

$V'(q_{\pm}(\alpha)) \neq 0$ , il segno in (78.23) andrà determinato nel modo seguente. Supponiamo per semplicità che sia  $q(0) = q_-(\alpha)$  e  $p(0) = 0$ ; scriveremo allora

$$\beta = t = \int_{q_0}^{q(t)} dq' \tilde{p}(q', \alpha), \quad \tilde{p}(q, \alpha) = \sqrt{2a(q)(\alpha - V(q))}, \quad (78.25)$$

dove si può scegliere, per esempio,  $q_0 = q_-(\alpha)$ , e potremo usare tale espressione fino al tempo  $T_1$  in cui di nuovo  $p(T_1) = 0$ . Dopo tale tempo, per  $t > T_1$ , scriveremo

$$\beta = T_1 + \int_{q_+(\alpha)}^{q(t)} dq' (-\tilde{p}(q', \alpha)) \quad (78.26)$$

e useremo tale espressione fino al tempo  $T_2$  tale che  $p(T_1 + T_2) = 0$  ancora una volta. Dopo tale tempo di nuovo avremo

$$\beta = T_1 + T_2 + \int_{q_0}^{q(t)} dq' \tilde{p}(q', \alpha). \quad (78.27)$$

Si vede che  $\beta$  è definito modulo  $T = T_1 + T_2$ , con  $T$  che rappresenta il periodo del moto. Se invece  $I$  è illimitato a destra, i.e.  $I = [q_-(\alpha), +\infty)$ , se  $p(0) \geq 0$  si ha  $p(t) > 0$  per ogni  $t \geq 0$ , e quindi si prende sempre la determinazione positiva di  $p$ . Se invece  $p(0) < 0$  si prende la determinazione negativa fino al tempo  $T_1$  in cui si ha  $p(T_1) = 0$ ; da quell'istante in poi si prenderà la determinazione positiva. In questo caso la variabile  $\beta$  è a un sol valore, e quindi non va interpretata come angolo. Analoghe considerazioni valgono se  $I$  è illimitato a sinistra.

## §79 Separazione di variabili

Supponiamo che, ponendo  $q = (q_1, q')$  e  $p = (p_1, p')$ , con  $z' = (q', p') \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$  e  $z_1 = (q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2$ , l'hamiltoniana si possa scrivere nella forma

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{F}_1(q', p', \mathcal{G}_1(q_1, p_1)), \quad (79.1)$$

per opportune funzioni  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{G}_1$  (di classe  $C^2$ ). Se poniamo  $\mathcal{G}_1(q_1, p_1) = \alpha_1$ , possiamo allora cercare una funzione caratteristica di Hamilton nella forma

$$W(q, \alpha) = W(q_1, q', \alpha) = W'(q', \alpha) + W_1(q_1, \alpha_1), \quad (79.2)$$

e riscrivere la (79.1) nella forma

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 \left( q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1, \\ \mathcal{F}_1 \left( q', \frac{\partial W'}{\partial q'}, \alpha_1 \right) = \alpha_n, \end{cases} \quad (79.3)$$

dove si è usato il fatto che  $\partial W / \partial q' = \partial W' / \partial q'$  e  $\partial W / \partial q_1 = \partial W_1 / \partial q_1$ .

Si può allora risolvere la prima equazione in (79.3), procedendo come nel caso dei sistemi unidimensionali (con la funzione  $\mathcal{G}_1$  che gioca il ruolo dell'hamiltoniana per i sistemi unidimensionali) per determinare la funzione caratteristica  $W_1(q_1, \alpha_1)$ , e, successivamente, studiare la seconda equazione in (79.3), che si può interpretare come equazione di Hamilton-Jacobi per un sistema con  $n - 1$  gradi di libertà (per il quale  $\alpha_1$  è un parametro fissato). Ci siamo quindi ricondotti a un sistema con un grado di libertà in meno.

Supponiamo che il procedimento si possa iterare, i.e. che la funzione  $\mathcal{F}_1$  sia della forma

$$\mathcal{F}_1(q', p', \alpha_1) = \mathcal{F}_2(q'', p'', \mathcal{G}_2(q_2, p_2, \alpha_1), \alpha_1), \quad (79.4)$$

dove abbiamo posto  $q' = (q_2, q'')$  e  $p' = (p_2, p'')$ , con  $z'' = (q'', p'') \in \mathbb{R}^{2(n-2)}$  e  $z_2 = (q_2, p_2)$ .

Ragionando come nel caso precedente si può porre

$$W'(q', p') = W''(q'', \alpha) + W_2(q_2, \alpha_2, \alpha_1), \quad (79.5)$$

e riscrivere la (79.1) nella forma

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2 \left( q_2, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1 \right) = \alpha_2, \\ \mathcal{F}_2 \left( q'', \frac{\partial W''}{\partial q''}, \alpha_2, \alpha_1 \right) = \alpha_n, \end{cases} \quad (79.6)$$

dove si è usato il fatto che  $\partial W / \partial q'' = \partial W'' / \partial q''$  e  $\partial W / \partial q_2 = \partial W_2 / \partial q_2$ . La prima equazione in (79.6) si risolve di nuovo ragionando come per i sistemi unidimensionali e si determina così la funzione caratteristica  $W_2(q_1, \alpha_1, \alpha_2)$ .

E così via. A ogni passo  $k$  si studia l'equazione di Hamilton-Jacobi di un sistema unidimensionale e se ne trova la funzione caratteristica  $W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , che, oltre che da  $(q_k, \alpha_k)$ , dipende dai parmeri  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  introdotti nei passi precedenti.

Nel caso che il procedimento si possa iterare  $n$  volte alla fine avremo scritto la funzione caratteristica nella forma

$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (79.7)$$

e applicando  $n$  volte l'analisi discussa nel caso dei sistemi unidimensionali riusciamo a risolvere completamente l'equazione di Hamilton-Jacobi.

**Definizione 79.1** (SISTEMA SEPARABILE) *Si definisce sistema separabile un sistema hamiltoniano per il quale l'equazione di Hamilton-Jacobi ammette una funzione caratteristica della forma*

$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha), \quad (79.8)$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Osservazione 79.2** L'analisi sopra mostra che si ha un sistema separabile se l'hamiltoniana è della forma

$$\mathcal{H}(q, p) = h_n(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, z_n), \quad (79.9)$$

per opportune funzioni  $h_1, \dots, h_n$  di classe  $C^2$  tali che (cfr. l'esercizio 1)

$$h_1 = h_1(z_1), \quad h_i = h_i(h_1, h_2, \dots, h_{i-1}, z_i), \quad 2 \leq i \leq n; \quad (79.10)$$

In tal caso la funzione caratteristica sarà della forma (79.7).

**Definizione 79.3** (SEPARAZIONE DI VARIABILI) *Nel caso di sistemi separabili il procedimento che porta a scrivere la funzione caratteristica di Hamilton nella forma (79.8) prende il nome di procedimento di separazione di variabili.*

**Osservazione 79.4** Se il procedimento descritto sopra non si riesce a iterare fino in fondo ma solo per  $r$  passi, con  $r < n$ , non avremo un sistema separabile. Tuttavia potremo scrivere la funzione caratteristica nella forma

$$W(q, \alpha) = W(q_{r+1}, \dots, q_n, \alpha) + \sum_{k=1}^r W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (79.11)$$

dove le funzioni  $W_1, \dots, W_r$  sono le funzioni caratteristiche di  $r$  sistemi unidimensionali. In particolare questo implica che si sono trovati  $r$  integrali primi  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Quindi nelle nuove variabili possiamo scrivere l'hamiltoniana come

$$\mathcal{K}(\alpha, \beta) = \mathcal{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n), \quad (79.12)$$

che può essere quindi utilizzata per studiare il sistema a  $n - r$  gradi di libertà descritto dalle variabili  $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$ ; nelle corrispondenti equazioni di Hamilton le variabili  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  appaiono come parametri (cfr. la discussione nel §72 sul metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano).

**Osservazione 79.5** Nel caso dei sistemi unidimensionali si è visto che la variabile  $\beta$  può essere interpretata come angolo. Nel caso di sistemi a più gradi di libertà, anche nel caso in cui questi siano separabili, le variabili  $\beta$  si scrivono nella forma

$$\beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_k}. \quad (79.13)$$

Per ogni  $i$  sono possibili due determinazioni, a seconda del segno che si sceglie (cfr. la corrispondente analisi dei sistemi unidimensionali). Tale segno dipenderà dal segno delle variabili  $p_i$ ; la determinazione di ciascuna delle  $\beta_k$  cambierà ogni volta che qualcuna delle variabili  $p_i$  si annulla. Quindi non è più possibile interpretare le variabili  $\beta_k$  come angoli, perché le variazioni dipendono non solo dai punti iniziali e finali, ma anche dalla traiettoria che li congiunge. In altre parole il moto in ciascuna  $\beta_k$  dipende dal moto delle altre variabili  $\beta_{k'}$  con  $k' \neq k$ .

**Esempio 79.6** Siano  $V_1, V_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^2$ . Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{2} + V_2(q_2) \left( \frac{p_1^2}{2} + V_1(q_1) \right) \quad (79.14)$$

e si dimostri che è separabile, indipendentemente dalla forma esatta di  $V_1$  e  $V_2$ .

*Discussione dell'esempio.* Possiamo scrivere l'hamiltoniana (79.14) nella forma (79.9), così da ottenere due equazioni della forma (79.3). Quindi la funzione caratteristica è data da

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) + W_1(q_1, \alpha_1), \quad (79.15)$$

dove

$$W_1(q_1, \alpha_1) = \pm \int_{q_{01}}^{q_1} dq \sqrt{2(\alpha_1 - V_1(q))}, \quad (79.16a)$$

$$W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{02}}^{q_2} dq \sqrt{2(\alpha_2 - \alpha_1 V_1(q))}, \quad (79.16b)$$

con  $q_{01}$  e  $q_{02}$  scelti in accordo con la discussione di pag. 301.

## §80 Variabili azione-angolo

Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana (78.21). Sia la (78.22) la corrispondente hamiltoniana. Supponiamo per semplicità che la funzione  $V(q)$  sia convessa e abbia in  $q = 0$  un punto di minimo assoluto. Un esempio è dato dall'oscillatore armonico (cfr. anche il §83.1)

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2. \quad (80.1)$$

Si può identificare un punto nello spazio delle fasi attraverso le coordinate  $(q, p)$  oppure attraverso il valore di energia  $E = H(q, p)$ , che fissa la curva di livello, e l'angolo  $\chi$  che il raggio vettore che individua il punto  $(q, p)$  forma con una direzione prefissata. La trasformazione  $(q, p) \mapsto (\chi, E)$  è ben definita, ma non è in generale una trasformazione canonica; già nel caso (80.1), la trasformazione è canonica solo se  $m = \omega = 1$  (cfr. l'esercizio 2).

Si può tuttavia costruire una trasformazione canonica, utilizzando la stessa idea di base, nel modo seguente. Ci proponiamo di costruire una trasformazione di coordinate  $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$  tale che  $J$  sia una costante del moto,  $\varphi$  sia un angolo e si abbia  $\{\varphi, J\} = 1$ . In particolare deve risultare

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{K}(J) = E, \quad \oint_{\gamma} d\varphi = 2\pi, \quad (80.2)$$

dove  $K$  è una opportuna funzione di classe  $C^2$  e  $\gamma$  è la curva di livello di energia  $E$ .