Esempio 79.6 Siano $V_1, V_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^2. Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{2} + V_2(q_2) \left(\frac{p_1^2}{2} + V_1(q_1) \right) \tag{79.14}$$

e si dimostri che è separabile, indipendentemente dalla forma esatta di V_1 e V_2.

Discussione dell'esempio. Possiamo scrivere l'hamiltoniana (79.14) nella forma (79.9), così da ottenere due equazioni della forma (79.3). Quindi la funzione caratteristica è data da

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) + W_1(q_1, \alpha_1), \tag{79.15}$$

dove

$$W_1(q_1, \alpha_1) = \pm \int_{q_{01}}^{q_1} \mathrm{d}q \sqrt{2\,(\alpha_1 - V_1(q))}, \tag{79.16a}$$

$$W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{02}}^{q_1} \mathrm{d}q \sqrt{2\,(\alpha_2 - \alpha_1 V_1(q))}, \tag{79.16b}$$

con q_{01} e q_{02} scelti in accordo con la discussione di pag. 301.

§80 Variabili azione-angolo

Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana (78.21). Sia la (78.22) la corrispondente hamiltoniana. Supponiamo per semplicità che la funzione $V(q)$ sia convessa e abbia in $q = 0$ un punto di minimo assoluto. Un esempio è dato dall'oscillatore armonico (cfr. anche il §83.1)

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2. \tag{80.1}$$

Si può identificare un punto nello spazio delle fasi attraverso le coordinate (q, p) oppure attraverso il valore di energia $E = H(q, p)$, che fissa la curva di livello, e l'angolo χ che il raggio vettore che individua il punto (q, p) forma con una direzione prefissata. La trasformazione $(q, p) \mapsto (\chi, E)$ è ben definita, ma non è in generale una trasformazione canonica; già nel caso (80.1), la trasformazione è canonica solo se $m = \omega = 1$ (cfr. l'esercizio 2).

Si può tuttavia costruire una trasformazione canonica, utilizzando la stessa idea di base, nel modo seguente. Ci proponiamo di costruire una trasformazione di coordinate $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ tale che J sia una costante del moto, φ sia un angolo e si abbia $\{\varphi, J\} = 1$. In particolare deve risultare

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{K}(J) = E, \qquad \oint_\gamma \mathrm{d}\varphi = 2\pi, \tag{80.2}$$

dove K è una opportuna funzione di classe C^2 e γ è la curva di livello di energia E.

Introduciamo a tal fine la seguente funzione generatrice di seconda specie:

$$F(q, J) = \int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q' \, p(q', \mathcal{K}(J)), \tag{80.3}$$

dove

$$p(q, \mathcal{K}(J)) := \pm\sqrt{2(\mathcal{K}(J) - V(q))} \tag{80.4}$$

e la funzione $J \mapsto \mathcal{K}(J)$ è ancora da determinare. D'altra parte vogliamo che sia $\mathcal{K}(J) = E$, e quindi $\mathcal{K}$ dovrà essere la funzione inversa della funzione $E \mapsto J = J(E)$, che lega l'energia E al nuovo momento coniugato J. In altre parole vogliamo una funzione $\mathcal{K}$ tale che

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial J} \neq 0. \tag{80.5}$$

Poiché, per definizione di funzione generatrice di seconda specie, si ha $p = \partial F/\partial q$, dobbiamo richiedere

$$0 \neq \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial J} = \frac{\partial p}{\partial J} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\mathcal{K}(J) - V(q))}} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial J}, \tag{80.6}$$

quindi la condizione (80.5) appare naturalmente.

La scelta corretta per J risulta essere

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} p \, \mathrm{d}q, \tag{80.7}$$

e se $J = J(E)$ è una trasformazione invertibile allora la trasformazione $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ che si ottiene dalla funzione generatrice (80.3), con $\varphi = \partial F/\partial J$, definisce una trasformazione canonica.

L'incremento della funzione generatrice F dopo un giro completo lungo la curva γ è

$$\Delta F = S(J) = \oint_{\gamma} p \, \mathrm{d}q = 2\pi J, \tag{80.8}$$

e, geometricamente, rappresenta l'area racchiusa dalla curva γ nel piano (q, p). Poiché a ogni giro F aumenta di $\Delta F = S(J)$, si vede che $F(q, J)$ è definita modulo $S(J)$ in q. D'altra parte $p = \partial F/\partial q$ non varia se modifichiamo F per multipli di $S(J)$. L'incremento della variabile φ dopo un giro è invece dato da (cfr. l'esercizio 3)

$$\Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial J} \oint_{\gamma} p \mathrm{d}q = \frac{\partial S}{\partial J} = 2\pi, \tag{80.9}$$

quindi φ è effettivamente un angolo che ruota di 2π dopo un giro completo.

Osservazione 80.1 Le variabili (J, φ) costituiscono le variabili azione-angolo del sistema unidimensionale considerato. La trasformazione $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ è canonica (ovvero $\{\varphi, J\} = 1$) per costruzione dal momento che è stata ottenuta attraverso un procedimento di seconda specie. La definizione si estende immediatamente al caso di sistemi unidimensionali qualsiasi, purché ci si limiti a orbite chiuse nel piano (q, p), oppure a orbite periodiche sul cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

Definizione 80.2 (Variabili azione-angolo) *Consideriamo un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà. Supponiamo che il sistema si possa descrivere tramite coordinate canoniche (φ, J), tali che le variabili $J_1, \ldots, J_n$ sono integrali primi, mentre le variabili $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono tali che lasciando variare solo φ_k e fissando le altre $\varphi_{k'}$, $k' \neq k$, allora φ_k torna al valore iniziale dopo una variazione $\Delta\varphi_k = 2\pi$. Chiameremo* variabili azione-angolo *le variabili (J, φ).*

Osservazione 80.3 La definizione 80.2 mostra che la definizione di variabili azione-angolo si può estendere al sistemi a più gradi di libertà; in particolare le variabili angolari sono definite sul toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$. Quello che diventa difficile è, come vedremo, investigare in quali condizioni sia possibile descrivere effettivamente il moto di un sistema a più gradi di libertà in termini di variabili azione-angolo. In generale, questo non è possibile, a meno di non fare opportune ipotesi sul sistema stesso.

Teorema 80.4 (Liouville-Arnol'd) *Si consideri un sistema a n gradi di libertà indipendente dal tempo. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi.*

- *Esistono n integrali primi $F_1, \ldots, F_n$ di classe C^2 in involuzione, i.e. tali che $\{F_i, F_j\} = 0$ per $i, j = 1, \ldots, n$.*
- *La superficie*
$$M_f = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : F_k(z) = f_k \text{ per } k = 1, \ldots, n\}, \tag{80.10}$$
con $f = (f_1, \ldots, f_n)$, è una superficie regolare, i.e. i vettori $[\partial F_1/\partial z](z), \ldots, [\partial F_n/\partial z](z)$ sono linearmente indipendenti per ogni $z \in M_f$.
- *La superficie M_f è compatta e connessa.*

In tale caso valgono i seguenti risultati.

1. *La superficie M_f è diffeomorfa al toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$.*
2. *Esiste un intorno $\mathcal{F}$ di f tale che l'insieme*
$$M_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f' \in \mathcal{F}} M_{f'} \tag{80.11}$$
è diffeomorfo a $\mathbb{T}^n \times \mathcal{F}$. Inoltre esistono in $M_{\mathcal{F}}$ coordinate canoniche (φ, J), dove J dipende solo da f e (J, φ) sono variabili azione-angolo, nel senso della definizione 80.2.

Dimostrazione. Diamo qui la dimostrazione del teorema nel caso – particolarmente semplice – in cui il sistema sia separabile e le funzioni $h_k(q_k, p_k, \ldots)$ in (78.27) dipendano quadraticamente dalle variabili p_k. Alcune estensioni banali saranno date più avanti (cfr. le osservazioni 80.6 e 80.7), mentre il caso generale sarà discusso nel §82.

Innanzitutto verifichiamo che un sistema separabile soddisfa le ipotesi del teorema. L'hamiltoniana sarà data dalla (79.9), per opportune funzioni h_k, come discusso nell'osservazione 79.2. Supponiamo, come anticipato sopra, che le funzioni h_k siano della forma

$$h_k(q_k, p_k) := p_k^2 + V_k(q_k, \alpha). \tag{80.12}$$

Si vede immediatamente che, se poniamo $F_k(z) = h_k(z_k)$, per $k = 1, \ldots, n$, le funzioni $F_1, \ldots, F_n$ sono integrali primi in involuzione. Infatti, poiché ogni F_k dipende solo dalle variabili (q_k, p_k), si ha $\{F_i, F_j\} = 0$ per $i \neq j$ (cfr. l'esercizio 4). Ogni equazione $F_k(z_k) = 0$ definisce una curva in $\mathbb{R}^2$. Perché la superficie M_f sia regolare, dobbiamo escludere le curve che contengano eventuali punti di equilibrio (cfr. l'esercizio 5). La richiesta che M sia compatta implica che le curve devono essere curve regolari chiuse; i moti corrispondenti sono quindi moti periodici. Per quanto riguarda l'ipotesi che M_f sia connessa, si veda l'osservazione 80.8. In conclusione, tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte.

Cerchiamo la funzione caratteristica di Hamilton nella forma

$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} W_k(q_k, \alpha), \tag{80.13}$$

dove la funzione W_k risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi unidimensionale

$$h_k\Big(q_k, \frac{\partial W_k}{\partial q_k}\Big) = \Big(\frac{\partial W_k}{\partial q_k}\Big)^2 + V_k(q_k, \alpha) = \alpha_k. \tag{80.14}$$

Possiamo esprimere le variabili α in termini delle variabili d'azione, $\alpha = K(J)$, con

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} p_k \mathrm{d}q_k = \frac{1}{\pi} \int_{q_{k,-}(\alpha)}^{q_{k,+}(\alpha)} \mathrm{d}q \sqrt{\alpha_k - V_k(q, \alpha)}, \tag{80.15}$$

dove γ_k è la curva descritta dal moto unidimensionale $t \mapsto (q_k(t), p_k(t))$ ottenuto fissando tutte le variabili tranne le k-esime, i.e. la curva ottenuta esplicitando in (80.14) la variabile p_k in termini di q_k. Quindi $q_{k,-}(\alpha)$ e $q_{k,+}(\alpha)$ sono i due zeri dell'equazione $\alpha_k - V(q, \alpha) = 0$.

La funzione generatrice della trasformazione $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ diventa

$$F(q, J) = \sum_{k=1}^{n} F_k(q_k, J), \tag{80.16}$$

dove

$$F_k(q_k, J) := \pm \int_{q_{0,k}}^{q_k} \mathrm{d}q \ \sqrt{\mathcal{K}_k(J) - V_k(q', \mathcal{K}(J))}, \tag{80.17}$$

così che, in termini della variabili azione-angolo, le equazioni del moto sono (cfr. l'esercizio 6)

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_k = \omega_k(J) := \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial J_k}, & k = 1, \dots, n, \\ \dot{J}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{80.18}$$

dove $\omega(J) = (\omega_1(J), \dots, \omega_n(J))$ definisce il vettore delle frequenze delle variabili angolari.

La variazione della variabile φ_k lungo una curva γ_j, i.e. in corrispondenza del moto in cui le variabili (q_j, p_j) si muovano lungo la curva γ_j e le altre variabili non cambino, è data da

$$\oint_{\gamma_j} \mathrm{d}\varphi_k = \oint_{\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial J_i} \mathrm{d}J_i \right) = \oint_{\gamma_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \oint_{\gamma_j} \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial J_k} \, \mathrm{d}q_j,$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\varphi_k = \partial F / \partial J_k$ è vista come funzione di (q, J), e si è utilizzato il fatto che per il moto considerato si ha $\mathrm{d}J_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\mathrm{d}q_i = 0$ per ogni $i \neq j$. Quindi (cfr. l'esercizio 7)

$$\oint_{\gamma_j} \mathrm{d}\varphi_k = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial F}{\partial q_j} \, \mathrm{d}q_j = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} p_j \, \mathrm{d}q_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_k} = 2\pi \delta_{jk}, \tag{80.19}$$

ovvero, dopo un giro completo della curva γ_j, l'angolo φ_j varia di 2π, mentre tutti gli altri angoli non cambiano: la variabile φ_j è l'angolo che parametrizza la curva γ_j. ■

Osservazione 80.5 Il caso $n = 1$ è banale: è quello descritto all'inizio del paragrafo.

Osservazione 80.6 La dimostrazione data sopra è immediatamente generalizzabile al caso in cui invece della (80.14) si abbia

$$h_k(q_k, p_k, \alpha) = a_k(q_k, \alpha) \, p_k^2 + V_k(q_k, \alpha) = \alpha_k, \tag{80.20}$$

con $a_k > 0$. Semplicemente la curva γ_k si ottiene esplicitando p_k in funzione di q_k come

$$p_k = \pm \sqrt{\frac{2 \left(\alpha_k - V_k(q_k, \alpha) \right)}{a_k(q_k, \alpha)}}, \tag{80.21}$$

e per il resto si procede come prima. In realtà la dimostrazione si adatta facilmente al caso più generale in cui ogni γ_k sia una curva chiusa parametrizzabile come $p_k = \pm \tilde{p}_k(q_k, \alpha)$, dove la determinazione positiva descrive la curva nel semipiano $p_k > 0$ e la determinazione negativa nel semipiano $p_k < 0$.

Osservazione 80.7 Altra estensione banale è quella al caso in cui q_k è un angolo (e quindi lo spazio delle fasi è un cilindro) e la curva γ_k si raccorda ai lati del cilindro (cfr. l'osservazione 80.1). In tal caso si ha

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_k \mathrm{d}q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}q \sqrt{\alpha_k - V(q_k, \alpha)}, \tag{80.22}$$

che rappresenta l'area sottesa al grafico di p_k.

Osservazione 80.8 Che la superficie M_f debba essere compatta, perché si applichi il teorema, si vede già in casi semplici. Se si considera un punto libero in $\mathbb{R}^3$ esistono tre integrali primi in involuzione (le tre componenti della quantità di moto), ma il moto è nello spazio, i.e. non su un toro tridimensionale. La richiesta che la superficie sia connessa è invece meno forte: se non lo è ci si può restringere a una sua componente connessa.

Osservazione 80.9 Dire che M_f è diffeomorfo a un toro n-dimensionale significa che si può parametrizzare M_f (in modo differenziabile) con n variabili angolari, i.e. se $z = (z_1, \dots, z_n)$ rappresentano le coordinate di un punto della superficie M_f allora si ha $z = z(\theta_1, \dots, \theta_n)$, con $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$. In termini di tali angoli $\theta_1, \dots, \theta_n$ il moto ha n periodi.

Definizione 80.10 (Moto multiperiodico) *Un moto sulla superficie M_f si dice* multiperiodico*. Si chiamano* frequenze del moto multiperiodico *le frequenze con cui variano le variabili angolari. In generale i periodi sono incommensurabili: in tal caso il moto è detto* moto quasiperiodico*.*

Osservazione 80.11 Nel caso di un sistema separabile con funzione caratteristica (80.13), le frequenze del moto multiperiodico sono date da

$$\omega_k(J) = \frac{\partial \alpha_n}{\partial J_k} = \left(A^{-1}\right)_{nk}, \qquad A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j} \tag{80.23}$$

e si trovano immediatamente una volta che sia nota la dipendenza di J dalle costanti α. Per esempio se $n = 2$ si ha

$$A := \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} & 0 \\ \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \det\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2},$$

da cui si ricava

$$A^{-1} = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & 0 \\ -\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix}.$$

In conclusione si ottiene

$$\omega_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_1} = -\frac{\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\partial J_2 \partial \alpha_2}, \qquad \omega_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_2} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}, \tag{80.24}$$

che rappresentano le frequenze del moto multiperiodico. Se $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ allora il moto complessivo è periodico, altrimenti è quasiperiodico (cfr. la definizione 80.10).

Osservazione 80.12 Un sistema che soddisfi le ipotesi del teorema di Liouville-Arnol′d è canonicamente integrabile, secondo la definizione 78.14. Per questo motivo, a volte si usa l'espressione *sistema integrabile secondo Liouville-Arnol′d* per indicare un sistema hamiltoniano canonicamente integrabile.