$

Utilizzando le prime due equazioni per eliminare Q_1, si trova, a meno di una costante additiva,

$$Q_1=\frac{P_1P_2-q_1(P_1^2+Q_2^2)}{Q_2}=\frac{-P_2Q_2+q_2(P_1^2+Q_2^2)}{P_1} \quad\Longrightarrow\quad P_2=-\frac{\partial F}{\partial Q_2}=q_2Q_2+q_1P_1,$$

da cui si ricava anche

$$Q_1=\frac{\partial F}{\partial P_1}=q_2P_1-q_1Q_2.$$

Integrando le quattro equazioni ottenute si trova

$$F=-q_1Q_2P_1+\frac{1}{2}q_2P_1^2-\frac{1}{2}q_2Q_2^2.$$

Si verifica immediatamente che, ponendo $x=(q_1,q_2)$ e $y=(P_1,Q_2)$ e indicando con A la matrice 2×2 di elementi $A_{ij}=\partial^2F/\partial x_i\partial y_j$, si ha $\det A=P_1^2+Q_2^2\neq 0$.]

Esercizio 91 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q=\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\,\sin Q, \\ p=\sqrt{2m\omega P}\,\cos Q. \end{cases}$$

Si dimostri che è canonica e se ne trovi una funzione generatrice di prima specie $F_1(q,Q)$. Data l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2,$$

si trovi l'hamiltoniana nelle nuove coordinate. [*Suggerimento.* Si veda anche l'esercizio 89. La funzione generatrice di prima specie è data da

$$F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega\, q^2 \mathrm{cotg}\, Q.$$

Nelle nuove coordinate, l'hamiltoniana $H(q,p)$ diventa $K(Q,P) = \omega P$.]

Esercizio 92 Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q,P)$ della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91. [*Suggerimento.* Esplicitando Q e p in termini di q e P, si ottiene

$$Q = \arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big), \qquad p = \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2}.$$

Integrando p rispetto a q si trova

$$F_2(q,P) = \frac{1}{2}q\sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2} + P\arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big),$$

a meno di un termine additivo $g(P)$, dove $g(P)$ è una funzione della sola variabile P. Derivando l'espressione trovata rispetto a P si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big) + \frac{\partial g}{\partial P},$$

così che $\partial F_2/\partial P = Q$ se $g(P) = 0$. Ne segue che $F_2(q,P)$ è la funzione generatrice di seconda specie.]

Esercizio 93 Si trovi una funzione generatrice di terza specie $F_3(p,Q)$ e una funzione generatrice di quarta specie $F_4(p,P)$ della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91. [*Suggerimento.* Esplicitando q e P in termini di p e Q, si ottiene

$$q = \frac{p}{m\omega}\,\tan Q, \qquad P = \frac{1}{2m\omega}\frac{p^2}{\cos^2 Q}.$$

Integrando q rispetto a p e la seconda rispetto a Q, cambiando di segno le due espressioni trovate ed uguagliandole, si trova

$$F_3(q,P) = -\frac{p^2}{2m\omega}\tan Q,$$

che costituisce quindi la funzione generatrice di terza specie della trasformazione data. Esplicitando invece q e Q in termini di p e P, si trova

$$q = \frac{1}{m\omega}\sqrt{2m\omega P - p^2}, \qquad Q = \arccos\Big(\frac{p}{\sqrt{2m\omega P}}\Big).$$

Imponendo $q = -\partial F_4/\partial p$ e $Q = \partial F_4/\partial P$ e integrando, si trova

$$F_4(p,P) = -\frac{p}{2m\omega}\sqrt{2m\omega P - p^2} + P\arccos\Big(\frac{p}{\sqrt{2m\omega P}}\Big),$$

che rappresenta la funzione generatrice di quarta specie della trasformazione.]

Esercizio 94 Alla luce dell'esercizio 64, si dimostri che le funzioni generatrici di prima, seconda, terza e quarta specie della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91, trovate negli esercizi 91÷93, sono legate tra loro attraverso una trasformata di Legendre.

Esercizio 95 Si dimostri che è canonica la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \operatorname{arctg} q, \\ P = p + q^2 + pq^2, \end{cases}$$

e si trovi una funzione generatrice di seconda specie. [*Suggerimento.* Si ha $F(q, P) = (1+P)\operatorname{arctg} q - q$.]

Esercizio 96 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + \dfrac{P_1}{m}t, \qquad q_2 = Q_2 + \dfrac{P_2}{m}t, \qquad q_3 = Q_3 + \dfrac{P_3}{m}t - \dfrac{1}{2}gt^2, \\ p_1 = P_1, \qquad p_2 = P_2, \qquad p_3 = P_3 - gmt, \end{cases}$$

è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie. Si mostri che l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + mgq_3$$

è trasformata nell'hamiltoniana $\mathcal{K} = 0$ (a meno di una funzione dipendente solo dal tempo t) e si interpreti tale risultato alla luce del teorema 77.11. [*Suggerimento.* Si trova

$$F(q_1, q_2, q_3, P_1, P_2, P_3) = q_1P_1 + q_2P_2 + q_3P_3 - \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right)t + \frac{1}{2}gt^2P_3 - gmtq_3.$$

La trasformazione canonica rappresenta il flusso hamiltoniano di un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di gravità.]