

19 | Teoria delle perturbazioni

§84 Teoria delle perturbazioni al primo ordine

I sistemi integrabili costituiscono un esempio di sistemi dinamici le cui equazioni del moto si risolvono esattamente. Sfortunatamente, i sistemi integrabili non sono molti. Nei capitoli precedenti ne abbiamo incontrati alcuni: i sistemi hamiltoniani unidimensionali (cfr. il §80), quali l'oscillatore armonico, l'oscillatore cubico e il pendolo semplice studiati nel §83; i sistemi separabili (cfr. il §79); il problema dei due corpi (cfr. il §83.4 e gli esercizi 32÷35 del capitolo 18); il sistema rigido con un punto fisso (cfr. gli esercizi 40÷47 del capitolo 18). Ovviamente ne esistono altri: la trottola di Lagrange, la trottola di Kovalenskaja, il moto geodetico su una superficie ellissoidale, il sistema di Calogero-Moser, il reticolo di Toda, ecc. (cfr. la nota bibliografica). I sistemi integrabili sono comunque una rarità nella classe dei sistemi hamiltoniani. Infatti, come accennato nell'osservazione 78.15 e come vedremo meglio nel presente e nel prossimo capitolo, se si perturba un sistema integrabile, generalmente il sistema che si ottiene non è più integrabile. Per esempio, se si vuole descrivere il moto di un pianeta del sistema solare, fin tanto che si ignora la presenza degli altri corpi celesti, si ha un problema dei due corpi, ma, non appena si cerchi una soluzione esatta delle equazioni del moto tenendo conto delle interazioni gravitazionali con gli altri pianeti – per non parlare degli altri corpi celesti, quali i satelliti e gli asteroidi –, il problema diventa praticamente intrattabile dal punto di vista matematico.

Ciò nonostante, in molte situazioni di interesse fisico, incluso il moto dei pianeti, si ha a che fare con sistemi hamiltoniani che, per quanto non siano integrabili, differiscono di poco da sistemi che si possono risolvere in modo rigoroso. La teoria delle perturbazioni si occupa precisamente di problemi in cui compare un parametro ε che misura la differenza tra l'hamiltoniana del sistema a cui si è interessati e quella di un sistema integrabile. Di conseguenza, per $\varepsilon = 0$ le equazioni del moto sono risolubili esplicitamente e la questione diventa quindi quella di investigare cosa succeda quando ε è diverso da zero ma piccolo. Una domanda naturale è se per $\varepsilon \neq 0$ la dinamica sia in qualche modo vicino a quella del sistema imperturbato (i.e. del sistema a cui ci si riduce per $\varepsilon = 0$): si può cercare di ottenere soluzioni approssimate, nell'assunzione che esse differiscano di poco da quelle del sistema imperturbato.

A livello pratico, si cerca una soluzione delle equazioni del moto nella forma di una serie di potenze in ε . Prescindendo da eventuali problemi di convergenza della serie, si può pensare di fissarne i coefficienti ordine per ordine. Nel caso in cui questo si riesca a fare a tutti gli ordini, occorre poi studiare l'eventuale convergenza della serie, per determinare se il risultato trovato perturbativamente abbia senso e descriva correttamente la dinamica. Infatti, se si spinge la teoria perturbativa a un qualche ordine $O(\varepsilon^k)$ ci si può aspettare che il risultato trovato sia corretto a meno di correzioni di ordine superiore, ma questo è possibile solo se si ha un controllo rigoroso delle correzioni.

Una delle prime e più importanti applicazioni della teoria delle perturbazioni ai sistemi dinamici si è avuta in meccanica celeste. Le serie formali con cui si descrivono le soluzioni delle equazioni del moto (serie di Lindstedt) sono state utilizzate dagli astronomi fin dagli albori della teoria delle perturbazioni per studiare il moto dei pianeti del sistema solare, e hanno prodotto risultati in ottimo accordo con i dati sperimentali. Basti pensare che la scoperta di Nettuno, ancora prima che il pianeta fosse osservato empiricamente, fu prevista dall'inglese Adams (nel 1843) e del francese Le Verrier (nel 1846) sulla base di calcoli perturbativi: per tener conto delle deviazioni osservate nel moto di Urano rispetto alle predizioni teoriche, si ipotizzò l'esistenza di un ottavo pianeta nel sistema solare che ne perturbasse l'orbita, e per individuarne la posizione e la massa ci si basò sulla teoria delle perturbazioni.

È importante sottolineare che lo studio della convergenza costituisce un problema delicato, a causa della presenza dei piccoli divisori (si veda più avanti in questo stesso capitolo). Tuttavia, pragmaticamente, fin tanto che i risultati trovati con le serie di Lindstedt rendevano conto delle osservazioni astronomiche, ci si disinteressò del fatto che le serie convergessero o meno; con il lavoro di Poincaré, si arrivò anche a dubitare della convergenza. Solo in tempi relativamente recenti l'esistenza delle soluzioni perturbative fu dimostrata in modo rigoroso, come conseguenza del teorema KAM, e una verifica diretta della convergenza delle serie di Lindstedt fu prodotta molto più tardi (cfr. il capitolo 20). Vale al pena sottolineare in ogni caso che, anche nell'ipotesi che si riesca a dimostrare che la serie converge, questo richiede la condizione che il parametro perturbativo sia sufficientemente piccolo: non è assolutamente ovvio che nei casi concreti i parametri fisici soddisfino tale condizione. Nel caso del sistema solare, per esempio, è ancora dibattuto se si è nel regime in cui la teoria delle perturbazioni è valida e i moti sono regolari; simulazioni numeriche recenti, a partire dai lavori pionieristici di Laskar, suggeriscono che il sistema solare sia stabile solo apparentemente e che divenga invece caotico su scale di tempi lunghi – molto lunghi in termini umani, per nostra tranquillità.

Dopo l'applicazione fruttuosa alla meccanica classica, le tecniche perturbative furono estese a problemi fondamentali delle teorie quantistiche: il successo riscontrato in questo campo (quali il calcolo degli spettri atomici, della diffusione Compton e del Lamb shift, l'elettrodinamica quantistica, l'uso dei diagrammi di Feynman) fu determinante per decretare il trionfo della meccanica quantistica e della teoria dei campi. Di nuovo, già i conti perturbativi ai primi ordini fornirono una giustificazione teorica quantitativa delle osservazioni sperimentali, rendendo di

fatto secondario, se non addirittura irrilevante ai fini pratici, il problema della convergenza dell'approccio perturbativo.

Nell'ambito della meccanica classica, la teoria della perturbazioni è stata utilizzata anche nel caso di sistemi non hamiltoniani, quali per esempio i sistemi dissipativi: in generale ogni qual volta le equazioni del moto si presentano come perturbazioni di equazioni che si risolvono esplicitamente, è possibile ricorrere a tecniche perturbative. Noi ci limiteremo, comunque in questi due ultimi capitoli, ai sistemi hamiltoniani: ci porremo il problema di studiare, con tecniche perturbative, cosa succede quando si applica il metodo di Hamilton-Jacobi nel caso di un sistema che sia vicino a un sistema integrabile.

Consideriamo sistemi hamiltoniani descritti, in variabili azione-angolo, da hamiltoniane della forma

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon V(\varphi, J), \quad (84.1)$$

con $\mathcal{H}_0(J)$ integrabile ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Chiamiamo ε *parametro perturbativo* e la funzione $\varepsilon V(\varphi, J)$ *perturbazione* dell'hamiltoniana \mathcal{H}_0 . Eventualmente cambiando segno a V possiamo sempre supporre che sia $\varepsilon \geq 0$ e così faremo nel seguito del capitolo.

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre richiesto la minima regolarità possibile, per esempio che l'hamiltoniana fosse di classe C^2 . Al contrario in questo e nel prossimo capitolo richiediamo che l'hamiltoniana sia una funzione analitica dei suoi argomenti. Più precisamente assumiamo che le funzioni \mathcal{H}_0 e V in (84.1) siano analitiche nel dominio

$$D(\rho, \xi, J_0) = \{(\varphi, J) \in \mathbb{C}^{2n} : \Re \varphi_i \in \mathbb{T}, \quad |\Im \varphi_i| \leq \xi, \quad |J - J_0| \leq \rho\}, \quad (84.2)$$

dove ξ e ρ sono costanti positive e $J_0 = (J_{01}, \dots, J_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Il motivo per cui scegliamo di lavorare con variabili complesse è che useremo il teorema di Cauchy per effettuare le stime della quantità di interesse.

In virtù delle ipotesi di analiticità sull'hamiltoniana, si può espandere $V(\varphi, J)$ in serie di Fourier in φ ,

$$V(\varphi, J) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J), \quad (84.3)$$

dove i coefficienti di Fourier

$$V_\nu(J) := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{d\varphi}{(2\pi)^n} e^{-i\langle \nu, \varphi \rangle} V(\varphi, J)$$

decadono esponenzialmente in ν , i.e. si ha (cfr. l'esercizio 1)

$$|V_\nu(J)| \leq \Phi e^{-\xi|\nu|}, \quad \Phi := \max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi, J_0)} |V(\varphi, J)|. \quad (84.4)$$

Esempio 84.1 Consideriamo l'hamiltoniana che, in coordinate cartesiane, è data da

$$\mathcal{H}(q, p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2m_k} (p_k^2 + m_k^2 \omega_k^2 q_k^2) + \frac{1}{4} \alpha \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} (q_k - q_j)^4. \quad (84.5)$$

Tale sistema descrive una collezione di oscillatori armonici che interagiscono tra loro tramite forze proporzionali al cubo delle mutue distanze. Se operiamo il riscaldamento $(q, p) \mapsto (q', p')$, con $q = \delta q'$ e $p = \delta p'$, definiamo $\varepsilon = \delta^2$ e dividiamo per ε , otteniamo un'hamiltoniana della forma (84.1). In termini delle variabili riscaldate (q', p') le variabili azione-angolo sono definite come in (83.3). In particolare si ha

$$q'_k = \sqrt{\frac{2J_k}{m_k \omega_k}} \sin \varphi_k, \quad p'_k = \sqrt{2J_k m_k \omega_k} \cos \varphi_k.$$

Si vede allora facilmente che l'hamiltoniana assume allora la forma (84.1), dove la parte integrabile è

$$\mathcal{H}_0(J) = \sum_{k=1}^n \omega_k J_k = \langle \omega, J \rangle. \quad (84.6)$$

mentre la perturbazione diventa una funzione sia di φ sia di J (cfr. l'esercizio 2).

Esempio 84.2 Il *sistema solare* è, in prima approssimazione (i.e. trascurando tutti gli altri corpi celesti) costituito dal Sole e da $N = 8$ pianeti che si muovono sotto l'influenza della mutua attrazione gravitazionale. Aumentando il valore di N si possono includere nell'analisi anche i satelliti e gli asteroidi. L'hamiltoniana che descrive il sistema è

$$\mathcal{H}(q, p) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2m_i} |\mathbf{p}^{(i)}|^2 - \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^{(j)}|}, \quad (84.7)$$

dove G è la costante di gravitazione universale (cfr. il §32.2) e

- $\mathbf{q}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(0)}$ sono le coordinate e i momenti coniugati del Sole;
- $\mathbf{q}^{(i)}$ e $\mathbf{p}^{(i)}$ sono le coordinate e i momenti coniugati del pianeta i -esimo, con $i = 1, \dots, N$;
- m_0 è la massa del Sole e m_1, \dots, m_N sono le masse dei pianeti.

Per $N = 1$ ritroviamo il problema dei due corpi discusso nel capitolo 7, nel caso particolare in cui l'energia potenziale sia quella gravitazionale. Per estensione, il sistema descritto dall'hamiltoniana (84.7) prende il nome di *problema degli N corpi*. Poiché la massa del Sole è molto più grande della massa dei pianeti, scriviamo $m_0 = M_0$ e $m_i = \varepsilon M_i$ per $i = 1, \dots, N$, dove ε gioca il ruolo di parametro perturbativo. Se riscaldiamo $p \rightarrow \varepsilon p$ e dividiamo l'hamiltoniana (84.7) per ε otteniamo una nuova hamiltoniana, che continuiamo a indicare con \mathcal{H} , della forma

$$\mathcal{H}(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2M_i} |\mathbf{p}^{(i)}|^2 + \frac{\varepsilon}{2M_0} |\mathbf{p}^{(0)}|^2 - \sum_{i=1}^N \frac{GM_i M_0}{|\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^{(0)}|} - \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{GM_i M_j}{|\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^{(j)}|}. \quad (84.8)$$

Introduciamo le *coordinate eliocentriche*

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{q}^{(0)}, \quad \mathbf{Q}^{(i)} = \mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^{(0)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

La matrice jacobiana della trasformazione $q \mapsto Q$ è data da

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (84.9)$$

dove $\mathbf{1}$ e 0 sono la matrice identità e la matrice nulla 3×3 , quindi otteniamo una trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q, P)$ richiedendo che si abbia $P = (I^{-1})^T p$ (cfr. la dimostrazione del teorema 77.22). Poiché si ha (cfr. l'esercizio 3)

$$(I^{-1})^T = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (84.10)$$

risulta $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} + \mathbf{p}^{(1)} + \dots + \mathbf{p}^{(N)}$, mentre $\mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{p}^{(i)}$ per $i = 1, \dots, N$. In termini delle nuove variabili (Q, P) l'hamiltoniana (84.8) diventa

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(Q, P) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_i} + \frac{\varepsilon}{M_0} \right) |\mathbf{P}^{(i)}|^2 + \frac{\varepsilon}{2M_0} |\mathbf{P}^{(0)}|^2 + \frac{\varepsilon}{M_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{P}^{(i)} \cdot \mathbf{P}^{(j)} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{M_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^{(i)} - \sum_{i=1}^N \frac{GM_i M_0}{|\mathbf{Q}^{(i)}|} - \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{GM_i M_j}{|\mathbf{Q}^{(i)} - \mathbf{Q}^{(j)}|}. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che la quantità di moto totale $\mathbf{P}^{(0)}$ è costante. In particolare possiamo fissare $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{0}$ (ci mettiamo quindi nel sistema del centro di massa), così che l'hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ si semplifica in

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(Q, P) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_i} + \frac{\varepsilon}{M_0} \right) |\mathbf{P}^{(i)}|^2 - \frac{GM_i M_0}{|\mathbf{Q}^{(i)}|} \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{M_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{P}^{(i)} \cdot \mathbf{P}^{(j)} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{GM_i M_j}{|\mathbf{Q}^{(i)} - \mathbf{Q}^{(j)}|} \right). \end{aligned} \quad (84.11)$$

Se definiamo

$$\mathcal{H}_0(Q, P) := \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2\mu_i} |\mathbf{P}^{(i)}|^2 - \frac{G_i \mu_i M_0}{|\mathbf{Q}^{(i)}|} \right) \quad (84.12a)$$

$$V(Q, P) := \frac{1}{M_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{P}^{(i)} \cdot \mathbf{P}^{(j)} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{GM_i M_j}{|\mathbf{Q}^{(i)} - \mathbf{Q}^{(j)}|}, \quad (84.12b)$$

dove abbiamo posto

$$\frac{1}{\mu_i} := \frac{1}{M_i} + \frac{\varepsilon}{M_0}, \quad G_i := G \frac{M_i}{\mu_i},$$

si vede subito che $\mathcal{H}_0(Q, P)$ descrive N sistemi disaccoppiati, ciascuno dei quali costituisce un problema a due corpi. Più precisamente l'hamiltoniana libera \mathcal{H}_0 è la somma di N hamiltoniane che descrivono ciascuna un punto materiale di massa μ_i che si muove in un campo centrale coulombiano attrattivo. Poiché il problema a due corpi è integrabile (cfr. il §83.4), ne segue che \mathcal{H}_0 descrive un sistema integrabile. L'hamiltoniana (84.11) è perciò della forma (84.1).

Torniamo al caso generale (84.1). Cerchiamo di risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi scrivendo la funzione caratteristica di Hamilton $W(\varphi, J')$ nella forma

$$W(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle + \varepsilon W_1(\varphi, J'),$$

con l'obiettivo che la trasformazione canonica $(\varphi, J) \mapsto (\varphi', J')$ sia tale che nelle nuove coordinate risulti $\mathcal{H}(\varphi, J) = \mathcal{H}'(J') + O(\varepsilon^2)$ per un'opportuna funzione \mathcal{H}' , i.e. tale che il sistema sia integrabile almeno fino al primo ordine. Si ottiene, trascurando sistematicamente gli ordini in ε superiore al primo,

$$\mathcal{H}_0 \left(J' + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon V(\varphi, J') + O(\varepsilon^2) = \mathcal{H}'(J') := \mathcal{H}'_0(J') + \varepsilon \mathcal{H}'_1(J') + O(\varepsilon^2),$$

che porta a identificare $\mathcal{H}'_0(J') = \mathcal{H}_0(J')$ e a richiedere

$$\left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + V(\varphi, J') = \mathcal{H}'_1(J'), \quad (84.13)$$

dove l'applicazione

$$\omega : J \rightarrow \omega(J) := \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J).$$

prende il nome di *applicazione frequenza*.

Se $F(\varphi, J')$ è una funzione periodica nei suoi n argomenti φ e

$$F(\varphi, J) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i(\nu, \varphi)} F_\nu(J),$$

ne rappresenta l'espansione in serie di Fourier in φ , definiamo la *mediata* $F(\varphi, J)$ come

$$\langle F \rangle = F_0(J) = \langle F(\cdot, J') \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{d\varphi}{(2\pi)^n} F(\varphi, J') \quad (84.14)$$

e poniamo $\tilde{F}(\varphi, J') := F(\varphi, J') - \langle F \rangle$.

Con le notazioni appena introdotte, al primo ordine la (84.13) diventa

$$\mathcal{H}'_1(J') = \langle V \rangle, \quad \left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + \tilde{V}(\varphi, J') = 0. \quad (84.15)$$

La seconda equazione prende il nome di *equazione omologica* o *equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni*.

Osservazione 84.3 Se la (84.15) è soddisfatta allora si ha

$$\begin{cases} \dot{\varphi}' = \omega'(J') + O(\varepsilon^2) = \omega(J') + O(\varepsilon), \\ \dot{J}' = O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

dove $\omega'(J) := (\partial/\partial J)(\mathcal{H}_0(J) + \varepsilon\mathcal{H}'_1(J))$. Quindi per tempi $|t| < 1/\varepsilon$ si ha $|J'(t) - J'(0)| < O(\varepsilon)$. Inoltre si ha $J - J' = O(\varepsilon)$ e quindi $J(t) - J'(t) = O(\varepsilon)$ per ogni t , così che anche

$$|J(t) - J(0)| \leq |J(t) - J'(t)| + |J'(t) - J'(0)| + |J'(0) - J(0)| = O(\varepsilon),$$

per tempi $|t| < 1/\varepsilon$. Ne concludiamo che le variabili d'azione rimangono vicine ai valori iniziali (i.e. sono uguali a meno di correzioni di ordine ε) non solo fino a tempi ordine 1, ma fino a tempi ordine $1/\varepsilon$.

Per $n = 1$ si ha

$$W_1(\varphi, J) = -\frac{1}{\omega(J')} \int_0^\varphi d\varphi \tilde{V}(\varphi, J) + C, \quad (84.16)$$

dove la costante d'integrazione C è scelta richiedendo (arbitrariamente) che si abbia $\langle W_1 \rangle = 0$. Infatti la seconda equazione in (84.15) ha un'unica soluzione a media nulla, come dimostra il seguente risultato.

Teorema 84.4 Per $n = 1$ l'equazione omologica in (84.13) ha soluzione $\mathcal{H}'_1(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (84.16). Inoltre tale soluzione è unica se si richiede che $W_1(\cdot, J')$ abbia media nulla.

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che $\mathcal{H}'_1(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (84.16) costituiscono una soluzione. Poiché $\partial W_1/\partial\varphi$ ha media nulla si deve avere necessariamente $\mathcal{H}'_1(J') = \langle V \rangle$, quindi la scelta di \mathcal{H}'_1 è unica. Supponiamo che esistano due funzioni distinte W_1 e W'_1 soluzioni di

$$\omega(J') \frac{\partial W_1}{\partial\varphi} + \tilde{V}(\varphi, J') = 0. \quad (84.17)$$

Allora si deve avere $\partial/\partial\varphi(W_1(\varphi, J') - W'_1(\varphi, J')) = 0$, quindi la funzione $W_1(\varphi, J') - W'_1(\varphi, J')$ è costante in φ , i.e. $W'_1(\varphi, J') = W_1(\varphi, J') + c(J')$, per qualche funzione $c(J')$ indipendente da φ . Di conseguenza $\langle W'_1(\cdot, J') \rangle = \langle W_1(\cdot, J') \rangle + c(J') = c(J')$, poiché W_1 ha media nulla. Se si richiede che anche W'_1 abbia media nulla, si trova $W'_1(\varphi, J') = W_1(\varphi, J')$. ■

Per $n > 1$ si passa allo spazio di Fourier, sviluppando in serie la funzione $V(\varphi, J)$ secondo la (84.3) e cercando una soluzione

$$W_1(\varphi, J') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1,\nu}(J'), \quad (84.18)$$

con $W_{1,0} = \langle W_1 \rangle = 0$. Si trova per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$

$$W_{1,\nu}(J') = -\frac{V_\nu(J')}{i \langle \omega(J'), \nu \rangle}, \quad (84.19)$$

che è ben definito purché si abbia $\langle \omega(J'), \nu \rangle \neq 0$. Si noti che se $\mathcal{H}_0 = \langle \omega, J \rangle$ come in (84.6), allora $\omega(J) = \omega$ per ogni J .

Definizione 84.5 (CONDIZIONE DI NON RISONANZA) *Un vettore $\omega \in \mathbb{R}^n$ si dice non risonante se $\langle \omega, \nu \rangle \neq 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, i.e. se le componenti di ω sono razionalmente indipendenti.*

La condizione che il vettore $\omega(J')$ sia *non risonante* è sufficiente perché i coefficienti di Fourier $W_{1,\nu}(J')$ della funzione $W_1(\varphi, J')$ siano ben definiti. Non è però sufficiente perché la funzione $W_1(\varphi, J')$ sia essa stessa ben definita. Perché questo accada occorre anche che la serie di Fourier sia sommabile. Questo si può ottenere richiedendo una condizione di non risonanza più forte sul vettore $\omega(J')$.

Definizione 84.6 (CONDIZIONE DIOFANTEA) *Si definiscono vettori diofantei i vettori che verificano la condizione*

$$|\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \quad (84.20)$$

con $\gamma > 0$ e $\tau > 0$. La costante τ è chiamata esponente diofanteo; la condizione (84.20) è detta condizione diofantea.

Teorema 84.7 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Se $\tau > n - 1$ l'insieme*

$$\Omega_*(\gamma) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \neq 0 \right\}$$

ha misura di Lebesgue $\text{meas}(\Omega_*(\gamma)) = \text{meas}(\Omega) - O(\gamma)$. Fissato $\tau > n - 1$, l'insieme dei vettori di Ω che soddisfino la (84.20) per qualche $\gamma > 0$ ha misura di Lebesgue relativa piena in Ω .

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che Ω sia la sfera di raggio R e centro nell'origine; il caso generale si discute in modo analogo. Definiamo, per $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$,

$$\bar{\Omega}(\gamma, \nu) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| \leq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \right\}.$$

Si ha

$$\Omega_*^c(\gamma) \subset \bigcup_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} \bar{\Omega}(\gamma, \nu),$$

dove $\Omega_*^c(\gamma) := \Omega \setminus \Omega_*(\gamma)$ indica l'insieme complementare in Ω di $\Omega_*(\gamma)$. Per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, tenendo conto che $\langle \omega, \nu \rangle / |\nu|$ è la proiezione del vettore ω lungo la direzione individuata dal vettore ν , si trova

$$\text{meas}(\Omega_*^c(\gamma)) \leq \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} \text{meas}(\bar{\Omega}(\gamma, \nu)) \leq CR^{n-1} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} \frac{\gamma}{|\nu|^{\tau+1}}, \quad (84.21)$$

per un'opportuna costante C che dipende da n ma non da R . Per stimare la somma in (84.21), si può ragionare come segue. Se $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, definiamo la *norma 1* di ν come $|\nu|_1 := |\nu_1| + \dots + |\nu_n|$; si ha $|\nu| \leq |\nu|_1 \leq \sqrt{n}|\nu|$ (cfr. l'esercizio 4), così che

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} \frac{\gamma}{|\nu|^{\tau+1}} \leq \gamma \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} \frac{(\sqrt{n})^{\tau+1}}{|\nu|_1^{\tau+1}} \leq \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu|_1=m}} \frac{(\sqrt{n})^{\tau+1}}{m^{\tau+1}},$$

dove (cfr. l'esercizio 5)

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu|_1=m}} 1 \leq 3^n m^{n-1}. \quad (84.22)$$

Si ha quindi

$$\text{meas}(\Omega_*^c(\gamma)) \leq C'R^{n-1}\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{n-1}}{m^{\tau+1}} \leq C'R^{n-1}\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\tau-n+2}},$$

e, se $\tau > n - 1$, si trova

$$\frac{\text{meas}(\Omega_*^c(\gamma))}{\text{meas}(\Omega)} \leq C''R^{-1}\gamma,$$

per opportune costanti C' e C'' indipendenti da R . Da qui segue l'asserto. \blacksquare

Osservazione 84.8 Si può dimostrare che esistono vettori che soddisfano la condizione (84.20) con $\tau = n - 1$, però essi hanno misura nulla (cfr. l'esercizio 41 per $n = 2$). Ne è un esempio il vettore $(1, \gamma_0)$ in \mathbb{R}^2 , dove $\gamma_0 := (1 + \sqrt{5})/2$ prende il nome di *sezione aurea* (cfr. l'esercizio 77). Al contrario nessun vettore in \mathbb{R}^n può verificare la condizione diofantea (84.20) con $\tau < n - 1$ (cfr. l'esercizio 42 per $n = 2$).

Definizione 84.9 (HAMILTONIANA NON DEGENEREA) *L'hamiltoniana $\mathcal{H}_0(J)$ in (84.1) si dice non degenera se*

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J^2} \right) \neq 0. \quad (84.23)$$

La (84.23) è chiamata condizione di non degenerazione.

Osservazione 84.10 La condizione di non degenerazione (84.23) è anche chiamata *condizione di anisocronia* o *condizione di non degenerazione di Kolomogorov*.

Osservazione 84.11 Se la condizione (84.23) è soddisfatta, l'applicazione $\omega(J)$ è invertibile e quindi $J \mapsto \omega(J)$ definisce un diffeomorfismo locale (cfr. la definizione a pag. 317).

Un sistema hamiltoniano con hamiltoniana $\mathcal{H}_0(J)$ si dice *non degenero* o *anisocrono* se $\mathcal{H}_0(J)$ è non degenero. Diremo che il sistema è *degenero* se il determinante in (84.23) è nullo. Diremo invece che il sistema è *isocrono* se $\omega(J)$ non dipende da J . Un sistema hamiltoniano isocrono è costituito quindi da una collezione di oscillatori armonici (cfr. il §83).

Osservazione 84.12 In base alle definizioni date, un sistema isocrono è un caso particolare di sistema degenero: se $\omega(J) = \omega$ è costante, il determinante in (84.23) è nullo, d'altra parte il determinante può annullarsi senza che $\omega(J)$ sia identicamente costante (cfr. gli esercizi 44÷46).

Definizione 84.13 (SERIE DI FOURIER GENERICA) *Data una funzione $V(\varphi, J)$, periodica in φ , sia la (84.3) la sua serie di Fourier. Si dice che la funzione $V(\varphi, J)$ ha una serie di Fourier generica in \mathcal{A} se $\forall J' \in \mathcal{A}$ e $\forall \nu \in \mathbb{Z}^n$ esiste un vettore ν' parallelo a ν tale che $V_{\nu'}(J') \neq 0$.*

Osservazione 84.14 Che la serie di Fourier di una funzione periodica sia generica è una condizione di genericità (cfr. l'osservazione 33.14): questo giustifica la definizione 84.13.

Perché la funzione (84.18) sia ben definita in un intorno di J_0 occorre che il vettore $\omega(J')$ soddisfi una condizione che assicuri la sommabilità della sua serie di Fourier per ogni J' in tale intorno. Per esempio, se $|\langle \omega(J'), \nu \rangle| > \gamma |\nu|^{-\tau} \forall \nu \neq 0$, la serie di Fourier (84.18) converge (cfr. l'esercizio 47). Un caso in cui questo accade è il caso dei sistemi isocroni, i.e. $\omega(J') = \omega$ per ogni J' , con ω diofanteo, che sarà discusso più diffusamente nel prossimo paragrafo. Il caso di sistemi anisocroni è più delicato, come mostra il seguente risultato.

Teorema 84.15 (PRIMO TEOREMA DI TRIVIALITÀ DI POINCARÉ) *Se $V(\varphi, J)$ ha una serie di Fourier generica in \mathcal{A} e $\mathcal{H}_0(J)$ è non degenero, allora non esiste una soluzione $W_1(\varphi, J')$ analitica in $J \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione. La (84.13) può essere soddisfatta solo se $V_\nu(J') = 0$ per ogni ν e ogni J' tale che $\langle \omega(J'), \nu \rangle = 0$. Questo non è possibile se $V(\varphi, J)$ ha una serie di Fourier generica. ■

Di conseguenza, nel caso anisocrono in generale non è possibile risolvere l'equazione omologica (84.15) in un aperto di J_0 . Tuttavia, procedendo in modo più attento, si riesce ugualmente a definire un cambiamento di variabili che sposta la perturbazione a un ordine più alto. Decomponiamo la perturbazione in un polinomio trigonometrico più una correzione:

$$V(\varphi, J) = V^{\leq N}(\varphi, J) + V^{> N}(\varphi, J),$$

$$V^{\leq N}(\varphi, J) := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| \leq N}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J), \quad V^{> N}(\varphi, J) := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J),$$

con N da fissare in modo tale che si abbia

$$\max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi/2, J_0)} |\varepsilon V^{>N}(\varphi, J)| \leq C\varepsilon^2, \quad (84.24)$$

per qualche costante positiva C . Questo è possibile purché si scelga $N = N_0(\varepsilon)$, dove

$$N_0(\varepsilon) = \frac{4}{\xi} \log \frac{1}{C_1 \varepsilon}, \quad (84.25)$$

dove ξ è la semiampiezza della striscia di analiticità in φ della funzione $V(\varphi, J)$, in accordo con la definizione (84.2), e C_1 è un'opportuna costante dipendente da ξ (cfr. l'esercizio 48).

Tenendo conto che se $J' = J + O(\varepsilon) = J(0) + O(\varepsilon)$, con $J(0) = J_0$ tale che $\omega(J_0)$ sia diofanteo, si ha per $|\nu| \leq N_0(\varepsilon)$

$$|\langle \omega(J'), \nu \rangle| \geq |\langle \omega(J(0)), \nu \rangle| - |\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} - |\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle|,$$

dove

$$|\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle| \leq B |J' - J(0)| |\nu| \leq \frac{\gamma}{2|\nu|^\tau}, \quad B := \max_{|J - J_0| \leq \rho} \left\| \frac{\partial \omega}{\partial J}(J) \right\|, \quad (84.26)$$

non appena si abbia

$$|J' - J(0)| \leq \frac{\gamma}{2B(N_0(\varepsilon))^{\tau+1}} \leq \frac{\gamma}{2B|\nu|^{\tau+1}},$$

ovvero

$$|J' - J(0)| \leq \rho_0(\varepsilon) := C_2 \left(\frac{1}{\log 1/C_1 \varepsilon} \right)^{\tau+1}, \quad (84.27)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti opportune; in particolare C_1 è come in (84.25). La (84.27) è soddisfatta se $J' - J_0 = O(\varepsilon)$, per ε è sufficientemente piccolo. Ne concludiamo che se $\omega(J_0)$ è diofanteo, allora per ogni J' in un intorno di raggio $\rho_0(\varepsilon)$ di J_0 i coefficienti $W_{1,\nu}(J')$ in (84.19) sono ben definiti per ogni $|\nu| \leq N$ e ben definita è anche la funzione caratteristica

$$W(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle + \varepsilon W_1(\varphi, J'), \quad W_1(\varphi, J') = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| \leq N}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1,\nu}(J'). \quad (84.28)$$

Ovviamente la funzione $W_1(\varphi, J')$ in (84.28) è un polinomio trigonometrico, quindi, perché sia ben definita, è sufficiente che i suoi coefficienti di Fourier (84.19) siano definiti, senza che sia necessario richiedere che decadano esponenzialmente. Tuttavia, per imporre che si abbia $\langle \omega(J'), \nu \rangle \neq 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tale che $|\nu| \leq N_0(\varepsilon)$, dobbiamo richiedere qualche condizione come la (84.26), ovvero che $\langle \omega(J'), \nu \rangle \neq 0$ sia stimato essenzialmente allo stesso modo di $\langle \omega(J_0), \nu \rangle \neq 0$ (a meno di un fattore 2). Inoltre, se da una parte la funzione $W_1(\varphi, J')$, proprio

perché è un polinomio trigonometrico, è analitica per ogni $\varphi \in \mathbb{C}^n$, dall'altra, per poterla stimare in modo che valga la (84.24) e le variabili (φ', J') differiscano per termini $O(\varepsilon)$ da (φ, J) , occorre definirla in un dominio più piccolo, quale è $D(\rho_0(\varepsilon), \xi/2, J_0)$.

Si noti che, per poter effettuare un primo passo di teoria delle perturbazioni, nel caso di sistemi anisocroni, abbiamo dovuto ridurre di un po' il dominio delle variabili angolari (la striscia di analiticità negli angoli è ancora di ordine 1) e di molto il dominio delle azioni (il raggio dell'intorni di centro J_0 non è più di ordine 1, ma è logaritmicamente piccolo in ε). In ogni caso, grazie agli accorgimenti seguiti, in questo modo abbiamo trovato che il sistema è integrabile al primo ordine in ε . Tuttavia, è chiaro che, nel momento in cui si cerchi di iterare il procedimento, la riduzione del dominio è qualcosa che va tenuto sotto controllo. Torneremo su questo problema più volte nel seguito; vedremo come risolverlo nel prossimo capitolo quando discuteremo il teorema KAM (cfr. il §89).

§85 Teoria delle perturbazioni a tutti gli ordini

Consideriamo l'espressione formale

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (85.1)$$

Diremo che $F(\varepsilon)$ è una *serie formale* in ε se i coefficienti F_k sono ben definiti per ogni $k \geq 0$. Una serie formale si può identificare con la successione dei suoi coefficienti. Diremo che una funzione $F(x, \varepsilon)$, con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ammette una serie formale in D se $F(\varepsilon) = F(x, \varepsilon)$ si può scrivere nella forma (85.1), con le funzioni $F_k = F_k(x)$ ben definite in D .

85.1 Perturbazioni di sistemi isocroni

Consideriamo un sistema isocrono perturbato. L'hamiltoniana corrispondente è data dalla (84.1), dove $\mathcal{H}_0(J) = \langle \omega, J \rangle$, mentre la perturbazione $V(\varphi, J)$ dipende anche dalle variabili angolari. Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi della forma

$$W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \quad (85.2a)$$

$$\mathcal{H}'(\varphi', J') = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') + O(\varepsilon^{k_0+1}), \quad (85.2b)$$

con $W_0(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle$ e $\mathcal{H}'_0(J') = \mathcal{H}_0(J') = \langle \omega, J' \rangle$, per qualche $k_0 \in \mathbb{N}$.

A ogni ordine $k \leq k_0$, si ha (cfr. l'esercizio 49)

$$\left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = \mathcal{H}'_k(J'), \quad (85.3)$$