$$\tan^2\frac{t}{2}=\frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}=\frac{1-\cos t}{2}\,\frac{2}{1+\cos t}=\frac{1-\cos(\varphi+\pi/2)}{1+\cos(\varphi+\pi/2)}=\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

così che

$$\mathrm{e}^{2u}=\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\qquad\Longrightarrow\qquad \sin\varphi=\frac{\mathrm{e}^{2u}-1}{\mathrm{e}^{2u}+1}=\frac{\mathrm{e}^{u}-\mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^{u}+\mathrm{e}^{-u}}=\tanh u,$$

da cui segue $\mathrm{sn}(u,1)=\tanh,u$. Si verifica subito che $\mathrm{cn}(u,1)=\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=2/(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})$.]

Esercizio 30 Si dimostri che la soluzione $\theta(t)=q(t)$, con $q(t)$ data dalla (83.23), si riduce alla (24.15) con $\bar\theta=0$. [*Suggerimento.* Basta far vedere che $2\mathrm{arcsin}(\tanh x)=4\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^x)-\pi$, o, equivalentemente, che $\sin(2\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^x)-\pi/2)=\tanh x$. Si ha

$$\sin\Big(2t-\frac{\pi}{2}\Big)=-\cos 2t=\sin^2\!t-\cos^2\!t=\frac{\tan^2\!t}{1+\tan^2\!t}-\frac{1}{1+\tan^2\!t}=\frac{\tan^2\!t-1}{\tan^2\!t+1}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\tanh x,$$

dove si è posto, per semplicità, $t:=\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^x)$ e si sono utilizzate le identità trigonometriche, che legano il seno e il coseno alla tangente, dell'esercizio 40 del capitolo 12.]

Esercizio 31 Si dimostri che i coefficienti di Fourier di una funzione periodica di classe C^∞ decadono più velocemente di ogni potenza. [*Suggerimento.* Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione periodica di classe C^∞. La funzione si può sviluppare in serie di Fourier,

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\mathrm{e}^{ik\omega t},\qquad \omega:=\frac{2\pi}{T},\qquad f_k:=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-ik\omega t}f(t),$$

dove T è il periodo della funzione. Poiché la funzione è di classe C^∞, per ogni $p\in\mathbb{N}$, esiste

$$F_p:=\max_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^pf}{\mathrm{d}t^p}(t)\right|.$$

così che, moltiplicando i coefficienti di Fourier f_k per $(-i\omega k)^p$, si ottiene

$$\begin{aligned}(-ik\omega)^pf_k&=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{d}t\left(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\mathrm{e}^{-ik\omega t}\right)f(t)=-\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{d}t\left(\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}t^{p-1}}\mathrm{e}^{-ik\omega t}\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{d}t\left(\frac{\mathrm{d}^{p-2}}{\mathrm{d}t^{p-2}}\mathrm{e}^{-ik\omega t}\right)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}^2t}(t)=\ldots=(-1)^p\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-ik\omega t}\,\frac{\mathrm{d}^pf}{\mathrm{d}t^p}(t),\end{aligned}$$

avendo integrato per parti p volte e usato ogni volta che

$$\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\mathrm{e}^{-ik\omega t}\right)\frac{\mathrm{d}^{p-j}}{\mathrm{d}t^{p-j}}f(t)\bigg|_0^T=0,\qquad j=0,\ldots,p-1,$$

poiché $k\omega T=2\pi k$ ed f è periodica di periodo T insieme alle sue derivate. In conclusione si ha $|\omega k|^p\,|f_k|\le F_p$ per ogni $p\in\mathbb{N}$.]

Esercizio 32 Si dimostri che il problema dei due corpi è un sistema integrabile e che i suoi periodi sono dati dalle (83.34). [*Soluzione.* Il sistema ammette i due integrali primi

$$A=m\rho^2\dot\theta,\qquad E=\frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2\right)+V(\rho),$$

che, riscritti in termini delle coodinate canoniche $(\rho, \theta, \pi_\rho, p_\theta)$, dove i momenti sono $p_\rho = \partial\mathcal{L}(\rho, \dot\rho, \dot\theta)/\partial\dot\rho$ e $p_\theta = \partial\mathcal{L}(\rho, \dot\rho, \dot\theta)/\partial\dot\theta$ (cfr. la (59.5)), diventano

$$A = p_\theta, \qquad E = \mathcal{H}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right) + V(\rho).$$

Sia $w_0 = (z_0, \theta_0, \dot\theta_0)$, un dato iniziale per il sistema con E, A fissati, dove $z_0 := (\rho_0, \dot\rho_0)$ costituisce un dato iniziale nel piano $(\rho, \dot\rho)$ per il moto della variabile radiale $\rho(t)$. Se $R(t) = R(t, E, A)$ è la soluzione dell'equazione radiale $m\ddot\rho = -\partial V_A(\rho)/\partial\rho$ con dato iniziale $R(0) = \rho_-$ e $\dot R(0) = 0$, indichiamo con $t_0(z_0)$ il tempo necessario perché si abbia $R(t_0(z_0)) = \rho_0$ e $\dot R(t_0(z_0)) = \dot\rho_0$; per costruzione si ha $t_0(z(t)) = t_0(z_0) + t$. La soluzione dell'equazione radiale è $\rho(t) = R(t + t_0(z_0))$ e ha periodo $T_1 = T_1(E, A)$, come segue dall'analisi dei capitoli 6 e 7. Inoltre si ha $\dot\theta(t) = A/m\rho^2(t) = A/mR^2(t + t_0(z))$. La funzione $A/mR^2(t)$ è una funzione di classe C^∞ (poiché $R(t) \ge \rho_- > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$) periodica in t di periodo T_1, quindi può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\frac{A}{mR^2(t)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\omega_1 t}\chi_k(E, A), \qquad \omega_1 := \frac{2\pi}{T_1},$$

I coefficienti $\chi_k = \chi_k(E, A)$ decadono più velocemente di ogni potenza (cfr. l'esercizio 31), e quindi la serie di Fourier converge uniformemente. Integrando $\dot\theta(t) = A/m\rho^2(t)$, si trova

$$\theta(t) = \theta_0 + \chi_0 t + S(t + t_0(z_0)) - S(t_0(z_0)), \qquad S(t) = S(t, E, A) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{\mathrm{e}^{ik\omega_1 t}}{ik\omega_1}\chi_k(E, A).$$

Si vede quindi che il moto è caratterizzato dai due periodi T_1 e $2\pi/\chi_0$. D'altra parte si ha

$$\chi_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \mathrm{d}t\, \frac{A}{mR^2(t)} = \frac{2}{T_1}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \mathrm{d}R \frac{A}{mR^2(t)}\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R} = \frac{2}{T_1}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \mathrm{d}R \frac{A}{mR^2(t)\dot R}$$

dove $\dot R = \sqrt{(2/m)(E - V_A(R))}$, così che si ottiene $2\pi/\chi_0 = T_2 = T_2(A, E)$. Scriviamo $w = (z, \theta, \dot\theta)$ e indichiamo con $z(t) = (\rho(t), \dot\rho(t))$ la soluzione dell'equazione radiale con dato iniziale $z(0) = z_0$ e con $w(t) = (z(t), \theta(t), \dot\theta(t))$ la soluzione del sistema con dato iniziale $w(0) = w_0$. Definiamo

$$\varphi_1 = \Phi_1(w) := \frac{2\pi}{T_1} t_0(z), \qquad \varphi_2 = \Phi_2(w) := \theta - S(t_0(z), E, A).$$

Si vede subito che

$$\varphi_1(t + T_1) = \Phi_1(w(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1} t_0(z(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1}\left(t_0(z(t)) + T_1\right) = \Phi_1(w(t)) + 2\pi = \varphi_1(t) + 2\pi,$$

dove si è tenuto conto che, per costruzione, $t_0(z(t)) = t_0(z_0) + t$, e, analogamente,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t + T_2) = \Phi_2(w(t + T_2)) &= \theta(t + T_2) - S(t_0(z(t + T_2))) \\
&= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi + S(t_0(z(t + T_2))) - S(t_0(z_0)) - S(t_0(z(t + T_2))) \\
&= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi - S(t_0(z_0)) \\
&= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi + S(t_0(z(t))) - S(t_0(z_0)) - S(t_0(z(t))) \\
&= \Phi_2(w(t)) + 2\pi = \varphi_2(t) + 2\pi,
\end{aligned}$$

che mostra che φ_1 e φ_2 sono angoli. Infine la trasformazione di coordinate $(\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2, E, A)$ risulta diferenziabile e invertibile. Questo completa la dimostrazione dell'integrabilità del sistema.]

Esercizio 33 Si discuta come si modifica la discussione dell'esercizio 32 nel caso in cui l'equazione $E - V_A(\rho) = 0$ abbia più di due radici.

Esercizio 34 Si dimostri che il problema dei due corpi soddisfa le ipotesi del teorema di Liouville-Arnol′d e che è quindi canonicamente integrabile. [*Suggerimento.* Il sistema ammette i due integrali primi indipendenti A ed E. Si verifica subito che sono in involuzione.]

Esercizio 35 Si calcolino le variabili azione-angolo per il problema dei due corpi. [*Soluzione.* Sia

$$L = \lambda(E, A) := \int_{\rho_-(E,A)}^{\rho_+(E,A)} \frac{\mathrm{d}\rho}{\pi} \sqrt{2m\,(E - V_A(\rho))}.$$

Tale relazione può essere invertita, per il teorema della funzione implicita, permettendo così di scrivere l'energia E in termini di L e A, i.e. $E = \varepsilon(L, A)$ tale che $L = \lambda(\varepsilon(L, A), A)$. Si ha quindi

$$1 = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}L} = \frac{\partial\lambda}{\partial E}\frac{\partial\varepsilon}{\partial L}, \qquad 0 = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}A} = \frac{\partial\lambda}{\partial E}\frac{\partial\varepsilon}{\partial A} + \frac{\partial\lambda}{\partial A},$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varepsilon}{\partial L} &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial E}\right)^{-1} = 2\pi \left(2\int_{\rho_-(E,A)}^{\rho_+(E,A)} \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(E - V_A(\rho))}} \right)^{-1} = \frac{2\pi}{T_1}, \\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial A} &= -\left(\frac{\partial\lambda}{\partial E}\right)^{-1} \frac{\partial\lambda}{\partial A} = \frac{2\pi}{T_1}\frac{A}{m\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(E - V_A(\rho))}} = \frac{2\pi}{T_2},
\end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le definizioni di T_1 e T_2 dell'esercizio 49. Si consideri allora la funzione generatrice

$$F(\rho, \theta, L, A) = A\theta + \int_{\rho_-(\varepsilon(L,A))}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \sqrt{2m\,(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}.$$

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = A = p_\theta, \qquad \frac{\partial F}{\partial\rho} = \sqrt{2m\,(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))} = p_\rho,$$

si vede immediatamente che F risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(\rho, \theta, \frac{\partial F}{\partial\rho}, \frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = \varepsilon(L, A).$$

Se perciò definiamo

$$g = \frac{\partial F}{\partial A}, \qquad \ell = \frac{\partial F}{\partial L},$$

la trasformazione di coordinate $(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) \mapsto (\ell, g, L, A)$ è canonica. Usando il fatto che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial A} &= \theta + \int_{\rho_-(\varepsilon(L,A))}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial A} - \frac{A}{m(\rho')^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}}, \\
\frac{\partial F}{\partial L} &= \int_{\rho_-(\varepsilon(L,A))}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \frac{\partial\varepsilon}{\partial L} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}},
\end{aligned}$$

si trova

$$\ell = \varphi_1 = \frac{2\pi}{T_1(\varepsilon(L,A),A)} t_0(z), \qquad g = \varphi_2 = \theta - S(t_0(z), \varepsilon(L,A), A),$$

dove φ_1, φ_2 sono definiti nell'esercizio 32. Infatti si ha $\partial\varepsilon/\partial L = 2\pi/T_1$ e $\partial\varepsilon/\partial A = 2\pi/T_2$. Inoltre

$$I(F) = \int_{\rho_-}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \, \frac{F(\rho')}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(\varepsilon(L,A) - V_A(\rho'))}} = \int_{\rho_-}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \, \frac{F(\rho')}{\dot\rho} = \int_0^{t_0(z)} \mathrm{d}t \, F(R(t)),$$

che per $F = 1$ dà $I(F) = t_0(z)$ e per $F = A/m\rho^2$ dà $I(F) = \chi_0 t_0(z) + S(t_0(z))$.]

Esercizio 36 Sia $S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$ la sfera unitaria bidimensionale. Si dimostri che la sua area è 4π. [*Suggerimento.* I punti di S_2 sono parametrizzati da

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{X}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \qquad (\theta,\varphi) \in D := [0,2\pi) \times [0,\pi).$$

L'area della superficie sferica è data dall'integrale (cfr. la (76.2))

$$\int_{S_2} \mathrm{d}\sigma = \int_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi} \right| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\varphi.$$

dove si è usato che

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\theta} = (-\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, 0), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, -\sin\varphi)$$

e quindi

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi} = \left(-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi\right) \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi} \right| = \sin\varphi.$$

L'integrale si calcola immediatamente e dà $2\pi\,(\cos 0 - \cos\pi) = 4\pi$.]

Esercizio 37 Si consideri la sfera unitaria $S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$. L'intersezione della sfera con un piano passante per l'origine determina un *cerchio di raggio massimo*. Si definisce *poligono sferico* un sottoinsieme aperto connesso della sfera unitaria la cui frontiera sia costituita da archi di cerchio massimo; il numero di archi rappresenta il numero di lati del poligono e i punti in cui si intersecano i cerchi di raggio massimo ne costituiscono i vertici. In particolare un poligono sferico con tre lati costituisce un *triangolo sferico*. Dato un triangolo sferico T, indichiamo con A, B, C le lunghezze dei suoi tre lati, e con α, β, γ i tre angoli opposti ad A, B, C, rispettivamente; per definizione l'angolo tra due lati è uguale all'angolo tra i piani dei cerchi di raggio massimo che contengono i due lati. Un triangolo sferico si chiama *proprio* se i suoi lati e i suoi angoli sono tutti minori di π, si chiama *improprio* in caso contrario. Se si ammettono lati più lunghi di π, è facile convincersi che i lati più lunghi di π si intersecano tra loro nei punti antipodali ai vertici in comune; tali punti non vengono conteggiati tra i vertici. Per identificare gli angoli di un triangolo sferico improprio con lati più lunghi di π, si deve richiedere che gli angoli siano tutti dalla stessa parte muovendosi lungo il perimetro; in particolare, il triangolo così ottenuto non si presenta come un insieme racchiuso dal suo perimetro. Esempi di triangoli propri e impropri sono rappresentati nella figura 18.5. Se T è un triangolo sferico,