Osservazione 82.6 Il teorema di Liouville-Arnol′d afferma che, sotto le ipotesi considerate, valgono i seguenti risultati:

1. la superficie M_f è diffeomorfa a $\mathbb{T}^n$,
2. esiste un intorno $\mathcal{F}$ di f tale che per ogni $f' \in \mathcal{F}$ la superficie $M_{f'}$ è diffeomorfa a $\mathbb{T}^n$ e nell'insieme $M_{\mathcal{F}}$ si possono usare variabili azione-angolo.

La parte 1 del teorema è dovuta a Liouville, mentre la parte 2 è dovuta ad Arnol′d. Talora i due risultati sono enunciati separatamente, rispettivamente come *teorema di Liouville* e *teorema di Arnol′d*.

§83 Variabili azione-angolo di alcuni sistemi hamiltoniani

83.1 Oscillatore armonico

L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico è data da

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{83.1}$$

e diventa

$$\mathcal{K}(J) = \omega J, \tag{83.2}$$

con la trasformazione canonica (cfr. l'esercizio 17)

$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\varphi, \qquad p = \sqrt{2Jm\omega}\cos\varphi; \tag{83.3}$$

La funzione generatrice (di seconda specie) è

$$F(q,J) = \int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q' \sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 (q')^2}. \tag{83.4}$$

Infatti, derivando la (83.4) rispetto a J, si trova

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial J} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-(x')^2}}, \qquad x = q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}, \tag{83.5}$$

e prendendo $q_0 = x_0 = 0$ (che equivale a fissare l'origine dei tempi) si trova $\varphi = \arcsin x$, in accordo con la (83.3). Si noti che la (83.4) si integra esplicitamente e dà (cfr. l'esercizio 18)

$$F(q,J) = \frac{q}{2}\sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 q^2} + J\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\right). \tag{83.6}$$

L'oscillatore armonico è un sistema integrabile (cfr. la definizione 50.1). Inoltre è un *sistema iscocrono*: la frequenza ω non dipende dall'azione. Infatti tutti i moti sono periodici con periodo $T = 2\pi/\omega$, indipendentemente dai dati iniziali.