se $\alpha_1 > 1$, mentre

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \mathrm{d}\theta \sqrt{2m\,(\alpha_2 - V(r))},$$

se $\alpha_2 > V(r_{\min})$ e $r_\pm$ sono le soluzioni di $V(r) = \alpha_2$, tali che $0 < r_- < r_{\min} < r_+$.]

Esercizio 54 Un disco omogeneo di densità $\sigma = 1$ e raggio $R = 2$ si muove in un piano verticale, soggetto all'azione della forza peso e di due molle, di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo trascurabile: le due molle collegano due punti diametralmente opposti del disco a un punto P di massa $m = 1$ libero di muoversi lungo una retta orizzontale r.
(1) Si determinino le simmetrie del sistema e i momenti conservati corrispondenti.
(2) Si scriva l'hamiltoniana del sistema e si dimostri che il sistema è separabile.
(3) Si individui un dato iniziale per il quale il moto è periodico e se ne calcoli esplicitamente il periodo.

Esercizio 55 Una circonferenza omogenea di massa M e raggio R ruota in un piano orizzontale intorno al suo centro C. Un punto di massa m si muove lungo la circonferenza ed è collegato da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k a un punto P della circonferenza.
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si scrivano l'hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e la si integri per separazione di variabili.
(4) Si determinino i periodi dei moti multiperiodici in termini di integrali definiti.

Esercizio 56 Un cilindro omogeneo di raggio R, di altezza h e di massa M si muove nello spazio in modo tale che il suo centro di massa sia vincolato a muoversi lungo una retta r che formi un angolo φ con un piano orizzontale π. Siano A e B i centri delle due basi del cilindro: entrambi i punti sono collegati a un punto fisso P di r tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.
(1) Si scrivano l'hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(2) Si individuino eventuali quantità conservate, studiando le simmetrie del sistema. Si interpreti il risultato alla luce del teorema di Noether.
(3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e si dimostri che il sistema è separabile.
(4) Si determinino le variabili d'azione e le frequenze dei moti multiperiodici.

Esercizio 57 Un sistema hamiltoniano non può avere un numero di integrali primi indipendenti maggiore del doppio del numero di gradi di libertà, dal momento che ogni integrale primo riduce di 1 il numero di variabili indipendenti. Un sistema hamiltoniano integrabile a n gradi di libertà si dice *superintegrabile* se ammette più di n integrali primi e *massimamente superintegrabile* se ne ammette $2n - 1$. Si dimostri che il problema dei due corpi, nel caso di un campo centrale gravitazionale, è un sistema massimamente integrabile. [*Suggerimento.* Nel caso di un campo centrale gravitazionale, oltre all'energia E e al momento angolare $\boldsymbol{L}$, si conserva il vettore di Laplace-Runge-Lenz $\boldsymbol{A}$ (cfr. l'esercizio 20 del capitolo 7). Si verifica facilmente che $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L} = 0$, utilizzando il fatto che i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L}$ sono entrambi ortogonali a $\boldsymbol{L}$, e che

$$|\boldsymbol{A}|^2 = 2\mu E L^2 + \mu^2 k^2,$$

dal momento che si ha $|\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L}| = |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 |\boldsymbol{L}|^2$ e

$$\mu \boldsymbol{r} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L}) = \mu \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) = |\boldsymbol{L}|^2,$$

avendo applicato due volte l'identità del prodotto misto (cfr. l'esercizio 18 del capitolo 7). Quindi, delle sette costanti del moto E, $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{A}$, solo 5 sono indipedenti.]

Esercizio 58 Si dimostri che l'oscillatore armonico bidimensionale è un sistema superintegrabile. [*Suggerimento.* L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico bidimensionale è

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right).$$

Se definiamo

$$E_1 := \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2, \quad E_1 := \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_2^2, \quad L := q_1p_2 - q_2p_1, \quad K := \frac{1}{2m}p_1p_2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1q_2,$$

si vede facilmente, per verifica diretta, che E_1, E_2, L e K sono costanti del moto. Poiché risulta $\omega^2L^2 + 4K^2 = 4E_1E_2$, solo tre costanti del moto sono indipendenti.]

Esercizio 59 Si dimostri che l'oscillatore armonico tridimensionale è un sistema superintegrabile. [*Suggerimento.* L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico tridimensionale è

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right).$$

Siano

$$L_1 = q_2p_3 - q_3p_2, \qquad L_2 = q_3p_1 - q_1p_3, \qquad L_3 = q_1p_2 - q_2p_1$$

le componenti del momento angolare. Introduciamo la *matrice di correlazione* K, i cui elementi sono

$$K_{ij} := \frac{1}{2m}p_ip_j + \frac{1}{2}m\omega^2 q_iq_j.$$

Poiché K è una matrice simmetrica, è sufficiente considerarne gli elementi diagonali $E_i := K_{ii}$, dove $i = 1, 2, 3$, e gli elementi $K_1 := K_{23}$, $K_2 := K_{13}$ e $K_3 := K_{12}$. Si verifica facilmente, utilizzando le equazioni del moto, che $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3)$ e $\boldsymbol{K} = (K_1, K_2, K_3)$ sono integrali primi. Si può inoltre verificare che valgono le relazioni

$$\omega^2L_1^2 + 4K_1^2 = 4E_2E_3, \qquad \omega^2L_2^2 + 4K_2^2 = 4E_1E_3, \qquad \omega^2L_3^2 + 4K_3^2 = 4E_1E_2,$$

che permettono di esprimere $\boldsymbol{K}$ in funzione di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{L}$. Inoltre risulta

$$L_2K_3 + L_3K_2 + E_1L_1 = 0, \qquad L_1K_3 + L_3K_1 + E_2L_2 = 0, \qquad L_1K_2 + L_2K_1 + E_3L_3 = 0.$$

così che, scrivendo K_1, K_2 e K_3 in termini di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{L}$, si ottengono tre relazioni che legano $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{L}$. Le tre relazioni non sono tuttavia indipendenti, dal momento che, per esempio, la seconda e la terza si possono ricavare dalla prima e dalle relazioni precedenti. Per ottenere la seconda si può ragionare come segue. Si utilizza la prima relazione per esplicitare K_2:

$$K_2 = -\frac{E_1L_1 + L_2K_3}{L_3},$$

così che la relazione $\omega^2L_2^2 + 4K_2^2 = 4E_1E_3$ si può riscrivere

$$\omega^2L_2^2L_3^3 + 4E_1^2L_1^2 + 4L_2^2K_3^2 + 8E_1L_1L_2K_3 = 4E_1E_3L_3^2$$

che, in virtù della relazione $\omega^2L_3^2 + 4K_3^2 = 4E_1E_2$, diventa

$$4E_1E_2L_2^2 + 4E_1^2L_1^2 + 8E_1L_1L_2K_3 = 4E_1E_3L_3^2.$$

Moltiplicando per E_2/E_1 e utilizzando la relazione $\omega^2 L_1^2 + 4K_1^2 = 4E_2E_3$, si ottiene

$$4E_2^2L_2^2 + 4E_1E_2L_1^2 + 8L_1K_3E_2L_2 = 4E_2E_3L_3^2 = \left(\omega^2 L_1^2 + 4K_1^2\right) L_3^2,$$

che, utilizzando nuovamente la relazione $\omega^2 L_3^2 + 4K_3^2 = 4E_1E_2$, si semplifica in

$$4E_2^2L_2^2 + 8L_1K_3E_2L_2 + 4K_3^2L_1^2 - 4K_1^2L_3^2 = 0.$$

Si è quindi ottenuta un'equazione di secondo grado in E_2L_2:

$$(E_2L_2)^2 + 2L_1K_3\,(E_2L_2) + K_3^2L_1^2 - K_1^2L_3^2 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$E_2L_2 = -L_1K_3 \pm \sqrt{L_1^2K_3^2 - \left(L_1^2K_3^2 - K_1^2L_3^2\right)} = -L_1K_3 \pm \sqrt{L_3^2K_1^2} = -L_1K_3 \pm L_3K_1.$$

Per fissare il segno dell'ultimo termine, basta notare che, per $p_2 = p_3 = 0$, si ha $E_2L_2 = m\omega^2 q_2^2 q_3 p_1/2$, $L_1K_3 = 0$ e $K_1L_3 = -m\omega^2 q_2^2 q_3 p_1/2$: ne segue quindi la seconda relazione $L_1K_3 + L_3K_1 + E_2L_2 = 0$. In maniera analoga si ragiona per la terza relazione. In conclusione si hanno nove integrali primi, di cui solo cinque sono indipendenti.]

Esercizio 60 Si interpretino i risultati del §32 alla luce degli esercizi 57÷59, in particolare si commenti il fatto che tutte le orbite nel caso del campo centrale gravitazionale e del campo centrale armonico sono chiuse. [*Suggerimento.* Ogni integrale primo individua un superficie di codimensione 1: fissato il dato iniziale, e quindi fissato il valore degli integrali primi, in un sistema massimamente superintegrabile il moto si svolge nell'intersezione di $2n-1$ superfici in $\mathbb{R}^n$, quindi lungo una curva. Poiché nei casi considerati nei tre esercizi le intersezioni delle superfici costituiscono insiemi regolari compatti, le curve sono chiuse e limitate: le traiettorie sono periodiche, comunque siano scelti i dati iniziali.]