perché è un polinomio trigonometrico, è analitica per ogni $\varphi \in \mathbb{C}^n$, dall'altra, per poterla stimare in modo che valga la (84.24) e le variabili (φ', J') differiscano per termini $O(\varepsilon)$ da (φ, J), occorre definirla in un dominio più piccolo, quale è $D(\rho_0(\varepsilon), \xi/2, J_0)$.

Si noti che, per poter effettuare un primo passo di teoria delle perturbazioni, nel caso di sistemi anisocroni, abbiamo dovuto ridurre di un po' il dominio delle variabili angolari (la striscia di analiticità negli angoli è ancora di ordine 1) e di molto il dominio delle azioni (il raggio dell'intorni di centro J_0 non è più di ordine 1, ma è logaritmicamente piccolo in ε). In ogni caso, grazie agli accorgimenti seguiti, in questo modo abbiamo trovato che il sistema è integrabile al primo ordine in ε. Tuttavia, è chiaro che, nel momento in cui si cerchi di iterare il procedimento, la riduzione del dominio è qualcosa che va tenuto sotto controllo. Torneremo su questo problema più volte nel seguito; vedremo come risolverlo nel prossimo capitolo quando discuteremo il teorema KAM (cfr. il §89).

§85 Teoria delle perturbazioni a tutti gli ordini

Consideriamo l'espressione formale

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{85.1}$$

Diremo che $F(\varepsilon)$ è una *serie formale* in ε se i coefficienti F_k sono ben definiti per ogni $k \geq 0$. Una serie formale si può identificare con la successione dei suoi coefficienti. Diremo che una funzione $F(x, \varepsilon)$, con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ammette una serie formale in D se $F(\varepsilon) = F(x, \varepsilon)$ si può scrivere nella forma (85.1), con le funzioni $F_k = F_k(x)$ ben definite in D.

85.1 Perturbazioni di sistemi isocroni

Consideriamo un sistema isocrono perturbato. L'hamiltoniana corrispondente è data dalla (84.1), dove $\mathcal{H}_0(J) = \langle \omega, J \rangle$, mentre la perturbazione $V(\varphi, J)$ dipende anche dalle variabili angolari. Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi della forma

$$W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \tag{85.2a}$$

$$\mathcal{H}'(\varphi', J') = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') + O(\varepsilon^{k_0+1}), \tag{85.2b}$$

con $W_0(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle$ e $\mathcal{H}'_0(J') = \mathcal{H}_0(J') = \langle \omega, J' \rangle$, per qualche $k_0 \in \mathbb{N}$.

A ogni ordine $k \leq k_0$, si ha (cfr. l'esercizio 49)

$$\left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = \mathcal{H}'_k(J'), \tag{85.3}$$

con $N_1(\varphi, J') = V(\varphi, J')$ e, per $k > 1$,

$$N_k(\varphi, J') = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \geq 0 \\ 1 \leq |a| \leq k-1}} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum\nolimits_{k-1}' \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \tag{85.4}$$

dove si sono usate le seguenti notazioni:

- $a = (a_1, \ldots, a_n)$, con $a_i \geq 0$ intero per ogni $i = 1, \ldots, n$;
- $|a| := a_1 + \ldots + a_n$;
- $a! := a_1! \ldots a_n!$;
- $\partial^{|a|}/\partial J^a = \partial^{|a|}/\partial J_1^{a_1} \ldots \partial J_n^{a_n}$;
- il prodotto $\prod_{j=1}^{a_i} [\partial W_{k_{ij}}/\partial \varphi_i](\varphi, J')$ va interpretato come 1 se $a_i = 0$;
- la somma $\sum_{k-1}'$ indica che si somma su tutti gli indici k_{ij}, con $i = 1, \ldots, n$, tali che
    1. $k_{ij} = 0 \; \forall j$ se $a_i = 0$ e $k_{ij} \geq 1$ se $a_i \geq 1$e $j = 1, \ldots, n$,
    2. $k_{11} + \ldots + k_{1a_1} + \ldots + k_{n1} + \ldots + k_{na_n} = k - 1$.

Si noti che a ogni ordine k la funzione N_k dipende dalle funzioni $W_1, \ldots, W_{k-1}$, quindi è una funzione nota se le $W_{k'}$, $k' < k$, sono state risolte ai passi precedenti (cfr. l'esercizio 50 per le espressioni esplicite delle funzioni N_k agli ordini più bassi). In altre parole la (85.3) si può risolvere iterativamente, ponendo

$$\mathcal{H}_k'(J') = \langle N_k \rangle, \qquad \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + \widetilde{N}_k(\varphi, J') = 0,$$

dove $\widetilde{N}_k = N_k - \langle N_k \rangle$, per $k = 1, \ldots, n$ (cfr. la (84.14) per la notazione $\langle \cdot \rangle$).

Introduciamo i domini

$$D_k := D(\rho(1 - k\delta), \xi - k\delta, J_0) \tag{85.5a}$$
$$\bar{D}_k := D(\rho(1 - k\delta + \delta/2), \xi - k\delta + \delta/2, J_0), \tag{85.5b}$$

con $D(\rho, \xi, J_0)$ definito in (84.2), e le norme

$$\|f\|_k := \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho(1 - k\delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \right), \tag{85.6}$$

per δ e k tali che $1 - k\delta \geq c$ e $\xi - k\delta \geq c\xi$, con $c > 0$; per esempio si può fissare $c = 1/2$.

È facile verificare che

$$\left| \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J) \right| \leq \|V\|_0 \mathrm{e}^{-\xi|\nu|}, \qquad |\nu V_\nu(J)| \leq \rho \|V\|_0 \mathrm{e}^{-\xi|\nu|}, \tag{85.7}$$

così che

$$\left|W_{1,\nu}(J')\right| \le \gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}\left|\nu V_\nu(J')\right| \le \rho\gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}\|V\|_0 \mathrm{e}^{-\xi|\nu|}$$

e quindi (cfr. l'esercizio 51)

$$\max_{(\varphi,J)\in\bar{D}_1} |W_1(\varphi,J)| \le \sum_{\nu\neq 0}\gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}|\nu V_\nu(J)|\,\mathrm{e}^{(\xi-\delta/2)|\nu|} \le B_1\rho\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-n-\tau+1}, \tag{85.8}$$

per un'opportuna costante B_1. Analogamente si trova (cfr. l'esercizio 52)

$$\max_{(\varphi,J)\in D_1}\left|\frac{\partial W_1}{\partial\varphi}(\varphi,J)\right| \le B_0\gamma^{-1}\rho\|V\|_0\,\delta^{-n-\tau}, \tag{85.9a}$$

$$\max_{(\varphi,J)\in D_1}\left|\frac{\partial W_1}{\partial J}(\varphi,J)\right| \le B_0\gamma^{-1}\|V\|_0\,\delta^{-n-\tau}, \tag{85.9b}$$

dove B_0 è un'altra costante, così che $\|W_1\|_1 \le 4B_0\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-n-\tau}$. Si ha infine, per qualche costante B_2 (cfr. l'esercizio 53),

$$\max_{(\varphi,J)\in D_1}\left\|\frac{\partial^2 W_1}{\partial\varphi\,\partial J}(\varphi,J)\right\| \le B_2\gamma^{-1}\delta^{-n-\tau-1}\|V\|_0, \tag{85.10}$$

dove al solito $\|\cdot\|$ (senza pedici) indica la norma uniforme. Al primo ordine la trasformazione $(\varphi',J')\mapsto(\varphi,J)$ è definita da

$$\varphi' = \varphi + \Delta(\varphi,J), \qquad J' = J + \Xi(\varphi,J), \tag{85.11}$$

dove possiamo scrivere

$$\Delta(\varphi,J) = \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial J'}(\varphi,J'), \qquad \Xi(\varphi,J) = -\varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial\varphi}(\varphi,J'). \tag{85.12}$$

Le equazioni (85.12) si risolvono tramite il teorema della funzione implicita. Infatti la condizione (85.10) permette di fissare J' in termini di (φ,J) in accordo con (85.11), che definisce la funzione $\Xi(\varphi,J)$, tale che $\|\Xi\|_1 \le |\varepsilon|\,B_2\rho\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-n-\tau-1}$ (cfr. l'esercizio 54). Si scrive allora $J' = J + \Xi(\varphi,J)$ nella seconda equazione in (85.12) e questo permette di fissare anche φ' in termini di (φ,J), definendo così la funzione $\Delta(\varphi,J)$, tale che $\|\Delta\|_1 \le |\varepsilon|\,B_2\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-n-\tau-1}$.

Lemma 85.1 *Siano $\delta>0$ e $k_0\in\mathbb{N}$ tali che $(k_0+1)\delta\le 1/2$. A ogni ordine $k\le k_0$ si trova*

$$\max_{(\varphi,J)\in D_k}\left|\frac{\partial W_k}{\partial\varphi}(\varphi,J)\right| \le AB^k k!\delta^{-\beta k}, \qquad \beta=\tau+n+1, \tag{85.13}$$

per opportune costanti A e B. Si ha in particolare

$$A = \frac{\rho\delta}{4}, \qquad B = b_0 2^n\gamma^{-1}\|V\|_0, \tag{85.14}$$

dove b_0 è un'opportuna costante.

Dimostrazione. Per $k = 1$, definendo A come in (85.14), la (85.9a) implica immediatamente la (85.13) purché $B \geq 4B_0\gamma^{-1}\|V\|_0$. Assumendo le (85.13) per $k' \leq k$, si trova allora per $(\varphi, J') \in D_k$ (cfr. la (85.4))

$$\begin{aligned}
\left|N_{k+1}(\varphi, J')\right| &\leq \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\geq 0\\ 1\leq|a|\leq k}} \|V\|_0 \frac{1}{(\rho\delta)^{|a|-1}} {\sum_k}' \prod_{i=1}^{n} A^{a_i} \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! B^{k_{ij}} \delta^{-\beta k_{ij}} \\
&\leq \|V\|_0 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\geq 0\\ a_1+\ldots+a_n=p}} \frac{A^p}{(\rho\delta)^{p-1}} B^k \delta^{-\beta k} {\sum_k}' \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! \\
&\leq \|V\|_0 \rho\delta (k+1)! B^k \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{A}{\rho\delta}\right)^p 2^{n+p} \\
&\leq \|V\|_0 \rho\delta (k+1)! B^k 2^n \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{2A}{\rho\delta}\right)^p,
\end{aligned} \tag{85.15}$$

dove si è usato il fatto che (cfr. l'esercizio 55)

$${\sum_k}' \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! \leq k! \leq (k+1)!, \tag{85.16}$$

il fatto che (cfr. l'esercizio 56)

$$\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n\geq 0\\ a_1+\ldots+a_n=p}} 1 = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_m\geq 1\\ a_1+\ldots+a_m=p}} 1 = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m}\binom{p}{m} \leq 2^{n+p}, \tag{85.17}$$

e infine il teorema di Cauchy per stimare (cfr. l'esercizio 51)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a!} \max_{(\varphi,J)\in D_k} \left|\frac{\partial^{|a|}V}{\partial J^a}(\varphi, J)\right| &\leq \max_{(\varphi,J)\in D_0} \left|\frac{\partial V}{\partial J}(\varphi, J)\right| \frac{1}{(\rho - \rho(1-\delta))^{|a|-1}} \\
&\leq \|V\|_0 (\rho\delta)^{-(|a|-1)}.
\end{aligned} \tag{85.18}$$

Scegliendo A come in (85.14), si trova

$$\max_{(\varphi,J)\in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)| \leq 4\|V\|_0 (k+1)! B^k 2^n A \delta^{-\beta k}. \tag{85.19}$$

D'altra parte si ha (cfr. l'esercizio 57)

$$\max_{(\varphi,J)\in D_{k+1}} \left|\frac{\partial W_{k+1}}{\partial\varphi}(\varphi, J)\right| \leq B_1 \gamma^{-1} \delta^{-n-\tau-1} \max_{(\varphi,J)\in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)|, \tag{85.20}$$

che, combinata con la (85.19), dà

$$\max_{(\varphi,J)\in D_{k+1}} \left| \frac{\partial W_{k+1}}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \le A\left(4B_1 \|V\|_0 \gamma^{-1} 2^n\right) B^k \delta^{-\beta(k+1)} (k+1)!.$$

Quindi la stima (85.13) segue immediatamente prendendo

$$B = \max\{4B_1\gamma^{-1}2^n\|V\|_0, 4B_0\gamma^{-1}\|V\|_0\}.$$

Ovviamente le stime sopra hanno senso fin tanto che, per esempio, $\xi - k\delta \ge \xi/2$ e $\rho(1-k\delta) \ge \rho/2$ per ogni $k \le k_0 + 1$. ∎

Teorema 85.2 (Teorema di Nechorošev per sistemi isocroni) *Consideriamo il sistema descritto dall'hamiltoniana* $\mathcal{H}(\varphi, J) = \langle\omega, J\rangle + \varepsilon V(\varphi, J)$, *con* ω *che soddisfi la condizione diofantea* (84.20). *Si ha*

$$|J(t) - J(0)| \le \bar{A}\varepsilon^a \qquad \forall |t| < \mathrm{e}^{\bar{B}/\varepsilon^b},$$

per opportune costanti $a, b, \bar{A}, \bar{B}$. *Si può scegliere* $a = 1/2$ *e* $b = 1/2(\tau + n + 2)$.

Dimostrazione. Fissiamo

$$k_0 = N(\varepsilon), \qquad \delta = \frac{1}{2N(\varepsilon)} \min\{\xi, 1\},$$

con $N(\varepsilon)$ da determinare successivamente, e applichiamo il Lemma 85.1.

Dalla (85.19), con k invece di $k+1$, si ha

$$|\langle N_k\rangle| \le 2^n \delta\rho \|V\|_0 k! B^{k-1} \delta^{-\beta(k-1)}$$

e quindi, in (85.2b), se $\varepsilon\, N(\varepsilon)\, \delta^{-\beta}\varepsilon$ è sufficientemente piccolo (cfr. l'esercizio 60),

$$\mathcal{H}'(\varphi', J') = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') + O\big((N(\varepsilon)\, B\delta^{-\beta}\varepsilon)^{N(\varepsilon)}\big), \tag{85.21}$$

Questo vuol dire che le variabili J' restano costanti, a meno di correzioni $O(\varepsilon)$, fino a un tempo di ordine $\varepsilon(\varepsilon(N(\varepsilon))^{\beta+1})^{-N(\varepsilon)}$, i.e.

$$J'(t) - J'(0) = O(\varepsilon) \qquad \text{per} \qquad |t| < \varepsilon\, (\varepsilon(N(\varepsilon))^{\beta+1})^{-N(\varepsilon)}.$$

Inoltre si ha

$$J = J' + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varepsilon W_1(\varphi, J') + \ldots + \varepsilon^{N(\varepsilon)} W_{N(\varepsilon)}(\varphi, J')\right),$$

quindi, usando che $k! \le k^k \le (N(\varepsilon))^k$ per $k \le N(\varepsilon)$ (cfr. l'esercizio 58),

$$\left|J - J'\right| \le A \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(B\delta^{-\beta}\varepsilon\right)^k k! \le \frac{\rho\delta}{4} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(b_0 2^n \gamma^{-1} \|V\|_0 \varepsilon (N(\varepsilon))^{\beta+1}\right)^k \le b_1 \delta\gamma^{-1}\varepsilon(N(\varepsilon))^{\beta+1},$$

per opportune costanti b_0 e b_1, purché si scelga $N(\varepsilon)$ tale che

$$b_0 2^n \gamma^{-1} \|V\|_0 \varepsilon (N(\varepsilon))^{\beta+1} \le \frac{1}{2}.$$

Si può per esempio fissare $N(\varepsilon)$ tale che

$$\varepsilon(N(\varepsilon))^{\beta+1} = \sqrt{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2(\beta+1)},$$

così che $J - J' = O(\sqrt{\varepsilon})$. In conclusione si ha $J(t) - J(0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ per tempi t tali che

$$|t| \le C_2\, \varepsilon \left(\varepsilon(N(\varepsilon))^{\beta+1}\right)^{-N(\varepsilon)} \le C_2 \mathrm{e}^{B\varepsilon^{-1/2(\beta+1)}}.$$

Da qui segue l'asserto, con $a = 1/2$ e $b = 1/2(\beta+1)$, per opportune costanti $\bar{A}$ e $\bar{B}$. ■

Osservazione 85.3 Il teorema 85.2 costituisce una versione del teorema di Nechoroševnel caso di perturbazioni di sistemi isocroni. Un risultato dello stesso tipo in realtà vale in casi molto più generali, come vedremo nel prossimo capitolo.

Osservazione 85.4 Nel caso di perturbazioni di oscillatori armonici, la teoria delle perturbazioni si può spingere a ogni ordine k_0, pur di scegliere δ sufficientemente piccolo (cfr. il lemma 85.1). Inoltre, invece di ridurre i domini di una quantità costante δ come in (85.5), possiamo scegliere a ogni passo k un valore δ_k sempre più piccolo, così che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \le \frac{1}{2} \min\{1, \xi\}.$$

Per esempio si può scegliere $\delta_k = \delta_0/k^2$, con δ_0 opportuno. Inevitabilmente questo porta a una modifica delle stime rispetto al lemma 85.1 (cfr. l'esercizio 61).

Osservazione 85.5 Notando che la (85.3) fornisce una definizione ricorsiva delle funzioni W_k, in (85.4) possiamo iterare la costruzione in modo tale che alla fine ogni funzione W_k sia espressa in termini di V (cfr. l'esercizio 62). Questo consente di definire tutte le funzioni W_k in uno stesso dominio $D(\rho/2, \xi/2, J_0)$, senza doverne ridurre i domini a ogni passo. Lo svantaggio è che, non potendo più dimostrare le stime per induzione, diventa più laborioso stimare le funzioni W_k. Un modo possibile di procedere è attraverso una rappresentazione grafica delle funzioni, secondo le linee che saranno indicate nel §88.

Osservazione 85.6 In conclusione, tenendo conto anche dell'osservazione 85.4, si può definire, formalmente,

$$W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \qquad \mathcal{H}'(J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J'). \tag{85.22}$$

Le serie (85.22) prendono il nome di *serie di Birkhoff*. Quindi le serie di Birkhoff sono ben definite a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni. Tuttavia in generale le serie di Birkhoff divergono (come mostra l'esempio discusso negli esercizi 63÷66).

85.2 Perturbazioni di sistemi anisocroni

Consideriamo ora il caso di sistemi anisocroni, richiedendo che la condizione (84.23) sia soddisfatta. Sotto l'ipotesi che l'equazione omologica ammetta soluzione a ogni ordine, si può ancora scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi all'ordine k in forma analoga alla (85.3), con la differenza che ora $\omega(J)$ non è costante, quindi N_k riceve contributi anche dal termine $\mathcal{H}_0(J)$ dell'hamiltoniana. Si ha quindi

$$\left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = \mathcal{H}'_k(J'),$$

dove di nuovo $N_1(\varphi, J') = V(\varphi, J')$ e, per $k > 1$,

$$\begin{aligned} N_k(\varphi, J') \; &= \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \geq 0 \\ 2 \leq |a| \leq k}} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} \mathcal{H}_0(\varphi, J') \sideset{}{'}\sum_k \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \\ &+ \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \geq 0 \\ 1 \leq |a| \leq k-1}} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sideset{}{'}\sum_{k-1} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \end{aligned} \tag{85.23}$$

con lo stesso significato dei simboli della (85.4). Si noti che anche nei termini della prima riga della (85.23) c'è dipendenza solo da $W_{k'}$ con $k' < k$ a causa del vincolo $|a| \geq 2$.

La principale difficoltà ora è che, come già anticipato al §84, per risolvere l'equazione omologica si deve controllare $\langle \omega(J'), \nu \rangle$ per $\nu \in \mathbb{Z}^n \neq \{0\}$ e J' in un insieme aperto.

Il seguente risultato è noto come *secondo teorema di trivialità di Poincaré* o *teorema di non esistenza di Poincaré.*

Teorema 85.7 (SECONDO TEOREMA DI TRIVIALITÀ DI POINCARÉ) *In generale il sistema dinamico descritto dall'hamiltoniana* (84.1)*, con $\mathcal{H}_0$ non degenere, non ammette altre costanti del moto che dipendano analiticamente da ε oltre all'energia.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una costante del moto $F(\varphi, J, \varepsilon)$ analitica in ε:

$$F(\varphi, J, \varepsilon) = F_0(\varphi, J) + \varepsilon F_1(\varphi, J) + \varepsilon^2 F_2(\varphi, J) + \dots$$

La condizione $\{F, \mathcal{H}\} = 0$ implica, all'ordine zero in ε,

$$0 = \{F_0, \mathcal{H}_0\} = \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle,$$

quindi $\langle \omega(J), \nu \rangle F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$. Poiché $\det \partial\omega/\partial J \neq 0$ allora $\langle \omega(J), \nu \rangle \neq 0$ su un insieme di misura piena. Ne segue che $F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$ e quindi $F_0(\varphi, J) = F_0(J)$ è indipendente da φ.

Al primo ordine la condizione $\{F, J\} = 0$ dà

$$0 = \left\langle \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial J}, \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right\rangle,$$

che, espressa nello spazio di Fourier, diventa

$$0 = \langle \nu, \omega(J) \rangle F_{1,\nu}(J) - \left\langle \nu, \frac{\partial F_0}{\partial J}(J) \right\rangle V_\nu(J).$$

Sono possibili due casi: $V_\nu(J) = \langle \omega(J), \nu \rangle \tilde{V}_\nu(J)$ per qualche $\tilde{V}_\nu(J)$, che però corrisponde a una condizione non generica, oppure $\langle \omega(J), \nu \rangle = 0$ deve implicare $\langle \nu, \partial F_0(J)/\partial J \rangle = 0$. Di conseguenza, genericamente, i vettori $\omega(J)$ e $\partial F_0(J)/\partial J$ devono essere paralleli (cfr. l'esercizio 67), ovvero

$$\frac{\partial F_0}{\partial J}(J)\rangle = \lambda(J)\, \omega(J),$$

per qualche funzione $\lambda(J)$, così che deve esistere qualche funzione Λ tale che $\lambda(J) = \Lambda'(\mathcal{H}_0(J))$ e $F_0(J) = \Lambda(\mathcal{H}_0(J))$. Si ottiene allora

$$\langle \omega(J), \nu \rangle \Big(\lambda(J) V_\nu(J) - F_{1,\nu}(J) \Big) = 0,$$

che implica $F_1(\varphi, J) = \lambda(J)\, V(\varphi, J) + C_1(J)$, per qualche funzione C_1 che dipende solo da J. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
F(\varphi, J) &= \Lambda(\mathcal{H}_0(J)) + \Lambda'(\mathcal{H}_0(J))\, \varepsilon\, V(\varphi, J) + \varepsilon\, C_1(J) + O(\varepsilon^2) \\
&= \Lambda(\mathcal{H}_0(J) + \varepsilon\, V(\varphi, J)) + \varepsilon\, C_1(J) + O(\varepsilon^2) \\
&= \Lambda(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \varepsilon\, C_1(J) + O(\varepsilon^2) \\
&= \Lambda(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \varepsilon \left[F_0'(\varphi, J) + \varepsilon F_1'(\varphi, J) + O(\varepsilon^2) \right],
\end{aligned}$$

dove $F' = F_0' + \varepsilon F_1' + \dots$ è una costante del moto. Ripetendo l'argomento si trova

$$F'(\varphi, J) = \Lambda_1(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \varepsilon\, F''(\varphi, J),$$

dove F'' è ancora una costante del moto. Iterando si ottiene

$$F(\varphi, J) = \Lambda(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \varepsilon\,\Lambda_1(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mathcal{H}(\varphi, J)) + \dots,$$

così che, per analiticità, deve risultare $F(\varphi, J) = \Lambda_\varepsilon(\mathcal{H}(\varphi, J))$ per un'opportuna funzione Λ_ε. Ne concludiamo che F deve essere una funzione dell'energia. ■

Osservazione 85.8 Il fatto che in generale il sistema non ammetta integrali primi, e quindi non sia integrabile, potrebbe suggerire che per $\varepsilon \neq 0$ non esistano moti multiperiodici per il sistema perturbato (a differenza di quello che succede per $\varepsilon = 0$, ove tutti i moti sono multiperiodici). In particolare, si potrebbe pensare che se cercassimo soluzioni multiperiodiche delle equazioni del moto nella forma di serie di potenze di ε, tali serie o non sarebbero neppure definite o, al più, quand'anche fossero definite, dovrebbero divergere. Vedremo più avanti (cfr. il §87) che fissando opportunamente le frequenze ω, le serie perturbative (note come *serie di Lindstedt*) risultano definite a tutti gli ordini. Solo recentemente se ne è dimostrata la convergenza (sotto le assunzioni di non degenerazione e di anisocronia). Tuttavia la teoria delle perturbazioni è stata a lungo utilizzata in astronomia anche in tempi precedenti, trovando un ottimo accordo con i dati sperimentali (cfr. anche la discussione a pag. 358).

Un metodo alternativo di procedere, rispetto a quello discusso alla fine dell'osservazione 85.8, consiste nel seguire le idee introdotte nei paragrafi precendenti: si cerca di definire la trasformazione canonica che porta in variabili in cui l'hamiltoniana dipenda solo dalla variabili d'azione come composizione di infinite trasformazioni canoniche, ciascuna delle quali riduce le dimensioni della perturbazione. Seguire questa strategia ha portato al teorema KAM.

KAM è un acronimo costituito dalle iniziali dei tre matematici che ne hanno fornito una dimostrazione: Kolmogorov (1954), Arnol′d (1963) e Moser (1962); le tre versioni sono note come *teorema di Kolmogorov*, *teorema di Arnol′d* e *teorema di Moser*, rispettivamente. Le dimostrazioni di Kolomogorov e Arnol′d sono state date nel caso analitico, mentre Moser ha trattato il caso di hamiltoniane di classe C^p, per p opportuno. Nella dimostrazione originale di Moser, valida per una classe di sistemi discreti, il valore di p era 333; successivamente la dimostrazione è stata estesa a sistemi hamiltoniani continui e la stima dell'esponente p è stata largamente migliorata: la condizione ottimale è $p > 2n$, dove n è il numero di gradi di libertà.

Grosso modo il teorema KAM afferma che, sotto ipotesi opportune su $\mathcal{H}_0(J)$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ la maggior parte dei tori invarianti sopravvive. Più precisamente, dato il sistema descritto da un'hamiltoniana della forma (84.1), con $\mathcal{H}_0$ e V analitiche, sotto l'ipotesi che $\mathcal{H}_0$ sia non degenere (nel senso della definizione 84.9), fissata una frequenza $\omega = \omega(J_0)$ diofantea, con J_0 all'interno del dominio di analiticità nelle azioni, per ε sufficientemente piccolo vale il seguente risultato: esistono due funzioni α e β, analitiche in $\mathbb{T}^n$ e a valori in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$, rispettivamente, tali che il toro

$$\varphi = \psi + \beta(\psi), \qquad J = J_0 + \alpha(\psi), \qquad \psi \in \mathbb{T}^n, \tag{85.24}$$

è invariante per il sistema e il moto sul toro è descritto da $\psi \mapsto \psi + \omega t$. In altre parole l'evoluzione sulla superficie (85.24) è descritta dalla legge

$$\varphi(t) = \bar{\psi} + \beta(\bar{\psi} + \omega t), \quad J(t) = J_0 + \alpha(\bar{\psi} + \omega t),$$

per ogni $\bar{\psi} \in \mathbb{T}^n$. Un enunciato formale del teorema, nel caso analitico che stiamo considerando, si può trovare nel prossimo capitolo (cfr. il §89), dove ne sarà data anche la dimostrazione.

Osservazione 85.9 Si può dimostrare che i tori sono analitici in ε, nel senso che le funzioni α e β sono analitiche in ε per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Ovviamente questo comporta la convergenza in ε delle serie perturbative per i tori. Altrettanto ovviamente, la serie perturbativa per la funzione generatrice non converge su un sottoinsieme aperto di $D(\rho, \xi, J_0)$ perché altrimenti questo implicherebbe l'integrabilità del sistema perturbato. Per maggiori dettagli si veda il §89.

Osservazione 85.10 Si può inoltre dimostrare che i tori invarianti che sopravvivono quando si perturba l'hamiltoniana $\mathcal{H}_0$ riempiono una parte dello spazio delle fasi che ha misura relativa grande, i.e. che tende a 1 quando ε tende a 0. Di nuovo, per maggiori dettagli si veda il §89.

§86 Un esempio semplice di teoria delle perturbazioni

Consideriamo per $n = 1$ il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\, k\, q^4, \tag{86.1}$$

dove $k > 0$ ed ε è il parametro perturbativo. L'hamiltoniana (86.1) descrive una perturbazione dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico; con la trasformazione (83.3) l'hamiltoniana diventa

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = \omega J + \varepsilon\, \alpha\, J^2 \sin^4 \varphi, \qquad \alpha = \frac{k}{m^2\omega^2}.$$

Ovviamente il sistema perturbato è ancora un sistema unidimensionale che ammette moti periodici (dal momento che tutte le traiettorie sono curve chiuse); in particolare le equazioni del moto si risolvono esplicitamente per quadratura. Quello che ci proponiamo è di applicare la teoria delle perturbazioni in un caso in cui non ci sono problemi di convergenza, per illustrare il metodo descritto nel paragrafo precedente.

86.1 Primo ordine

Al primo ordine, la correzione all'hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H}_1'(J') = \alpha (J')^2 \left\langle \sin^4 \varphi \right\rangle = \frac{3}{8}\alpha (J')^2, \tag{86.2}$$