

e si ignora la dipendenza da  $\varepsilon$  in  $\Omega_2$ , trattando  $\Omega_2$  come se fosse un parametro. In questo modo, invece della (86.26) si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(0) + \Omega_2 t + \varepsilon \left( J(0) \left( A(\varphi(0)) - A(\varphi(0) + \Omega_2 t) \right) \right) \\ & + \varepsilon^2 \left( (J(0))^2 \left( -A_2(\varphi(0)) + B(\varphi(0)) A(\varphi(0) + \Omega_2 t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial A}{\partial \varphi}(\varphi(0) + \Omega_2 t) A(\varphi(0)) + C_2(\varphi(0) + \Omega_2 t) \right) \right). \end{aligned} \quad (86.28)$$

Confrontando la (86.28) con la (86.26), si vede che le due espressioni sono uguali a meno di termini  $O(\varepsilon^2)$ ; tuttavia la (86.28) è una funzione periodica di frequenza  $\Omega_2 = \omega + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$ .

## §87 Serie di Lindstedt

**N**ELL'ESEMPIO DISCUSO AL §86 abbiamo visto che, già in un caso molto semplice, se fissiamo un dato iniziale per il sistema perturbato, la corrispondente traiettoria troncata al secondo ordine avrà un comportamento molto diverso da quello del sistema imperturbato con lo stesso dato iniziale. Infatti, per  $\varepsilon = 0$ , ogni traiettoria del sistema descritto dall'hamiltoniana (86.1) è periodica con frequenza  $\omega$ , mentre per  $\varepsilon \neq 0$  la soluzione calcolata al primo ordine (cfr. la (86.12a)) o al secondo ordine (cfr. la (86.26)) non ha una frequenza definita; inoltre, come sottolineato nell'osservazione 86.2, i coefficienti di un fissato ordine in  $\varepsilon$  non sono necessariamente periodici né limitati. Tuttavia, se trattiamo la frequenza della soluzione  $(\varphi'(t), J'(t))$  come un parametro indipendente, la soluzione che si ottiene risulta essere una funzione periodica (cfr. di nuovo le osservazioni 86.1 e 86.2).

Questo suggerisce un modo diverso di procedere, anche nel caso generale di sistemi a più gradi di libertà. Si può infatti pensare di fissare le frequenze fin dall'inizio e cercare soluzioni quasiperiodiche che abbiano le frequenze assegnate. Si ha così la certezza *a priori* che, se si riesce a costruire una soluzione, questa deve descrivere un moto quasiperiodico.

Più precisamente possiamo ragionare nel modo seguente. Consideriamo il sistema descritto da un'hamiltoniana della forma (84.1). Se il sistema fosse integrabile (e quindi se l'equazione di Hamilton-Jacobi si potesse risolvere, almeno in principio), allora avremmo soluzioni quasiperiodiche. Poiché questo succede per  $\varepsilon = 0$ , dove tutte le soluzioni sono della forma

$$\varphi_0(t) := \varphi_0 + \omega(J_0)t, \quad J_0(t) := J_0, \quad (87.1)$$

con  $J_0$  che dipende dalle condizioni iniziali, ci si può allora chiedere se il sistema perturbato ammetta una soluzione con la stessa frequenza  $\omega(J_0)$ , cioè se esista una soluzione

$$(\varphi(t), J(t)) = (\varphi_0 + \omega_0 t + h(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0), J_0 + H(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0)) \quad (87.2)$$

del sistema perturbato, con  $\omega_0 := \omega(J_0)$  e opportune funzioni  $h(\psi, J)$  e  $H(\psi, J)$  che dipendano periodicamente dagli argomenti  $\psi$ .

Ovviamente, già sappiamo che questo non è possibile per ogni valore di  $J_0$ . Nel caso di sistemi isocroni, per quanto possiamo spingere la teoria delle perturbazioni all'ordine che vogliamo, tuttavia non possiamo davvero risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi (cfr. l'osservazione 85.4); inoltre, sempre nel caso di sistemi isocroni, abbiamo l'ulteriore difficoltà che nel sistema imperturbato tutte le soluzioni hanno le stesse frequenze, mentre ci aspettiamo che il sistema perturbato abbia frequenze diverse; già nel semplice esempio discusso nel §86, la frequenza è data da  $\Omega_2 = \omega + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$ , dove le correzioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dipendono dai dati iniziali (cfr. la (86.25)). Di conseguenza non è immediato individuare le frequenze dei moti che si vogliono studiare.

Anche nel caso anisocrono abbiamo problemi analoghi, oltre a quelli evidenziati nel §85. Tuttavia, nel caso di sistemi anisocroni, abbiamo il vantaggio che il sistema imperturbato è caratterizzato da frequenze che variano in un insieme aperto (al variare dell'azione  $J_0$  in un insieme aperto). Ci si può quindi aspettare che il sistema perturbato ammetta, almeno a livello di serie formali, moti quasiperiodici le cui frequenze corrispondano a un sottoinsieme delle frequenze possibili per il sistema imperturbato, per esempio quelle che soddisfino qualche condizione diofantea. Per questo motivo, nel seguito ci concentreremo sui sistemi anisocroni.

Ricapitolando, possiamo studiare la serie perturbativa per le funzioni  $h$  e  $H$  in (87.2), disinteressandoci da eventuali problemi di convergenza. Scriveremo allora in (87.2)

$$h(\psi, J) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k h^{(k)}(\psi, J), \quad H(\psi, J) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H^{(k)}(\psi, J), \quad (87.3)$$

e studieremo se sia possibile definire i coefficienti delle due serie per  $k \geq 1$ . Vedremo che questo è possibile; in particolare, come anticipato,  $J_0$  dovrà essere tale che  $\omega_0$  soddisfi una condizione diofantea e quindi le soluzioni cercate saranno genuinamente quasiperiodiche.

**Definizione 87.1** (SERIE DI LINDSTEDT) *Le serie perturbative (87.3) prendono il nome di serie di Lindstedt.*

Quello che dobbiamo fare è scrivere le equazioni di Hamilton

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi, J), \quad \dot{J} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi, J), \quad (87.4)$$

e cercare di determinare ordine per ordine una soluzione della forma (87.2). Se introduciamo le (87.2) nelle equazioni del moto (87.4) otteniamo

$$\omega_0 + \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J_0 + H) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H), \quad (87.5a)$$

$$\dot{H} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H), \quad (87.5b)$$

e se in (87.5a) scriviamo

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J_0 + H) = \omega(J_0 + H) = \omega_0 + (\omega(J_0 + H) - \omega(J_0)),$$

arriviamo alle equazioni

$$\dot{h} = (\omega(J_0 + H) - \omega(J_0)) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H), \quad (87.6a)$$

$$\dot{H} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H), \quad (87.6b)$$

Espandendo poi  $h$  e  $H$  in accordo con la (87.3) ed uguagliando i coefficienti delle potenze di  $\varepsilon$ , troviamo delle equazioni ricorsive per i coefficienti  $h^{(k)}$  e  $H^{(k)}$ .

Dal momento che cerchiamo soluzioni quasiperiodiche può risultare conveniente passare allo spazio di Fourier e scrivere i coefficienti  $h^{(k)}(\psi, J_0)$  e  $H^{(k)}(\psi, J_0)$  come serie di Fourier

$$h^{(k)}(\psi, J_0) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \psi \rangle} h_\nu^{(k)}, \quad H^{(k)}(\psi, J_0) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \psi \rangle} H_\nu^{(k)}, \quad (87.7)$$

dove  $\psi = \varphi_0 + \omega_0 t$ . In (87.7) e nel seguito i coefficienti  $h_\nu^{(k)}$  e  $H_\nu^{(k)}$  dipendono da  $J_0$  (i.e.  $h_\nu^{(k)} = h_\nu^{(k)}(J_0)$  e  $H_\nu^{(k)} = H_\nu^{(k)}(J_0)$ ), anche se non ne abbiamo scritto la dipendenza esplicitamente. Unendo le due espansioni (87.3) e (87.7), troviamo

$$h(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} h_\nu^{(k)}, \quad (87.8a)$$

$$H(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} H_\nu^{(k)}, \quad (87.8b)$$

che costituisce un'espansione in serie di Taylor-Fourier delle funzioni  $h$  e  $H$ .

**Osservazione 87.2** Entrambi gli sviluppi (87.3) e (87.7), e quindi anche gli sviluppi in serie di Taylor-Fourier (87.8), sono puramente formali, perché non abbiamo alcuna garanzia al momento che le serie convergano.

Visto che cerchiamo soluzioni che dipendono dal tempo attraverso la variabile  $\psi = \varphi_0 + \omega_0 t$ , possiamo usare il fatto che, su tali funzioni la derivata rispetto al tempo agisce come un operatore di moltiplicazione nello spazio di Fourier. Infatti, derivando rispetto al tempo le (87.8), abbiamo

$$\dot{h}(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} i \langle \omega_0, \nu \rangle h_\nu^{(k)}, \quad (87.9a)$$

$$\dot{H}(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} i \langle \omega_0, \nu \rangle H_\nu^{(k)}. \quad (87.9b)$$

Se introduciamo le (87.8) e (87.9) nelle (87.6) otteniamo

$$i \langle \omega_0, \nu \rangle h_\nu^{(k)} = \left[ (\omega(J_0 + H) - \omega(J_0)) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) \right]_\nu^{(k)}, \quad (87.10a)$$

$$i \langle \omega_0, \nu \rangle H_\nu^{(k)} = - \left[ \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) \right]_\nu^{(k)}, \quad (87.10b)$$

dove, data una funzione  $F = F(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H)$ , con la notazione  $[F]_\nu^{(k)}$  intendiamo che prima sviluppiamo  $F$  in serie di Taylor nei suoi argomenti, dopo sviluppiamo  $h$  e  $H$  in accordo con le (87.8), quindi raccogliamo insieme tutti i termini che hanno, complessivamente, indice di Taylor  $k$  e indice di Fourier  $\nu$ ; in altre parole la funzione  $F$  è scritta nella forma

$$F(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{i \langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} [F]_\nu^{(k)}.$$

In particolare in (87.10a) abbiamo

$$\omega(J_0 + H) - \omega(J_0) = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \geq 0 \\ |a| \geq 1}} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} \omega(J_0) \prod_{i=1}^n H_i^{a_i}, \quad (87.11)$$

dal momento che  $\omega(J)$  non dipende dalla variabile  $\varphi$ , mentre

$$\frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \geq 0 \\ b_1, \dots, b_n \geq 0}} \frac{1}{a! b!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} \frac{\partial^{|b|}}{\partial \varphi^b} \frac{\partial}{\partial J} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \prod_{i=1}^n H_i^{a_i} h_i^{b_i}, \quad (87.12a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \geq 0 \\ b_1, \dots, b_n \geq 0}} \frac{1}{a! b!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} \frac{\partial^{|b|}}{\partial \varphi^b} \frac{\partial}{\partial \varphi} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \prod_{i=1}^n H_i^{a_i} h_i^{b_i}, \quad (87.12b)$$

dove, consistentemente con le notazioni introdotte dopo la (85.4), abbiamo definito

- $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , con  $a_i, b_i \geq 0$  intero per ogni  $i = 1, \dots, n$ ,
- $|a| = a_1 + \dots + a_n$  e  $|b| = b_1 + \dots + b_n$ ,
- $\partial^{|a|} / \partial J^a = \partial^{|a|} / \partial J_1^{a_1} \dots \partial J_n^{a_n}$  e  $\partial^{|b|} / \partial \varphi^b = \partial^{|b|} / \partial \varphi_1^{b_1} \dots \partial \varphi_n^{b_n}$ ,
- $a! = a_1! \dots a_n!$  e  $b! = b_1! \dots b_n!$ .

Possiamo riscrivere le (87.11) e (87.12) in modo più compatto come

$$\omega(J_0 + H) - \omega(J_0) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial J^p} \omega(J_0) \underbrace{H \dots H}_{p \text{ volte}}, \quad (87.13a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} \frac{\partial^q}{\partial \varphi^q} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \underbrace{H \dots H}_{p \text{ volte}} \underbrace{h \dots h}_{q \text{ volte}}, \quad (87.13b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^p}{\partial J^p} \frac{\partial^{q+1}}{\partial \varphi^{q+1}} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \underbrace{H \dots H}_{p \text{ volte}} \underbrace{h \dots h}_{q \text{ volte}}, \quad (87.13c)$$

dove i simboli devono essere interpretati come segue. In (87.13a),  $\partial^p \omega / \partial J^p$  è un tensore con  $p + 1$  indici, di cui  $p$  (relativi alle variabili  $J$ ) sono contratti con gli indici di componente dei  $p$  vettori  $H$ , i.e.

$$\frac{\partial^p}{\partial J^p} \omega(J_0) \underbrace{H \dots H}_{p \text{ volte}} = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \frac{\partial^p}{\partial J_{i_1} \dots \partial J_{i_p}} \omega(J_0) H_{i_1} \dots H_{i_p}$$

è un vettore le cui componenti sono quelle di  $\omega$ . Analogamente, in (87.13b) e in (87.13c), rispettivamente,

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} \frac{\partial^q}{\partial \varphi^q} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^p}{\partial J^p} \frac{\partial^{q+1}}{\partial \varphi^{q+1}} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0)$$

sono tensori con  $p + q + 1$  indici di cui  $p$  sono contratti con gli indici di componente dei  $p$  vettori  $H$  e  $q$  sono contratti con gli indici di componente dei  $q$  vettori  $h$ ; per esempio

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} \frac{\partial^q}{\partial \varphi^q} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) \underbrace{H \dots H}_{p \text{ volte}} \underbrace{h \dots h}_{q \text{ volte}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^n \frac{\partial}{\partial J} \frac{\partial^p}{\partial J_{i_1} \dots \partial J_{i_p}} \frac{\partial^q}{\partial \varphi_{j_1} \dots \partial \varphi_{j_q}} V(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) H_{i_1} \dots H_{i_p} h_{j_1} \dots h_{j_q} \end{aligned}$$

è un vettore le cui componenti sono fissate dalle componenti di  $\partial / \partial J$ .

Introducendo le (87.8) nelle (87.13) arriviamo alle equazioni

$$\begin{aligned} & \left[ \omega(J_0 + H) - \omega(J_0) \right]_{\nu}^{(k)} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_p \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_1 + \dots + \nu_p = \nu}} \frac{\partial^p \omega}{\partial J^p}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_p = k}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)}, \end{aligned} \quad (87.14a)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) \right]_{\nu}^{(k)} \\ &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = \nu}} (i\nu_0)^q \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} V_{\nu_0}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)}, \end{aligned} \quad (87.14b)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \omega_0 t + h, J_0 + H) \right]_{\nu}^{(k)} \\ &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = \nu}} (i\nu_0)^{q+1} \frac{\partial^p}{\partial J^p} V_{\nu_0}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)}, \end{aligned} \quad (87.14c)$$

dove, per semplicità notazionale, abbiamo ommesso (come faremo nel seguito) la dipendenza da  $J_0$  dei coefficienti  $h_{\nu}^{(k)}(J_0)$  e  $H_{\nu}^{(k)}(J_0)$ . In (87.14b) e (87.14c), i termini con  $p = 0$  o  $q = 0$  vanno interpretati opportunamente: per esempio, in (87.14b), gli addendi con  $p = 0$  e  $q \geq 1$  sono

$$\frac{1}{q!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = \nu}} (i\nu_0)^q \frac{\partial}{\partial J} V_{\nu_0}(J_0) \sum_{\substack{k'_1, \dots, k'_q \geq 1 \\ k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)},$$

quelli con  $q = 0$  e  $p \geq 1$  sono

$$\frac{1}{p!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p = \nu}} \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} V_{\nu_0}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_p = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)},$$

e, infine, l'addendo con  $q = p = 0$  si riduce a  $[\partial V_{\nu} / \partial J](J_0)$  e in tal caso si ha necessariamente  $k = 1$ . Analoghe considerazioni valgono per la (87.14c); in particolare il termine con  $q = p = 0$  (e  $k = 1$ ) è dato da  $(i\nu) V_{\nu}(J_0)$ .

Se introduciamo le (87.14) nelle (87.10), otteniamo equazioni che definiscono ricorsivamente i coefficienti  $h_{\nu}^{(k)}$  e  $H_{\nu}^{(k)}$ . Infatti in (87.14b) e (87.14c) la somma degli indici  $k_i, k'_i$  è pari a  $k - 1$ , quindi ciascuno di essi è  $\leq k - 1$ , così che la (87.10b) può essere utilizzata per esprimere  $H_{\nu}^{(k)}$  in termini dei coefficienti trovati ai passi precedenti. Al contrario, nell'equazione (87.14a) che definisce il coefficiente  $h_{\nu}^{(k)}$ , la somma degli indici  $k_i$  è  $k$ , ma l'unico coefficiente di ordine  $k$  che compare è  $H_{\nu}^{(k)}$ , che è già stato determinato risolvendo l'equazione (87.10b).

### 87.1 Primo ordine

Tenendo conto delle (87.14), le (87.10) per  $k = 1$  danno

$$i \langle \omega_0, \nu \rangle h_\nu^{(1)} = \frac{\partial \omega}{\partial J}(J_0) H_\nu^{(1)} + \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J_0), \quad (87.15a)$$

$$i \langle \omega_0, \nu \rangle H_\nu^{(1)} = - (i\nu) V_\nu(J_0). \quad (87.15b)$$

Si vede immediatamente che, perché le equazioni (87.15) siano risolubili, occorrono assunzioni aggiuntive. Poiché il membro di sinistra delle (87.15) si annulla quando  $\langle \omega_0, \nu \rangle = 0$ , occorre che anche il membro di destra si annulli in corrispondenza. Se  $\omega_0$  è diofanteo – o anche solo non risonante – allora  $\langle \omega_0, \nu \rangle = 0$  se e solo se  $\nu = 0$ . Il membro di destra della (87.15b) si annulla per  $\nu = 0$ , d'altra parte quello dell'equazione (87.15a) lo può essere solo se  $H_0^{(1)}$  è scelto in modo opportuno. Se richiediamo

$$\det \left( \frac{\partial \omega}{\partial J}(J_0) \right) \neq 0, \quad (87.16)$$

possiamo allora fissare  $H_0^{(1)}$  in modo tale che si abbia

$$\frac{\partial \omega}{\partial J}(J_0) H_0^{(1)} + \frac{\partial V_0}{\partial J}(J_0) = 0$$

Si noti che la condizione (87.16) è soddisfatta se l'hamiltoniana imperturbata  $\mathcal{H}_0$  è non degenera (cfr. la definizione 84.9). In conclusione, se fissiamo

$$H_0^{(1)} = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial J}(J_0) \right)^{-1} \frac{\partial V_0}{\partial J}(J_0), \quad (87.17)$$

le (87.15) sono soddisfatte per  $\nu = 0$ , mentre per  $\nu \neq 0$ , danno

$$h_\nu^{(1)} = \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} \left( \frac{\partial \omega}{\partial J}(J_0) H_\nu^{(1)} + \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J_0) \right), \quad (87.18a)$$

$$H_\nu^{(1)} = - \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} (i\nu) V_\nu(J_0). \quad (87.18b)$$

La (87.18b) definisce quindi i coefficienti  $H_\nu^{(1)}$  per  $\nu \neq 0$ . Il coefficiente  $h_0^{(1)}$  resta indeterminato e possiamo arbitrariamente porlo uguale a zero (questo è sempre possibile eventualmente ridefinendo  $\varphi_0$ ). Inoltre, utilizzando la stima (84.4) sui coefficienti di Fourier della perturbazione e imponendo che  $\omega_0$  soddisfi la condizione diofantea (84.20), abbiamo

$$\left| H_\nu^{(1)} \right| \leq \frac{|\nu|^\tau}{\gamma} |\nu| \Phi e^{-\xi|\nu|},$$

quindi i coefficienti di Fourier di  $H^{(1)}(\psi, J_0)$  decadono esponenzialmente. Ne segue che la funzione  $H^{(1)}(\psi, J_0)$  è analitica in  $\psi$  e, in particolare, la sua serie di Fourier converge uniformemente per  $|\Im(\psi)| \leq \xi_1 < \xi$  (cfr. l'esercizio 70).

Introducendo la (87.18b) nella (87.18a), otteniamo

$$h_\nu^{(1)} = -\frac{1}{(i\langle\omega_0, \nu\rangle)^2} (i\nu) \frac{\partial\omega}{\partial J}(J_0) V_\nu(J_0) + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J_0). \quad (87.19)$$

Anche i coefficienti di  $h^{(1)}(\psi, J_0)$  sono ben definiti e decadono esponenzialmente, così che anche la funzione  $h^{(1)}(\psi, J_0)$  risulta analitica in  $\psi$ , per  $|\Im(\psi)| \leq \xi_1 < \xi$  (cfr. di nuovo l'esercizio 70).

Per semplificare le notazioni, anche in vista degli ordini successivi, poniamo

$$\partial_J^p \omega := \frac{\partial^p \omega}{\partial J^p}(J_0), \quad \partial_J^p V_\nu := \frac{\partial^p V_\nu}{\partial J^p}(J_0), \quad (87.20)$$

così che possiamo riscrivere la (87.17), la (87.18b) e la (87.19) come

$$H_0^{(1)} = -(\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0, \quad (87.21a)$$

$$H_\nu^{(1)} = -\frac{i\nu}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} V_\nu, \quad \nu \neq 0, \quad (87.21b)$$

$$h_\nu^{(1)} = \left( -\frac{1}{(i\langle\omega_0, \nu\rangle)^2} (i\nu) \partial_J \omega V_\nu + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \partial_J V_\nu \right), \quad \nu \neq 0. \quad (87.21c)$$

## 87.2 Secondo ordine

Per  $k = 2$  le (87.10), insieme alle (87.13), danno, usando le notazioni abbreviate (87.20),

$$\begin{aligned} i\langle\omega_0, \nu\rangle h_\nu^{(2)} &= \partial_J \omega H_\nu^{(2)} + \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_1 + \nu_2 = \nu}} H_{\nu_1}^{(1)} H_{\nu_2}^{(1)} + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} \left( \partial_J^2 V_{\nu_0} H_{\nu_1}^{(1)} (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} h_{\nu_1}^{(1)} \right), \\ i\langle\omega_0, \nu\rangle H_\nu^{(2)} &= - \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} \left( (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} H_{\nu_1}^{(1)} + (i\nu_0)^2 V_{\nu_0} h_{\nu_1}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (87.22)$$

dove i coefficienti  $H_\nu^{(1)}$  e  $h_\nu^{(1)}$  sono dati, per  $\nu \neq 0$ , dalle (87.21b) e (87.21c), rispettivamente, mentre  $H_0^{(1)}$  è dato dalla (87.21a) e  $h_0^{(1)} = 0$ . Per  $\nu = 0$  la prima equazione delle (87.22) fissa il coefficiente

$$H_0^{(2)} = -(\partial_J \omega)^{-1} \left( \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_1 + \nu_2 = 0}} H_{\nu_1}^{(1)} H_{\nu_2}^{(1)} + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 = 0}} \left( \partial_J^2 V_{\nu_0} H_{\nu_1}^{(1)} + (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} h_{\nu_1}^{(1)} \right) \right). \quad (87.23)$$

Assumendo per il momento che anche la seconda delle (87.22) sia soddisfatta per  $\nu = 0$ , passiamo a considerare le equazioni per  $\nu \neq 0$ . Se  $\nu \neq 0$ , possiamo dividere le (87.22) per

$i \langle \omega_0, \nu \rangle$  e ottenere così i coefficienti  $H_\nu^{(2)}$  e  $h_\nu^{(2)}$ . Ovviamente andrà risolta per prima la seconda delle (87.22), in modo da definire i coefficienti

$$H_\nu^{(2)} = -\frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} \left( (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} H_{\nu_1}^{(1)} + (i\nu_0)^2 V_{\nu_0} h_{\nu_1}^{(1)} \right) \quad (87.24)$$

in termini dei coefficienti  $H_{\nu'}^{(1)}$  e  $h_{\nu'}^{(1)}$ , con  $\nu' \in \mathbb{Z}^n$ , trovati al passo precedente. Successivamente si considera la prima equazione delle (87.22), dove il membro di destra dipende di nuovo dai coefficienti  $H_{\nu'}^{(1)}$  e  $h_{\nu'}^{(1)}$ ,  $\nu' \in \mathbb{Z}^n$ , oltre che dai coefficienti  $H_\nu^{(2)}$  appena determinati attraverso la (87.24). In questo modo riusciamo a determinare anche i coefficienti  $h_\nu^{(2)}$ .

Usando le (87.17) e (87.21) nella (87.24), otteniamo, per  $\nu \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)} = & -\frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} \left( - (i\nu) \partial_J V_\nu (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} (i\nu_0)^2 V_{\nu_0} \left( -\frac{1}{(i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle)^2} (i\nu_1) \partial_J \omega V_{\nu_1} + \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle} \partial_J V_{\nu_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (87.25)$$

mentre la (87.23) si può riscrivere

$$\begin{aligned} H_0^{(2)} = & - (\partial_J \omega)^{-1} \left( \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 \right. \\ & + \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_1 + \nu_2 = 0}} \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_2 \rangle} (i\nu_2) V_{\nu_2} \\ & + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} \left( \partial_J^2 V_{\nu_0} \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} \right. \\ & \left. + (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} \left( -\frac{1}{(i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle)^2} (i\nu_1) \partial_J \omega V_{\nu_1} + \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu_1 \rangle} \partial_J V_{\nu_1} \right) \right) \Big). \end{aligned} \quad (87.26)$$

Le (87.25) e (87.26) costituiscono espressioni esplicite per i coefficienti  $H_\nu^{(2)}$  per ogni  $\nu \in \mathbb{Z}^n$ .

Infine, inserendo le (87.17), (87.21), (87.25) e (87.26) nella prima equazione delle (87.22), troviamo per  $\nu \neq 0$

$$\begin{aligned}
h_\nu^{(2)} = & -\frac{1}{(i\langle\omega_0, \nu\rangle)^2} \partial_J \omega \left( - (i\nu) \partial_J V_\nu (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 \right. \\
& - \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_1\rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} \\
& + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} (i\nu_0)^2 V_{\nu_0} \left( -\frac{1}{(i\langle\omega_0, \nu_1\rangle)^2} (i\nu_1) \partial_J \omega V_\nu + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_1\rangle} \partial_J V_{\nu_1} \right) \Big) \\
& + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_1 + \nu_2 = \nu}} \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_1\rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_2\rangle} (i\nu_2) V_{\nu_2} \\
& + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \frac{1}{2} \partial_J^2 \omega \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} (i\nu) V_\nu (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 \\
& - \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} \partial_J^2 V_{\nu_0} \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_1\rangle} (i\nu_1) V_{\nu_1} - \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \partial_J^2 V_\nu (\partial_J \omega)^{-1} \partial_J V_0 \\
& + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu\rangle} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{Z}^n, \nu_1 \neq 0 \\ \nu_0 + \nu_1 = \nu}} (i\nu_0) \partial_J V_{\nu_0} \left( -\frac{1}{(i\langle\omega_0, \nu_1\rangle)^2} (i\nu_1) \partial_J \omega V_{\nu_1} + \frac{1}{i\langle\omega_0, \nu_1\rangle} \partial_J V_{\nu_1} \right),
\end{aligned} \tag{87.27}$$

laddove  $h_0^{(2)}$  resta arbitrario e si può di nuovo fissare uguale a 0. In questo modo di nuovo si vede che i coefficienti di Fourier delle funzioni  $h^{(2)}(\psi, J_0)$  e  $H^{(2)}(\psi, J_0)$  decadono esponenzialmente e quindi si può sommare sugli indici di Fourier; ne segue che le due funzioni risultano analitiche per  $|\Im(\psi)| \leq \xi_1 < \xi$  (si ragioni come nell'esercizio 70 per i coefficienti con  $k = 1$ )

Resta il problema di verificare che la seconda equazione delle (87.22) è soddisfatta per  $\nu = 0$ . Questo non è evidente *a priori* e va discusso. Nel caso  $k = 2$  che stiamo considerando si può facilmente verificare con un conto esplicito. Non ne diamo i dettagli poiché torneremo sul problema nel caso più generale  $k \geq 2$ .

### 87.3 Ordini superiori

Il conto al secondo ordine mostra che i coefficienti  $h_\nu^{(2)}$  e  $H_\nu^{(2)}$  si esprimono in funzione dei coefficienti  $h_\nu^{(1)}$  e  $H_\nu^{(1)}$  trovati al primo ordine.

Si può seguire la stessa strategia anche agli ordini successivi: infatti le (87.10) mostrano che i coefficienti di ordine  $k$  si scrivono in termini dei coefficienti di ordine più basso, ovvero dei coefficienti di ordine  $k' = 1, \dots, k-1$ , in modo tale che i coefficienti stessi possono essere

determinati ricorsivamente, ordine per ordine. Più precisamente, introducendo le (87.14) nelle (87.10), si trova, se  $\nu \neq 0$ ,

$$H_\nu^{(k)} = -\frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = \nu}} (i\nu_0)^{q+1} \frac{\partial^p V_{\nu_0}}{\partial J^p}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)}, \quad (87.28a)$$

$$h_\nu^{(k)} = \frac{1}{i \langle \omega_0, \nu \rangle} \left[ \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J_0) H_\nu^{(k)} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_p \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_1 + \dots + \nu_p = \nu}} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p = k}} \frac{\partial^p \omega}{\partial J^p}(J_0) H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} + \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = \nu}} (i\nu_0)^q \frac{\partial^{p+1} V_{\nu_0}}{\partial J^{p+1}}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)} \right], \quad (87.28b)$$

mentre, per  $\nu = 0$ , in corrispondenza della (87.10a) dobbiamo richiedere

$$0 = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} e^{i \langle \nu, \varphi_0 \rangle} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = 0}} (i\nu_0)^{q+1} \frac{\partial^p V_{\nu_0}}{\partial J^p}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)}, \quad (87.29)$$

e, per quanto riguarda la (87.10b), vediamo che  $H_0^{(k)}$  deve essere tale che valga l'equazione

$$H_0^{(k)} = - (T(J_0))^{-1} \left[ \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_p \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_1 + \dots + \nu_p = 0}} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p = k}} \frac{\partial^p \omega}{\partial J^p}(J_0) H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} + \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} e^{i \langle \nu, \varphi_0 \rangle} \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \nu'_1, \dots, \nu'_q \in \mathbb{Z}^n \\ \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_p + \nu'_1 + \dots + \nu'_q = 0}} (i\nu_0)^q \frac{\partial^{p+1} V_{\nu_0}}{\partial J^{p+1}}(J_0) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_p + k'_1 + \dots + k'_q = k-1}} H_{\nu_1}^{(k_1)} \dots H_{\nu_p}^{(k_p)} h_{\nu'_1}^{(k'_1)} \dots h_{\nu'_q}^{(k'_q)} \right], \quad (87.30)$$

dove

$$T(J_0) := \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J_0) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J^2}(J_0). \quad (87.31)$$

In (87.28), in (87.29) e in (87.30), i termini con  $p = 0$  o con  $q = 0$  vanno interpretati come discusso dopo la (87.12).

I coefficienti  $H_\nu^{(k)}$  si scrivono come somme di infiniti termini in cui compaiono solo coefficienti  $h_{\nu'}^{(k')}$  e  $H_{\nu''}^{(k')}$  con  $k', k'' < k$ , mentre  $h_\nu^{(k)}$  si scrive come somma di infiniti termini in cui compaiono solo coefficienti  $h_{\nu'}^{(k')}$  e  $H_{\nu''}^{(k')}$  con  $k' < k$  e  $k'' \leq k$  (ci sono infiniti termini a causa degli indici di Fourier, a meno che la perturbazione non sia un polinomio trigonometrico in  $\varphi$ ). Ciascuno di tali coefficienti si può esprimere a sua volta come somma di infiniti termini in cui compaiono solo coefficienti di ordine più basso. Iterando più volte alla fine si ottiene un'espansione in cui compaiono solo coefficienti del primo ordine, i.e. coefficienti (87.17) e (87.18), come succede per le (87.22) e (87.23) nel caso  $k = 2$ . Infine possiamo scrivere  $h_\nu^{(1)}$  e  $H_\nu^{(1)}$  in accordo con le (87.17) e (87.18), dove le uniche funzioni ad apparire sono la funzione  $\omega$ , i coefficienti  $V_\nu$  e le loro derivate; cfr. le (87.25)÷(87.27) per  $k = 2$ .

Perché la costruzione iterativa sia ben definita occorre che le (87.29) e (87.30) siano risolubili. Mentre la (87.30) ammette sempre soluzione, purché si scelga opportunamente  $H_0^{(k)}$ , non appena i coefficienti di ordine più basso  $k' < k$  siano ben definiti, al contrario la discussione della (87.29) è più delicata. Infatti, non abbiamo parametri liberi da utilizzare per imporre che essa sia soddisfatta: una volta che i coefficienti di ordine più basso siano definiti, la (87.29) deve essere un'identità. Vedremo più avanti come verificare che sia questo il caso, quando avremo trovato un modo più pratico per rappresentare i coefficienti  $h_\nu^{(k)}$  e  $H_\nu^{(k)}$ . Infatti, già se confrontiamo le (87.25), (87.26) e (87.27) per  $k = 2$  con le analoghe (87.17) e (87.18) per  $k = 1$ , si vede che basta passare dal primo al secondo ordine per trovare espressioni più involute. Non c'è da stupirsi, quindi, se già agli ordini immediatamente successivi al secondo le espressioni si fanno ancora più complicate, al punto che, per esempio, occorrono pagine e pagine solo per scrivere esplicitamente i coefficienti fino all'ordine  $k = 10$ .

Quello che cercheremo di fare nel prossimo paragrafo è trovare un metodo sistematico per studiare i coefficienti di ordine arbitrario. In altre parole, ci proponiamo di scrivere i coefficienti di ordine  $k$  come somme sugli indici di Fourier di espressioni che si riescono a "controllare": con questo intendiamo che tali espressioni si riescono a scrivere come somme finite di addendi tali che ogni singolo addendo si stimi con una costante (dipendente da  $k$ ) moltiplicata per un fattore di decadimento esponenziale negli indici di Fourier che consenta di effettuare le somme su tali indici. In sostanza, quello che faremo è scrivere

$$h_\nu^{(k)} = \sum_{p=1}^k \sum_{\nu_1, \dots, \nu_p} \tilde{h}_p^{(k)}(\nu_1, \dots, \nu_p), \quad \tilde{h}_p^{(k)}(\nu_1, \dots, \nu_p) = \sum_{\alpha \in A_p} \bar{h}_p^{(k)}(\nu_1, \dots, \nu_p; \alpha),$$

dove  $A_p$  è un opportuno insieme finito di indici, e quindi stimare

$$\left| \bar{h}_p^{(k)}(\nu_1, \dots, \nu_p; \alpha) \right| \leq C(k) e^{-\xi_2(|\nu_1| + \dots + |\nu_p|)}, \quad (87.32)$$

uniformemente in  $\alpha$ , per un opportuno  $\xi_2 < \xi$ . La costante  $C(k)$  dipende anche da  $\xi_2$  e ha in generale una dipendenza non sommabile in  $k$ , il che impedisce la somma sugli indici di Taylor e

quindi la convergenza della serie perturbativa. Tuttavia il fattore di decadimento esponenziale in (87.32) è sufficiente a garantire la sommabilità sugli indici di Fourier e quindi l'analiticità in  $\psi$  delle funzioni  $h^{(k)}(\psi, J_0)$  e  $H^{(k)}(\psi, J_0)$ . Ne segue che le funzioni  $h^{(k)}(\psi, J_0)$  e  $H^{(k)}(\psi, J_0)$  sono ben definite e analitiche in  $\psi$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , e quindi le serie di Lindstedt sono anch'esse ben definite come serie formali.

## §88 Rappresentazione grafica della serie di Lindstedt



LA DISCUSSIONE DEL §87 FA VEDERE che, già ai primi ordini perturbativi, le espressioni analitiche dei coefficienti  $h_\nu^{(k)}$  e  $H_\nu^{(k)}$  risultano abbastanza pesanti (cfr. per esempio la (87.27) per  $k = 2$ ). Se vogliamo cercare di stimare come i coefficienti crescono al crescere di  $k$  dobbiamo quindi cercare un modo più pratico per controllare i singoli addendi delle espressioni (87.28) e (??).

### 88.1 Grafi e alberi

Iniziamo con il richiamare alcune definizioni di base della teoria dei grafi. Un *grafo*  $G$  è una coppia ordinata  $(V, L)$ , dove  $V = V(G)$  è un insieme di *punti* (o *vertici* o *nodi*) e  $L = L(G)$  è un insieme di coppie di elementi di  $V$ , chiamate *linee* (o *spigoli* o *rami*).

Se  $\ell = (v_1, v_2)$ , con  $v_1, v_2 \in V$ , si dice che

- $\ell$  unisce (o connette) i punti  $v_1$  e  $v_2$ ,
- i punti  $v_1$  e  $v_2$  sono *adiacenti*,
- $\ell$  è *incidente* con  $v_1$  e con  $v_2$ ,
- i punti  $v_1$  e  $v_2$  sono gli *estremi* di  $\ell$ .

Supporremo sempre che una linea sia costituita da punti distinti (si dice in tal caso che il grafo non ha *cappi*) e che ci sia una sola linea che unisce due punti adiacenti. Dato un punto  $v \in V(G)$ , il *grado* di  $v$  è il numero  $d(v)$  di punti in  $V(G)$  adiacenti a  $v$ . La linea che connette due punti è disegnata come un segmento che unisce i due punti.

Si definisce *ordine* del grafo  $G$  il numero di punti in  $V(G)$ . Un grafo si dice *orientato* se le sue linee sono coppie orientate: possiamo associare a ogni linea  $\ell$  di un grafo orientato una *freccia*, con la convenzione che la freccia punta da  $v$  a  $w$  se  $\ell = (w, v)$ . Si chiama *orientazione* di un grafo  $G$  l'assegnazione di un ordine nella coppia di punti che costituiscono ogni linea  $\ell \in L(G)$ . Un grafo orientato si può quindi ottenere da un grafo tramite un'opportuna orientazione (cfr. la figura 19.1).

Sia  $\mathcal{P} := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  un sottoinsieme di punti distinti in  $V(G)$  tali che  $v_i$  sia adiacente a  $v_{i+1}$  per  $i = 0, \dots, n-1$ . Diremo che  $\mathcal{P}$  è un *cammino* di lunghezza  $n$  che connette  $v_0$  con

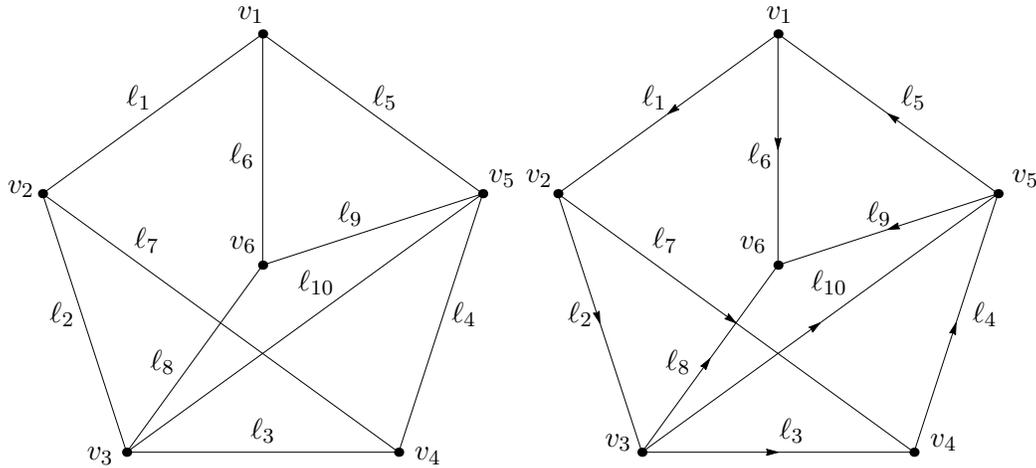


Figura 19.1: Un grafo di ordine 6 (a sinistra) e lo stesso grafo munito di un'orientazione (a destra).

$v_n$  e scriveremo  $L(\mathcal{P}) = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ , dove  $\ell_i = (v_{i-1}, v_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Se  $\mathcal{P} = \{v_0\}$  si ha  $L(\mathcal{P}) = \emptyset$ . Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia  $v, w \in V(G)$  esiste un cammino  $\mathcal{P}$  che connette  $v$  con  $w$ . Un *ciclo* è un insieme di punti  $\{v_0, \dots, v_{n+1}\}$  tali che  $\{v_0, \dots, v_n\}$  costituisce un cammino,  $v_n$  è adiacente a  $v_{n+1}$  e  $v_{n+1}$  coincide con  $v_0$  (così che le linee  $\ell_1 = (v_0, v_1)$  e  $\ell_{n+1} := (v_n, v_0)$  sono entrambe incidenti con  $v_0$ ). Un ciclo  $\{v_0, \dots, v_n, v_{n+1}\}$  di un grafo orientato si dice *orientato* se le frecce puntano tutte da  $v_i$  a  $v_{i+1}$  o tutte da  $v_{i+1}$  a  $v_i$  per  $i = 0, \dots, n$ , con  $v_{n+1} = v_0$ . Per esempio, con riferimento alla figura 19.1, l'insieme  $\{v_1, v_6, v_3\}$  costituisce un cammino  $\mathcal{P}$  e si ha  $L(\mathcal{P}) = \{\ell_6, \ell_8\}$ ; allo stesso modo, nel caso del grafo orientato,  $\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_1\}$  è un ciclo orientato.

Si dice che un grafo  $G$  è *aciclico* se non ha cicli, i.e. se per ogni coppia di punti distinti  $v, w \in V(G)$  esiste un unico cammino che connette  $v$  con  $w$ .

**Definizione 88.1** (GRAFO AD ALBERO) *Un grafo ad albero è un grafo connesso aciclico. Un grafo ad albero con radice è un grafo ad albero in cui sia stato evidenziato uno dei suoi punti, che prende il nome di punto privilegiato o radice.*

La presenza della radice induce un ordinamento tra i punti del grafo ad albero. Infatti, sia  $v_0$  la radice del grafo ad albero e siano  $v, w$  due punti del grafo, entrambi distinti da  $v_0$ . Diciamo che  $w \succ v$  se  $w$  si trova lungo il cammino (unico) che connette  $v$  con  $v_0$ ; indichiamo in tal caso con  $\mathcal{P}(v, w)$  il cammino che connette i due nodi  $v$  e  $w$ . Scriviamo inoltre  $w \succeq v$  se  $w \succ v$  o  $w = v$ . La relazione  $\succeq$  definisce una relazione di ordinamento parziale. Per evidenziare l'ordinamento parziale tra i punti del grafo ad albero immaginiamo di sovrapporre una freccia a ogni linea, con la convenzione che la freccia punti nella direzione della radice. In questo modo il grafo ad albero diventa un grafo orientato, che chiamiamo *grafo ad albero orientato* (cfr. la figura 19.2).

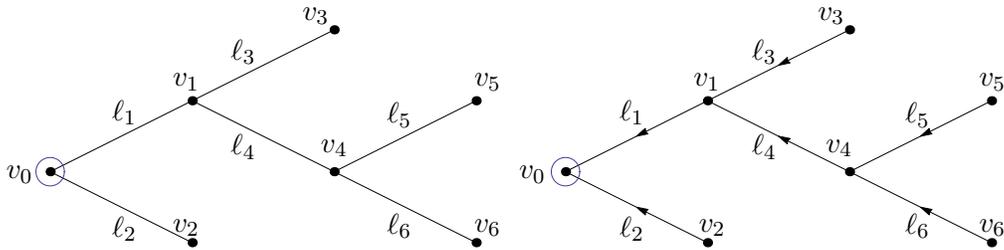


Figura 19.2: Un grafo ad albero di ordine 7 (a sinistra) e il grafo orientato corrispondente (a destra).

Nel seguito, per i grafici ad albero con radice orientati, risulterà conveniente modificare leggermente le definizioni rispetto a quella appena date.

**Definizione 88.2 (ALBERO)** *Dato un grafo ad albero con radice orientato  $G$ , all'insieme delle sue linee  $L(G)$  aggiungiamo un'ulteriore linea  $\ell_0$ , incidente con il punto privilegiato  $v_0$ . Chiamiamo linea della radice la linea  $\ell_0$  e radice dell'albero l'altro estremo  $r$  di  $\ell_0$ ; la freccia associata a  $\ell_0$  punta da  $v_0$  a  $r$ . Chiamiamo albero il grafo orientato  $\theta$  così ottenuto e, per consistenza, chiamiamo nodi i punti dell'albero distinti da  $r$  e rami le sue linee; in particolare, chiamiamo  $\ell_0$  ramo della radice.*

Un esempio di albero è rappresentato nella figura 19.3. Si noti che, a differenza di quanto avviene per i grafi ad albero, negli alberi distinguiamo tra il punto privilegiato  $v_0$  e la radice  $r$  (in particolare la radice  $r$  di un albero non coincide con la radice  $v_0$  del grafo ad albero da cui si ottiene aggiungendo la linea  $\ell_0$ ). Per costruzione,  $V(\theta) := V(G)$  è l'insieme dei nodi di  $\theta$  e  $L(\theta) := L(G) \cup \{\ell_0\}$  l'insieme dei rami di  $\theta$ . Quindi il ramo della radice è contato tra i rami dell'albero, mentre la radice stessa non è contata tra i nodi dell'albero. Un albero è un esempio di *grafo planare*, i.e. di un grafo che può essere disegnato sul piano in modo tale che le sue linee si intersechino solo agli estremi. Disegneremo gli alberi collocando sempre la radice a sinistra e i rami disposti in modo che le frecce puntino da destra a sinistra.

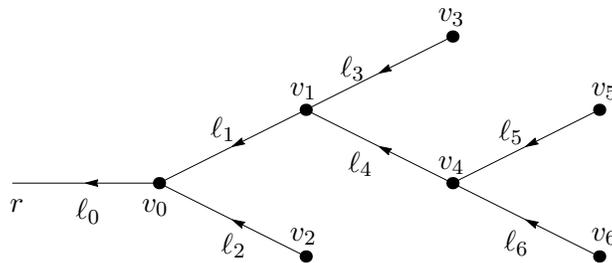


Figura 19.3: Albero ottenuto dal grafo ad albero orientato della figura 19.2 aggiungendo la linea  $\ell_0$ .

**Osservazione 88.3** Di solito nei testi di teoria dei grafi i termini “albero” e “grafo ad albero” sono usati come sinonimi, nel senso della definizione 88.1. Noi abbiamo distinto tra le due nozioni perché nel seguito lavoreremo esclusivamente con gli alberi della definizione 88.2, nonostante essa non sia la definizione canonica.

Il nodo privilegiato  $v_0$  sarà anche chiamato *ultimo nodo* o *nodo finale* dell'albero, dal momento che  $v_0 \succeq v \forall v \in V(\theta)$ . Per ogni nodo  $v \in V(\theta)$  si ha  $d(v) \geq 1$ . Vista la relazione d'ordinamento tra i nodi dell'albero, per ogni nodo possiamo distinguere tra linee entranti e linee uscenti: si dirà che una linea  $\ell$  entra nel nodo  $v$  se  $\ell = (v, w)$  per qualche  $w \prec v$  e che esce dal nodo  $v$  se, invece, si ha  $\ell = (w, v)$  per qualche  $w \succ v$ ; per esempio, nel caso dell'albero della figura 19.3, la linea  $\ell_2$  entra nel nodo  $v_0$  ed esce dal nodo  $v_2$ . Ogni nodo  $v$  ha una e una sola linea uscente, mentre può avere un numero qualsiasi di linee entranti; più esattamente, se  $m(v)$  indica il numero di linee entranti nel nodo  $v$  si ha  $d(v) = m(v) + 1$ , con  $m(v) \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ , se  $n$  è il numero di punti dell'albero. Un nodo  $v$  con  $m(v) = 0$  si chiamerà *foglia*; per esempio, nell'albero della figura 19.3, i nodi  $v_2, v_3, v_5$  e  $v_6$  sono foglie.

**Osservazione 88.4** Strettamente parlando, un albero  $\theta$  non è un grafo in accordo con la definizione data all'inizio del paragrafo, poiché  $V(\theta)$  non include l'estremo  $r$  della linea della radice. Tuttavia, un vantaggio della definizione appena data è che, per costruzione, un albero di ordine  $n$  ha  $n$  nodi e  $n$  rami. Inoltre c'è una corrispondenza biunivoca tra nodi e rami: ogni ramo può essere individuato specificando il nodo da cui esce. Scriveremo  $\ell = \ell_v$  se  $\ell$  esce dal nodo  $v$  e indicheremo con  $\pi(v)$  il nodo (unico) immediatamente successivo a  $v$ ; quindi  $\ell_v = (\pi(v), v)$ . Se  $v = v_0$  è l'ultimo nodo di  $\theta$  scriveremo  $\pi(v_0) = r$  anche se  $r$  non è un nodo. In un albero  $\theta$  ogni suo nodo  $v \in V(\theta)$ ,  $v \prec v_0$ , si può vedere come il nodo privilegiato di un albero  $\theta_v$  costituito dai nodi  $w \preceq v$ , dai rami che li uniscono e dal ramo  $\ell_v$  che esce dal nodo  $v$ . L'albero  $\theta_v$  costituisce un *sottoalbero* di  $\theta$  e la linea  $\ell_v$  è il ramo della radice di  $\theta_v$ . Ovviamente il punto  $\pi(v)$  è un nodo di  $\theta$ , mentre costituisce la radice di  $\theta_v$ .

**Lemma 88.5** Sia  $\theta$  un albero con  $n$  nodi. Si ha

$$\sum_{v \in V(\theta)} m(v) = n - 1.$$

*Dimostrazione.* Un albero con  $n$  nodi ha anche  $n$  rami. Uno di essi è il ramo della radice. Ognuno dei restanti  $n - 1$  rami entra in un solo nodo. Perciò, al fine di contare tali rami, possiamo contare per ogni nodo  $v \in V(\theta)$  il numero  $m(v)$  di rami che entrano in quel nodo e sommare  $m(v)$  sui nodi  $v$  dell'albero. ■

**Lemma 88.6** Il numero di alberi che abbiano  $n$  nodi è stimato da  $2^{2^n}$ .

*Dimostrazione.* Dato un albero  $\theta$ , immaginiamo di muoverci lungo l'albero partendo dalla radice e mantenendoci sempre a sinistra dei rami. Ci muoviamo quindi verso destra finché non

raggiungiamo una foglia dell'albero. A questo punto torniamo indietro finché non raggiungiamo un nodo  $w$  con  $m(w) > 1$ . Se questo non avviene, torniamo alla radice, altrimenti, raggiunto il nodo  $w$ , cambiamo direzione ancora un volta e ci muoviamo in avanti fino a raggiungere una seconda foglia. E così via finché non ritorniamo alla radice dell'albero. Il percorso che abbiamo seguito in questo modo può essere rappresentato come una sequenza di  $2n$  segni  $\pm$ : ogni volta che ci muoviamo lungo un ramo da sinistra a destra segniamo  $+$  e ogni volta che ci muoviamo da destra a sinistra segniamo  $-$ . Si veda la figura 19.4: la sequenza di segni che corrisponde all'albero della figura 19.3 è  $\{+, +, +, -, +, +, -, +, -, -, -, +, -, -\}$ .

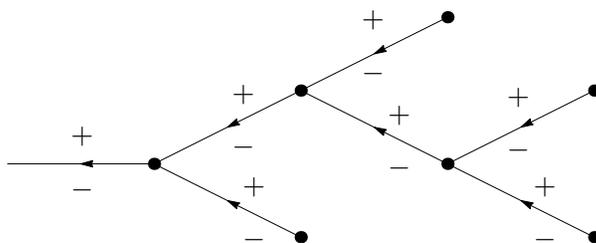


Figura 19.4: Segni associati ai rami dell'albero orientato della figura 19.3.

Una *passeggiata aleatoria* è un percorso in cui a ogni passo ci si muove in una direzione casuale. Supponiamo che ci si muova lungo una retta, partendo da un punto fissato  $O$  (che assumeremo come origine), e che a ogni passo ci si sposti di un tratto  $L$  o verso destra o verso sinistra; si ha in tal caso una *passeggiata aleatoria unidimensionale*. Una passeggiata aleatoria unidimensionale di  $k$  passi è un percorso descritto muovendosi lungo la retta di  $k$  passi; la posizione raggiunta alla fine del percorso è  $(D - S)L$ , dove  $D$  è il numero di passi verso destra e  $S = k - D$  il numero di passi verso sinistra. Poiché a ogni passo ci sono due possibili direzioni possibili, il numero totale di passeggiate aleatorie unidimensionali di  $k$  passi è dato da  $2^k$ . Una passeggiata aleatoria unidimensionale di  $k$  passi si può rappresentare come una sequenza di  $k$  segni  $\pm$ : a ogni passo si segna  $+$  se ci si muove verso destra e  $-$  se ci si muove verso sinistra.

Ne segue che il numero di sequenze di segni  $\pm$  che si può associare a un albero  $\theta$  con  $n$  nodi è stimato dal numero di passeggiate aleatorie unidimensionali di  $2n$  passi. Infatti a ogni albero con  $n$  nodi corrisponde una sequenza di  $2n$  segni  $\pm$  e quindi una passeggiata aleatoria unidimensionale. La corrispondenza ovviamente non è biunivoca; infatti non è detto che ogni passeggiata aleatoria di  $2n$  passi rappresenti un albero con  $n$  nodi (cfr. l'esercizio 71). Tuttavia, a ogni albero con  $n$  nodi corrisponde una passeggiata aleatoria unidimensionale di  $2n$  passi, quindi il numero di alberi di con  $n$  nodi è stimato da  $2^{2n}$ . ■

Un albero si dice *etichettato* se a ogni suo nodo e a ogni suo ramo sono associati degli indici (*etichette*). Nel caso dell'albero della figura 19.3, ai nodi sono associate le etichette  $v_0, v_1, \dots, v_6$  (una per nodo) e ai rami le etichette  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_6$  (una per ramo).

Ovviamente c'è una notevole arbitrarietà nel modo in cui possiamo disegnare un albero. Se

immaginiamo di disegnare l'albero in un piano, la posizione dei nodi sul piano non è rilevante. Di conseguenza anche la lunghezza dei rami e gli angoli che essi formano rispetto a una direzione prefissata non è importante. Tuttavia, questo lascia ancora una certa arbitrarietà; per esempio gli alberi rappresentati nella figura 19.5, in base alle definizioni date, sono uguali tra loro, in quanto hanno gli stessi nodi (e quindi gli stessi rami).

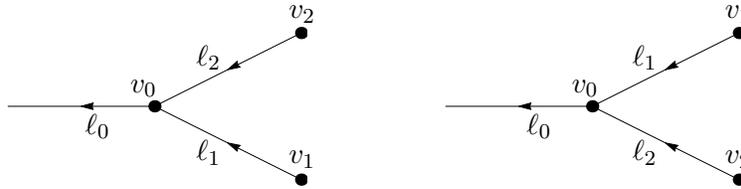


Figura 19.5: Esempio di due alberi non equivalenti (a meno che non si abbia  $v_1 = v_2$  e  $l_1 = l_2$ ).

In realtà, nell'applicazione allo studio delle serie di Lindstedt, vorremmo considerare distinti i due alberi nella figura 19.5. A tal fine, introduciamo una relazione di equivalenza tra alberi.

**Definizione 88.7** (ALBERI EQUIVALENTI) *Diremo che due alberi sono equivalenti se si possono ottenere l'uno dall'altro deformando le linee con continuità senza che queste si attraversino. Più in generale, due alberi etichettati si dicono equivalenti se si possono ottenere uno dall'altro mediante una deformazione continua dei rami, senza che questi si attraversino, in modo tale che nodi e rami coincidano insieme alle loro etichette. Dati due alberi equivalenti  $\theta$  e  $\theta'$ , due nodi  $v \in V(\theta)$  e  $v' \in V(\theta')$  si dicono omologhi se vengono a coincidere quando  $\theta'$  sia stato deformato fino a sovrapporsi a  $\theta$ .*

In base alla definizione 88.1, i due alberi della figura 19.5 non sono equivalenti se le etichette sono diverse (i.e.  $v_1 \neq v_2$  o  $l_1 \neq l_2$ ), poiché, per ottenere il secondo dal primo, dobbiamo ruotare le linee  $l_1$  e  $l_2$  in modo che si attraversino e si scambino di posto. Se invece le etichette sono tali che  $v_1 = v_2$  e  $l_1 = l_2$ , allora i due alberi sono equivalenti e i loro nodi sono a due a due omologhi tra loro ( $v_0$  con  $v_0$  e ciascuna foglia di un albero con una foglia dell'altro). Inoltre, in tal caso, anche i due sottoalberi che entrano in  $v_0$  sono equivalenti tra loro.

**Osservazione 88.8** Vedremo più in là che assoceremo ai nodi e ai rami degli alberi una serie più complessa di etichette di quelle considerate finora. Più precisamente assegneremo etichette a ogni nodo  $v \in V(\theta)$  e a ogni ramo  $l \in L(\theta)$ , secondo regole che saranno date più avanti (cfr. le definizioni 88.9 e 88.11). Gli indici  $v$  e  $l$  dovranno quindi essere considerati solo indici usati per identificare nodi e rami, mentre, se considerare o no equivalenti due alberi dipenderà dalle etichette associate ai loro nodi e alle loro linee. Per esempio i due alberi della figura 19.5, posto che abbiano le stesse etichette associate al nodo  $v_0$  e al ramo  $l_0$ , saranno considerati equivalenti se i nodi  $v_1$  e  $v_2$  e i rami  $l_1$  e  $l_2$  del secondo albero hanno le stesse etichette dei nodi  $v_1$  e  $v_2$  e dei rami  $l_1$  e  $l_2$ , rispettivamente, del primo albero, oppure se il nodo  $v_1$  e il ramo  $l_1$  del primo albero hanno le stesse etichette del nodo  $v_2$  e del ramo  $l_2$ , rispettivamente, del

secondo albero e, viceversa, il nodo  $v_2$  e il ramo  $\ell_2$  del primo albero hanno le stesse etichette del nodo  $v_1$  e del ramo  $\ell_1$ , rispettivamente, del secondo albero.

## 88.2 Regole grafiche e costruzione degli alberi etichettati

Ci proponiamo di rappresentare i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$  e  $h_\nu^{(k)}$  in termini di alberi. Questo vuol dire che daremo delle regole per associare a ogni albero  $\theta$  un valore numerico  $\text{Val}(\theta)$  e scriveremo i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$  e  $h_\nu^{(k)}$  come somme sugli alberi di tali valori numerici.

Come discusso nel §87.3, cercheremo soluzioni  $h$  e  $H$  della forma (87.8), con coefficienti  $H_\nu^{(k)}$  e  $h_\nu^{(k)}$  dati ricorsivamente dalle (87.28) per  $\nu \neq 0$ , mentre  $H_0^{(k)}$  è determinato dalla (87.30) e, come anticipato,  $h_0^{(k)}$  è scelto nullo per ogni  $k \geq 1$  (ovviamente dovremmo poi verificare che anche la (87.29) sia soddisfatta). Questo suggerisce di porre

$$H(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \mu(J_0) + \tilde{H}(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0)$$

e riscrivere le (87.8) come

$$h(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} h_\nu^{(k)}, \quad (88.1a)$$

$$\tilde{H}(\varphi_0 + \omega_0 t, J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} e^{i\langle \nu, \varphi_0 + \omega_0 t \rangle} H_\nu^{(k)}, \quad (88.1b)$$

$$\mu(J_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mu^{(k)}, \quad (88.1c)$$

dove abbiamo usato che le funzioni  $h$  e  $\tilde{H}$  non contengono termini costanti nel loro sviluppo di Fourier. Si noti che, con le notazioni (87.30), si ha  $\mu^{(k)} = H_0^{(k)}$ .

Il primo passo è di associare a ogni nodo e ramo di un albero delle etichette, in accordo con le regole che ora daremo.

**Definizione 88.9** (ETICHETTE DEI NODI) *Dato un albero  $\theta$ , a ogni nodo  $v \in V(\theta)$  associamo le seguenti etichette:*

1. il grado  $d_v$ , che indica il numero di nodi del sottoalbero che ha  $v$  come nodo privilegiato;
2. l'ordine  $\delta_v \in \{0, 1\}$ ;
3. l'etichetta  $k_v$ , che definisce l'ordine del sottoalbero  $\theta_v$ , data da

$$k_v := \sum_{\substack{w \in V(\theta) \\ w \preceq v}} \delta_w;$$

4. il modo  $\nu_v \in \mathbb{Z}^n$ ;
5. due etichette  $\zeta_v^1$  e  $\zeta_v^2$ , che assumono i valori simbolici  $h, H, \mu$ .

Definiamo il grado  $d$  e l'ordine  $k$  di  $\theta$  ponendo  $d = d_{v_0}$  e  $k = k_{v_0}$ , dove  $v_0$  è l'ultimo nodo di  $\theta$ .

Definiamo inoltre gli insiemi

$$P_v = \{w \in V(\theta) : \pi(w) = v \text{ e } \zeta_w^1 = h\}, \quad Q_v = \{w \in V(\theta) : \pi(w) = v \text{ e } \zeta_w^1 = H, \mu\},$$

e poniamo  $p_v = |P_v|$  e  $q_v = |Q_v|$ ; quindi  $p_v$  e  $q_v$  indicano il numero di rami che entrano in  $v$  e che escono da nodi  $w$  con etichetta  $\zeta_w^1 = h$  e, rispettivamente, il numero di rami che entrano in  $v$  e che escono da nodi  $w$  con etichetta  $\zeta_w^1 \in \{H, \mu\}$ . Infine poniamo  $m_v := p_v + q_v$ .

**Osservazione 88.10** Si noti che  $m_v$  non è il grado del nodo  $v$  come definito a pag. 396 (i.e. il numero di rami incidenti con  $v$ ), ma è il numero di rami entranti in  $v$ . Allo stesso modo, l'ordine  $k$  di un albero  $\theta$ , secondo la definizione 88.9, non è il numero di nodi di  $\theta$ , quindi non coincide con la definizione data nel §87. Il motivo per cui stiamo cambiando definizione di ordine è che, come vedremo, i coefficienti delle funzioni (88.1) con ordine di Taylor  $k$  si esprimono in termini di alberi che hanno ordine  $k$ , indipendentemente dal numero dei loro nodi, quindi è naturale definire l'ordine di un albero come somma degli ordini dei nodi.

**Definizione 88.11** (ETICHETTE DEI RAMI) *Dato un albero  $\theta$ , a ogni ramo  $\ell \in L(\theta)$  associamo le seguenti etichette:*

1. il momento  $\nu_\ell$ , definito come

$$\nu_\ell := \sum_{\substack{w \in V(\theta) \\ w \preceq v}} \nu_w, \quad (88.2)$$

se  $v$  è il nodo da cui esce  $\ell$  (i.e.  $\ell = \ell_v$ );

2. due etichette  $\zeta_\ell^1$  e  $\zeta_\ell^2$ , che assumono i valori simbolici  $h, H, \mu$ .

In accordo con il valore delle sue etichette, diremo che un ramo  $\ell$  è di tipo  $\zeta_\ell^1 \leftarrow \zeta_\ell^2$ . Le etichette associate ai nodi e ai rami degli alberi non possono essere scelte in modo arbitrario. Infatti, perché i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$  e  $h_\nu^{(h)}$  siano rappresentabili in termini di alberi, dobbiamo imporre che le etichette soddisfino delle relazioni di compatibilità, oltre alla (88.2).

**Definizione 88.12** (VINCOLI SULLE ETICHETTE) *Dato un albero  $\theta$ , sussistono i seguenti vincoli sui valori che le etichette dei nodi e dei rami possono assumere:*

1. se  $\ell = \ell_v$ , si ha  $\zeta_\ell^1 = \zeta_v^1$  e  $\zeta_\ell^2 = \zeta_v^2$ ;
2. sono possibili solo rami di tipo  $\mu \leftarrow H$ ,  $h \leftarrow H$ ,  $H \leftarrow h$  e  $h \leftarrow h$  (ovvero non esistono rami di tipo  $\mu \leftarrow h$ ,  $H \leftarrow H$ ,  $H \leftarrow \mu$ ,  $h \leftarrow \mu$  e  $\mu \leftarrow \mu$ );

3. se  $\ell_v$  è di tipo  $h \leftarrow h$  o  $H \leftarrow h$ , si ha  $\delta_v = 1$ ;
4. se  $\delta_v = 0$ , il ramo  $\ell_v$  è di tipo  $h \leftarrow H$  o  $\mu \leftarrow H$ ,  $p_v = 0$  e  $q_v \geq 2$ ;
5. si ha  $\nu_\ell \neq 0$  se  $\zeta_\ell^1 = h, H$  e  $\nu_\ell = 0$  se  $\zeta_\ell^1 = \mu$ .

Nel seguito chiameremo *alberi etichettati* gli alberi a cui siano state associate le etichette dei nodi e dei rami, consistentemente con le definizioni 88.9 e 88.11 e in modo tale da soddisfare i vincoli della definizione 88.12.

**Lemma 88.13** *Per ogni nodo  $v$  si ha  $d_v \leq 2k_v - 1$ . In particolare se  $\theta$  è un albero di ordine  $k$  che ha  $d$  nodi, si ha  $d \leq 2k - 1$ .*

*Dimostrazione.* Si procede per induzione sul grado. Se  $d_v = 1$  si ha  $\delta_v = 1$  (come conseguenza del vincolo 4 nella definizione 88.12) e quindi  $k_v = 1$ , così che  $d_v = 2k_v - 1 = 1$ . Se  $d_v \geq 2$ , si ha  $m_v \geq 1$ . Siano  $v_1, \dots, v_{m_v}$  i nodi che precedono immediatamente  $v$ , i.e. tali che  $\pi(v_1) = \dots = \pi(v_{m_v}) = v$ . Per l'ipotesi induttiva si ha

$$d_v = 1 + \sum_{i=1}^{m_v} d_{v_i} \leq 1 + \sum_{i=1}^{m_v} (2k_{v_i} - 1) = 1 + 2(k_{v_1} + \dots + k_{v_{m_v}}) - m_v. \quad (88.3)$$

D'altra parte si ha

$$k_v = \delta_v + k_{v_1} + \dots + k_{v_{m_v}}, \quad (88.4)$$

così che, unendo le (88.3) e (88.4), si ottiene

$$d_v \leq 2k_v - (2\delta_v + m_v - 1).$$

Se  $\delta_v = 1$  si ha  $2\delta_v + m_v - 1 \geq m_v + 1 \geq 1$ ; se invece  $\delta_v = 0$  si ha  $m_v = q_v \geq 2$ , che implica  $2\delta_v + m_v - 1 \geq m_v - 1 \geq 1$ . Quindi in entrambi i casi si ha  $d_v \leq 2k_v - 1$ . ■

Vogliamo ora associare dei valori numerici ai rami e dei tensori ai nodi degli alberi, in funzione dei valori delle rispettive etichette.

**Definizione 88.14** (PROPAGATORE) *A ogni ramo  $\ell$  con  $\nu_\ell \neq 0$  associamo un propagatore*

$$g_\ell = \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu_\ell \rangle^{R_\ell}}, \quad R_\ell = \begin{cases} 1, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } h \leftarrow H \text{ o di tipo } H \leftarrow h, \\ 2, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } h \leftarrow h. \end{cases}$$

Se  $\nu_\ell = 0$  (e quindi  $\ell$  è di tipo  $\mu \leftarrow H$ ), poniamo  $R_\ell = 0$  e  $g_\ell = 1$ .

**Definizione 88.15** (OPERATORE DI UN RAMO) *A ogni ramo  $\ell = (v', v)$ , con  $v' = \pi(v)$ , che non sia il ramo della radice, associamo un operatore*

$$O_\ell = \begin{cases} \langle i\nu_{v'}, -iT(J_0)\nu_v \rangle, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ \langle i\nu_{v'}, \frac{\partial}{\partial J_v} \rangle, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ \langle \frac{\partial}{\partial J_{v'}}, -i\nu_v \rangle, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \\ \langle \frac{\partial}{\partial J_{v'}}, -(T(J_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial J_v} \rangle, & \text{se } \ell \text{ è di tipo } \mu \leftarrow H, \end{cases}$$

dove la matrice invertibile  $T(J_0)$  è definita in (87.31). Al ramo della radice  $\ell_0 = (r, v_0)$  associamo l'operatore

$$O_{\ell_0} = \begin{cases} -iT(J_0)\nu_{v_0}, & \text{se } \ell_0 \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ \frac{\partial}{\partial J_{v_0}}, & \text{se } \ell_0 \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ -i\nu_{v_0}, & \text{se } \ell_0 \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \\ -(T(J_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial J_{v_0}}, & \text{se } \ell_0 \text{ è di tipo } \mu \leftarrow H. \end{cases}$$

Il significato delle derivate che compaiono nella definizione degli operatori associati ai rami è il seguente. Associamo a ogni nodo  $v \in V(\theta)$  una funzione

$$\Phi_{\nu_v}(J_v) = \begin{cases} V_{\nu_v}(J_v), & \text{se } \delta_v = 1, \\ \mathcal{H}_0(J_v), & \text{se } \delta_v = 0, \end{cases} \quad (88.5)$$

e consideriamo la quantità

$$\left( \prod_{\ell \in L(\theta)} O_\ell \right) \left( \prod_{v \in V(\theta)} \Phi_v(J_v) \right). \quad (88.6)$$

Dopo aver derivato rispetto alle variabili  $J_v$ , poniamo  $J_v = J_0 \forall v \in V(\theta)$ . Nell'operatore  $O_\ell$  della definizione 88.15, le derivate  $\partial/\partial J_v$  agiscono sulla funzione  $\Phi_{\nu_v}(J_v)$  associata al nodo  $v$ , mentre le derivate  $\partial/\partial J_{v'}$  agiscono sulla funzione  $\Phi_{\nu_{v'}}(J_{v'})$  associata al nodo  $v'$ .

**Osservazione 88.16** L'operatore  $O_\ell$  è uno scalare se  $\ell \neq \ell_0$  (i.e. se  $\ell$  non è il ramo della radice), mentre è un vettore se  $\ell = \ell_0$ . Quindi la (88.6) è un vettore.

**Definizione 88.17** (FATTORE DI UN NODO) *Definiamo*

$$D_v := \begin{cases} -iT(J_0)\nu_v, & \text{se } \ell_v \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ \frac{\partial}{\partial J}, & \text{se } \ell_v \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ -i\nu_v, & \text{se } \ell_v \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \\ -i(T(J_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial J}, & \text{se } \ell_v \text{ è di tipo } \mu \leftarrow H. \end{cases}$$

A ogni nodo  $v$  associamo il fattore  $F_v$ , dove

$$F_v = \begin{cases} D_v (i\nu_v)^{p_v} \frac{\partial^{q_v}}{\partial J^{q_v}} V_{\nu_v}(J_0), & \text{se } \delta_v = 1, \\ D_v (i\nu_v)^{p_v} \frac{\partial^{q_v}}{\partial J^{q_v}} \mathcal{H}_0(J_0), & \text{se } \delta_v = 0, \end{cases}$$

Si noti che  $F_v$  è un tensore con  $m_v + 1$  indici che variano nell'insieme  $\{1, \dots, n\}$ .

**Lemma 88.18** Dato un albero etichettato  $\theta$ , possiamo scrivere la (88.6) calcolata a  $J_v = J_0$  come un prodotto

$$\prod_{v \in V(\theta)} F_v, \quad (88.7)$$

dove gli indici dei tensori  $F_v$  vanno contratti in accordo con la definizione 88.15.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla (88.6) tenendo conto dell'espressione esplicita degli operatori  $O_\ell$  dei rami  $\ell \in L(\theta)$ .  $\blacksquare$

Sia  $D(\rho, \xi, J_0)$  il dominio definito in (84.2). Poniamo

$$E := \max\left\{ \max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi, J_0)} |V(\varphi, J)|, \max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi, J_0)} |\mathcal{H}_0(J)| \right\}, \quad (88.8)$$

Introduciamo inoltre  $\beta$  tale che

$$\beta^{-1} \leq \|T(J_0)\| \leq \beta$$

e poniamo

$$\beta_0 := \max\{\beta, 1\}, \quad \rho_0 := \min\{\rho, 1\}, \quad \xi_0 := \min\{\xi, 1\}. \quad (88.9)$$

Si noti che  $\beta_0$  è finito per le ipotesi su  $\mathcal{H}_0$ .

**Lemma 88.19** Sia  $\theta$  un albero etichettato di ordine  $k$ . Si ha, per ogni  $\xi_3 \in (0, \xi_0)$ ,

$$\left| \prod_{v \in V(\theta)} F_v \right| \leq \left( \frac{\beta_0 E n}{\xi_3^2 \rho_0^2} \right)^{2k} \prod_{v \in V(\theta)} e^{-(\xi - \xi_3)|\nu_v|} (m_v + 1)!.$$

*Dimostrazione.* Il vettore (88.7) si ottiene contraendo gli indici dei tensori  $F_v$ . Se si tiene conto della definizione di  $O_\ell$  si vede che ogni contrazione corrisponde a una somma su un indice che varia da 1 a  $n$  (corrispondente a un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ ). Poiché c'è una somma per ogni ramo e un albero di ordine  $k$  ha al più  $2k - 1$  rami (cfr. il lemma 88.13), possiamo stimare

$$\left| \prod_{v \in V(\theta)} F_v \right| \leq n^{2k} \prod_{v \in V(\theta)} \|F_v\|_\infty,$$

dove  $\|F_v\|_\infty := \max\{(F_v)_{i_1, \dots, i_{m_v+1}} : i_1, \dots, i_{m_v+1} = 1, \dots, n\}$  indica il massimo dei moduli degli elementi del tensore  $F_v$ . Per ogni nodo  $v \in V(\theta)$ , indicando al solito con  $\delta_{i,j}$  il simbolo di Kronecker (cfr. pag. 4), si ha

$$\|F_v\|_\infty \leq \beta_0 |\nu_v|^{p_v + \delta_{\zeta_v^2, h}} (q_v + \delta_{\zeta_v^2, H})! \rho^{-(q_v + \delta_{\zeta_v^2, H})} e^{-\xi |\nu_v|} E,$$

dove abbiamo usato la (84.4) (e il fatto che  $\Phi \leq E$ ) per stimare  $V_\nu(J_0)$  e il teorema di Cauchy per stimare le derivate rispetto a  $J$  delle funzioni  $V_\nu$  e  $\mathcal{H}_0$  in  $J = J_0$  (cfr. l'esercizio 51):

$$\max_{\substack{q_1, \dots, q_n \geq 0 \\ q_1 + \dots + q_n = q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial J_1^{q_1} \dots \partial J_n^{q_n}} V_\nu(J_0) \right| \leq q! \rho^{-q} E, \quad \max_{\substack{q_1, \dots, q_n \geq 0 \\ q_1 + \dots + q_n = q}} \left| \frac{\partial^q}{\partial J_1^{q_1} \dots \partial J_n^{q_n}} \mathcal{H}_0(J_0) \right| \leq q! \rho^{-q} E.$$

Tenendo conto che

- $|\nu_v|^{p_v} e^{-\xi |\nu_v|} \leq p! \xi_3^{-p} e^{\xi_3 |\nu_v|} e^{-\xi |\nu_v|} \leq p! \xi_3^{-p} e^{-(\xi - \xi_3) |\nu_v|}$  (cfr. l'esercizio 6),
- $p_v + \delta_{\zeta_v^2, h} + q_v + \delta_{\zeta_v^2, H} = m_v + 1$ ,
- $k_1! k_2! \leq (k_1 + k_2)!$  per ogni  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  (cfr. l'esercizio 72),
- $\sum_{v \in V(\theta)} (p_v + \delta_{\zeta_v^2, h} + q_v + \delta_{\zeta_v^2, H}) \leq \sum_{v \in V(\theta)} (m_v + 1) \leq 4k$  (per i lemmi 88.5 e 88.13),

possiamo stimare

$$\begin{aligned} & \prod_{v \in V(\theta)} |\nu_v|^{p_v + \delta_{\zeta_v^2, h}} (q_v + \delta_{\zeta_v^2, H})! \rho^{-(q_v + \delta_{\zeta_v^2, H})} e^{-\xi |\nu_v|} \\ & \leq \xi_3^{-4k} \rho_0^{-4k} \prod_{v \in V(\theta)} (p_v + \delta_{\zeta_v^2, h})! (q_v + \delta_{\zeta_v^2, H})! e^{-(\xi - \xi_3) |\nu_v|} \\ & \leq \xi_3^{-4k} \rho_0^{-4k} \prod_{v \in V(\theta)} (m_v + 1)! e^{-(\xi - \xi_3) |\nu_v|} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che  $\xi_3$  e  $\rho_0$  sono minori di 1 per ottenere il fattore  $\xi_3^{-4k} \rho_0^{-4k}$ . ■

**Definizione 88.20** (VALORE DI UN ALBERO) *Dato un albero etichettato  $\theta$ , il vettore*

$$\text{Val}(\theta) := \left( \prod_{v \in V(\theta)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left( \prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell \right)$$

definisce il valore di  $\theta$ .

Indichiamo con  $\mathcal{T}_{k, \nu, \zeta}$  l'insieme di tutti gli alberi etichettati non equivalenti di ordine  $k$  tali che  $\nu_{\ell_0} = \nu$  e  $\zeta_{\ell_0}^1 = \zeta$ , se  $\ell_0$  è il ramo della radice.

**Osservazione 88.21** A causa dei vincoli della definizione 88.12 gli indici  $\nu$  e  $\zeta$  in  $\mathcal{T}_{k, \nu, \zeta}$  non sono indipendenti: si ha  $\nu = 0$  se e solo se  $\zeta = \mu$  (e di conseguenza  $\nu \neq 0$  se e solo se  $\zeta = h, H$ ).

### 88.3 Rappresentazione dei coefficienti in termini di alberi etichettati

Il seguente risultato fornisce il legame tra gli sviluppi perturbativi studiati nel §87.3 e gli alberi etichettati che abbiamo introdotto nel §88.2.

**Lemma 88.22** *Supponiamo che la (87.29) sia soddisfatta per ogni  $k \geq 1$ . Allora, per ogni  $k \geq 1$  e per ogni  $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ , si ha*

$$h_\nu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,h}} \text{Val}(\theta), \quad H_\nu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,H}} \text{Val}(\theta), \quad \mu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,0,\mu}} \text{Val}(\theta). \quad (88.10)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può fare per induzione sull'ordine  $k$ .

- Se  $k = 1$  i coefficienti  $h_\nu^{(1)}$ ,  $H_\nu^{(1)}$  e  $\mu^{(1)} = H_0^{(1)}$  sono dati dalle (87.21c), (87.21b) e (87.21a), rispettivamente. In base alle regole date,  $\mathcal{T}_{k,\nu,H}$  contiene solo l'albero  $\theta_0$ , costituito dal nodo  $v_0$  e dal ramo della radice  $\ell_0$  che esce da  $v_0$ , e le etichette del nodo  $v_0$  sono  $\nu_{v_0} = \nu$ ,  $\delta_{v_0} = 1$ ,  $\zeta_{v_0}^1 = H$  e  $\zeta_{v_0}^2 = h$ , così che il ramo della radice  $\ell_0$  è di tipo  $H \leftarrow h$  e il suo momento è  $\nu_{\ell_0} = \nu$  (cfr. la figura 19.6).

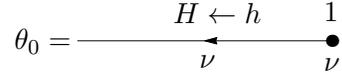


Figura 19.6: Albero  $\theta_0$  in  $\mathcal{T}_{1,\nu,H}$ .

Si ha quindi (cfr. la (87.21b))

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{1,\nu,H}} \text{Val}(\theta) = \text{Val}(\theta_0) = F_{v_0} g_{\ell_0} = (-i\nu) V_\nu \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle} = H_\nu^{(1)}.$$

Analogamente  $\mathcal{T}_{1,\nu,h}$  contiene due alberi  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , costituiti entrambi dal nodo  $v_0$  e dal ramo della radice  $\ell_0$ , tali che  $\nu_{v_0} = \nu_{\ell_0} = \nu$ . In entrambi gli alberi si ha  $\delta_{v_0} = 1$  e  $\zeta_{v_0}^1 = h$ , mentre  $\zeta_{v_0}^2 = h$  in  $\theta_1$  e  $\zeta_{v_0}^2 = H$  in  $\theta_2$ , così che il ramo della radice è di tipo  $h \leftarrow h$  in  $\theta_1$  e  $h \leftarrow H$  in  $\theta_2$  (cfr. la figura 19.7).

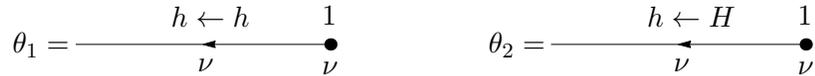


Figura 19.7: Alberi  $\theta_1$  e  $\theta_2$  in  $\mathcal{T}_{1,\nu,h}$ .

Di conseguenza si ha

$$\text{Val}(\theta_1) = F_{v_0} g_{\ell_0} = - (iT(J_0) \nu) V_\nu \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle^2}, \quad \text{Val}(\theta_2) = F_{v_0} g_{\ell_0} = \partial_J V_\nu \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle},$$

e, dal confronto con la (87.21c), si deduce che

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{1,\nu,h}} \text{Val}(\theta) = \text{Val}(\theta_1) + \text{Val}(\theta_2) = h_\nu^{(1)}.$$

Infine  $\mathcal{T}_{1,0,\mu}$  contiene un unico albero  $\theta_3$ , costituito dal nodo  $v_0$ , con etichette  $\nu_{v_0} = 0$  e  $\delta_{v_0} = 1$ , e dal ramo della radice  $\ell_0$ , con momento  $\nu_{\ell_0} = 0$ , che è di tipo  $\mu \leftarrow H$  (cfr. la figura 19.8).

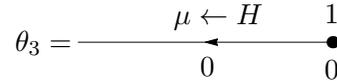


Figura 19.8: Albero  $\theta_3$  in  $\mathcal{T}_{1,0,\mu}$ .

Pertanto si ha

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{1,0,\mu}} \text{Val}(\theta) = \text{Val}(\theta_3) = F_{v_0} g_{\ell_0} = (T(J_0))^{-1} \partial_J V_\nu = \mu^{(1)}.$$

- Consideriamo ora  $k > 1$  e rappresentiamo graficamente i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$ ,  $h_\nu^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$  con i simboli della figura 19.9. Ricordiamo che  $\mu^{(k)} = H_0^{(k)}$ , quindi può essere utile talvolta rappresentare, in maniera equivalente,  $\mu^{(k)}$  con lo stesso simbolo usato per  $H_\nu^{(k)}$ , ma con  $\nu = 0$  in tal caso (cfr. per esempio il punto successivo).

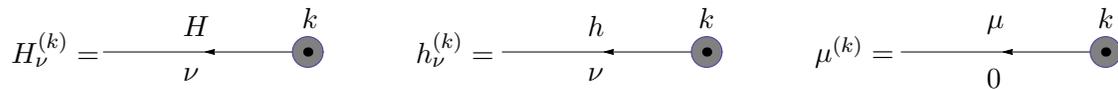


Figura 19.9: Rappresentazione grafica dei coefficienti  $H_\nu^{(k)}$ ,  $h_\nu^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$ .

- Possiamo rappresentare graficamente le (87.28) e (87.30) nel modo che ora illustreremo. La (87.28a) si può rappresentare graficamente come nella figura 19.10: rappresentiamo il membro di destra dell'equazione con un nodo  $v_0$  da cui esce un ramo  $\ell_0$  e in cui entrano  $p + q$  rami. Al nodo  $v_0$  sono associate le etichette  $\delta_{v_0} = 1$  e  $\nu_{v_0} = \nu_0$ . I primi  $q$  rami rappresentano i coefficienti  $H_{\nu_1}^{(k_1)}, \dots, H_{\nu_q}^{(k_q)}$ , mentre gli ultimi  $p$  rami rappresentano i coefficienti  $h_{\nu'_1}^{(k'_1)}, \dots, h_{\nu'_p}^{(k'_p)}$ , in accordo con le notazioni della figura 19.8; in particolare

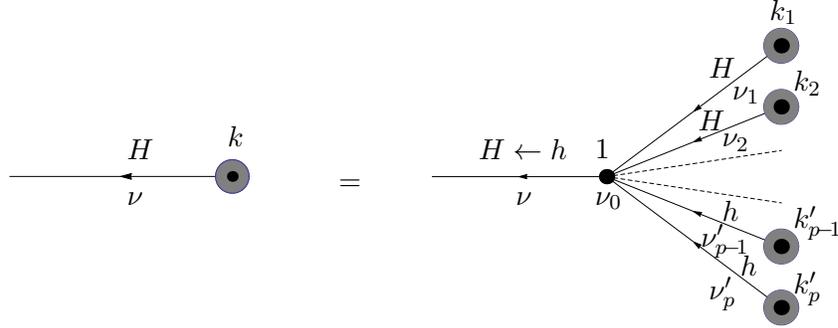


Figura 19.10: Rappresentazione grafica della (87.28a).

$\nu'_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, p$ , mentre si può avere  $\nu_i = 0$  per  $i = 1, \dots, q$  e, se questo accade, interpreteremo  $H_0^{(k_i)} = \mu^{(k_i)}$ .

Associamo al ramo  $\ell_0$  che esce dal nodo  $v_0$  un'etichetta  $\nu$ , con il vincolo che  $\nu = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_q + \nu'_1 + \dots + \nu'_p$ , e diciamo che  $\ell_0$  è di tipo  $H \leftarrow h$  per evidenziare, con  $H$ , che si tratta di un contributo a un coefficiente  $H_\nu^{(k)}$  e, con  $h$ , che il contributo corrisponde a un termine in cui si è derivata la funzione  $V$  rispetto all variabile  $\varphi$  (cfr. la (87.10b)). Se al nodo  $v_0$  associamo anche un fattore

$$\tilde{F}_{v_0} = \frac{1}{p!q!} (i\nu_0)^{q+1} \frac{\partial^p}{\partial J^p} V_{v_0}, \quad (88.11)$$

e al ramo  $\ell_0$  un propagatore

$$g_{\ell_0} = \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle}, \quad (88.12)$$

siamo allora in grado di risalire dalla figura 19.10 alla (87.28a) e viceversa. Ovviamente, nella figura 19.10, le somme sugli indici  $p, q$  e sugli indici di Taylor e di Fourier che compaiono nella (87.28) sono sottointese. Notiamo infine che se, nella figura 19.10, non imponiamo il vincolo che i primi  $q$  rami abbiano etichette  $H$  e gli ultimi  $p$  abbiano etichette  $h$ , ma permettiamo a ciascuna delle  $m = p + q$  linee che entrano in  $v_0$  di avere un'etichetta  $H$  o  $h$ , indifferentemente, purché il vincolo che  $q$  etichette siano  $H$  e  $p$  siano  $h$ , allora il fattore (88.11) deve essere sostituito da un nuovo fattore

$$F_{v_0} = \frac{1}{m!} (i\nu_0)^{q+1} \frac{\partial^p}{\partial J^p} V_{v_0}, \quad (88.13)$$

per evitare di contare troppi contributi. Infatti il fattore combinatorio  $c$  deve essere tale che, moltiplicato per il numero di modi di scegliere  $p$  etichette  $H$  e  $q = m - p$  etichette  $h$  (tanti sono i termini che producono lo stesso contributo) produce  $1/p!q!$ , quindi

$$c \binom{m}{p} = \frac{1}{p!q!} \quad \implies \quad c \frac{m!}{p!q!} = \frac{1}{p!q!}$$

da cui si ottiene  $c = 1/m!$ .

- Analogamente possiamo rappresentare la (87.28b) come illustrato nella figura 19.11. Si hanno tre contributi diversi. Il primo corrisponde al termine

$$\frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle} \frac{\partial}{\partial J} \omega_0(J_0) H_\nu^{(k)} = \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle} T(J_0) H_\nu^{(k)}$$

nella (87.28b) e quindi può essere rappresentato come  $H_\nu^{(k)}$ , con l'unica differenza che il fattore associato al nodo  $v_0$  è

$$F_{v_0} = \frac{1}{m!} (iT(J_0) \nu_0) (i\nu_0)^q \frac{\partial^p}{\partial J^p} V_{\nu_0},$$

invece della (88.13), e il propagatore associato al ramo  $\ell$  è

$$g_{\ell_0} = \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle^2},$$

invece della (88.12). Per tener conto di queste differenze diremo che il ramo  $\ell_0$  è di tipo  $h \leftarrow h$  invece che di tipo  $H \leftarrow h$ : questo implica che si tratta di un contributo a un coefficiente  $h_\nu^{(k)}$ , anziché a un coefficiente  $H_\nu^{(k)}$  come nel caso precedente, e che tale contributo corrisponde di nuovo a un termine in cui si deriva la funzione  $V$  rispetto alla variabile  $\varphi$ . I restanti contributi a  $h_\nu^{(k)}$  sono rappresentati graficamente dalla seconda riga della figura 19.11. Si ha  $\delta_{v_0} = 0$  nel primo contributo e  $\delta_{v_0} = 1$  nel secondo, e in entrambi i contributi il ramo  $\ell_0$  è di tipo  $h \leftarrow H$ , a indicare che si tratta di contributi a un coefficiente  $h_\nu^{(k)}$  che corrispondono a termini in cui si è derivata la funzione  $\mathcal{H}_0$  (se  $\delta_{v_0} = 0$ ) o  $V$  (se  $\delta_{v_0} = 1$ ) rispetto alla variabile  $J$ . Nel caso  $\delta_{v_0} = 0$  al nodo  $v_0$  associamo l'etichetta  $\nu_0 = 0$  e il fattore

$$F_{v_0} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} \mathcal{H}_0(J_0),$$

mentre nel caso  $\delta_{v_0} = 1$  al nodo  $v_0$  associamo l'etichetta  $\nu_0 \in \mathbb{Z}^n$  e il fattore

$$F_{v_0} = \frac{1}{m!} (i\nu_0)^q \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} V_{\nu_0}.$$

Ovviamente, poiché usiamo il fattore combinatorio  $1/m!$ , stiamo assumendo che, in tutti i contributi, ogni ramo che entri in  $v_0$  possa avere etichetta  $H$  o  $h$ , indifferentemente, purché sia sempre soddisfatto il vincolo che  $p$  di esse siano  $H$  e  $q$  siano  $h$ .

- Infine la (87.30) può essere rappresentata graficamente come nella figura 19.12. Il propagatore associato al ramo  $\ell_0$  è  $g_{\ell_0} = 1$ , mentre il fattore associato al nodo  $v_0$  è

$$F_{v_0} = \frac{1}{m!} \left( (T(J_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial J} \right) \frac{\partial^p}{\partial J^p} \mathcal{H}_0(J_0)$$

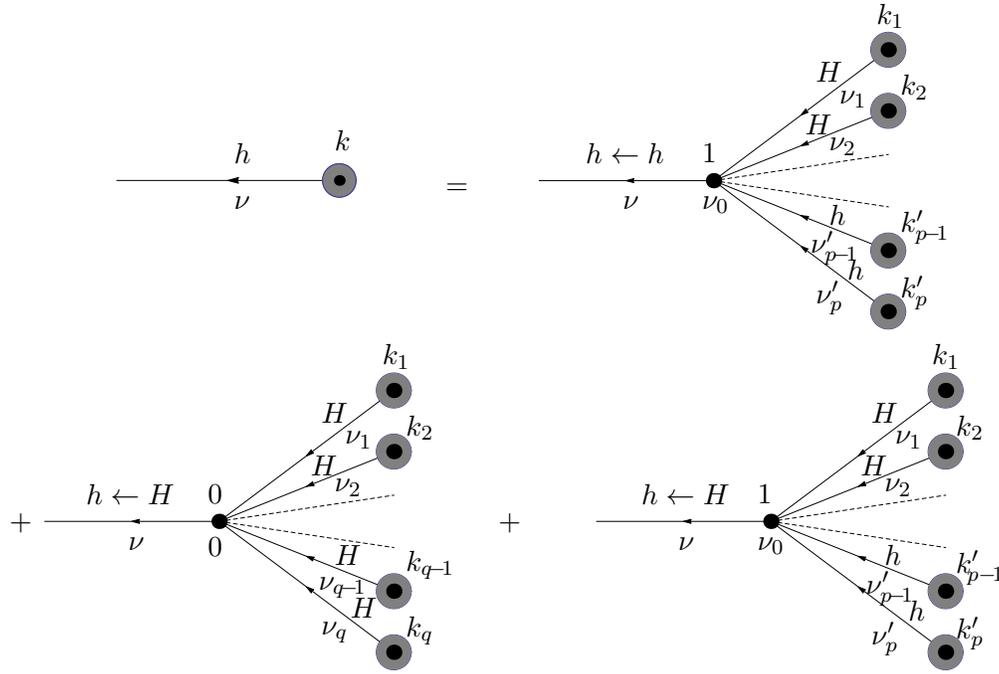


Figura 19.11: Rappresentazione grafica della (87.28b).

nel primo caso (quando  $\delta_{\nu_0} = 0$  e  $\nu_{\nu_0} = 0$ ) e

$$F_{\nu_0} = \frac{1}{m!} (i\nu_0)^q \frac{\partial^{p+1}}{\partial J^{p+1}} V_{\nu_0}$$

nel secondo caso (quando  $\delta_{\nu_0} = 1$  e  $\nu_{\nu_0} \in \mathbb{Z}^n$ ). In particolare si ha  $q \geq 2$  quando  $\delta_{\nu_0} = 0$ .

- Per l'ipotesi induttiva, per ogni  $k' < k$ , ciascun coefficiente  $H_{\nu'}^{(k')}$ ,  $h_{\nu'}^{(k')}$  e  $\mu^{(k')}$  che appare nelle equazioni (87.28) e (87.30) è rappresentato come

$$h_{\nu'}^{(k')} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k', \nu', h}} \text{Val}(\theta), \quad H_{\nu'}^{(k')} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k', \nu', H}} \text{Val}(\theta), \quad \mu^{(k')} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k', 0, \mu}} \text{Val}(\theta).$$

Per ciascun coefficiente consideriamo un albero il cui valore contribuisce alla somma che definisce tale coefficiente. In altre parole prendiamo un albero  $\theta_1 \in \mathcal{T}_{k_1, \nu_1, H}$  il cui valore contribuisce alla somma che dà  $H_{\nu_1}^{(k_1)}$ , un albero  $\theta_2 \in \mathcal{T}_{k_2, \nu_2, H}$  il cui valore contribuisce alla somma che dà  $H_{\nu_2}^{(k_2)}$ , e così via, fino a un albero  $\theta_m \in \mathcal{T}_{k'_p, \nu'_p, h}$  il cui valore contribuisce a  $h_{\nu'_p}^{(k'_p)}$  nei contributi con  $\delta_{\nu_0} = 1$  e fino a un albero  $\theta_m \in \mathcal{T}_{k_q, \nu_q, H}$  il cui valore contribuisce

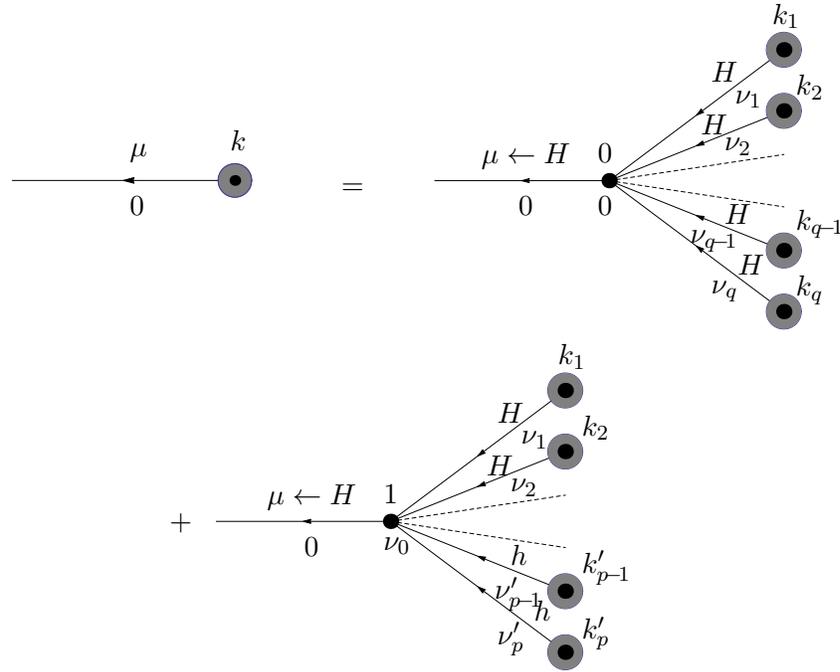


Figura 19.12: Rappresentazione grafica della (87.30).

a  $h_{\nu_q}^{(k_q)}$  nei contributi con  $\delta_{v_0} = 0$  (si ha  $m = q + p$  nel primo caso e  $m = q$  nel secondo). Ciascuno di tali alberi costituisce un sottoalbero che entra nel nodo  $v_0$  di un albero  $\theta$  che ha ramo della radice  $\ell_0$ . Quindi, in base alla definizione dei fattori di nodo  $F_{v_0}$  e dei propagatori  $g_{\ell_0}$ , nonché alle regole grafiche descritte precedentemente, si ha

$$\text{Val}(\theta) = \frac{1}{m_{v_0}!} F_{v_0} g_{\ell_0} \prod_{i=1}^{m_{v_0}} \text{Val}(\theta_i),$$

dove  $m_{v_0} = m$ . Per costruzione ogni albero  $\theta$  di ordine  $k$  si ottiene fissando un nodo  $v_0$  e “attaccando” al nodo  $v_0$  un numero qualsiasi  $m$  di sottoalberi  $\theta_1, \dots, \theta_m$  che abbiano ordini  $k_1, \dots, k_m$ , con  $k_1 + \dots + k_m + \delta_{v_0} = k$ : qui, e nel seguito, quando diciamo che attacchiamo un albero al nodo  $v_0$  intendiamo che l’albero ha la radice in  $v_0$  e costituisce quindi un sottoalbero di  $\theta$ . Quindi anche i coefficienti  $H_{\nu}^{(k)}$ ,  $h_{\nu}^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$  di ordine  $k$  si possono scrivere come somma su tutti gli alberi  $\theta$  contenuti negli insiemi  $\mathcal{T}_{k,\nu,H}$ ,  $\mathcal{T}_{k,\nu,h}$  e  $\mathcal{T}_{k,0,\mu}$ , rispettivamente, dei valori  $\text{Val}(\theta)$  in accordo con la definizione 88.20.

Questo completa la dimostrazione del lemma. ■

### 88.4 Condizione di compatibilità per la solubilità formale delle equazioni

Il lemma 88.22 non implica ancora che le serie (88.1), con i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$ ,  $h_\nu^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$  espressi come somme sugli alberi, forniscono una soluzione formale delle equazioni del moto, dal momento che a ogni ordine  $k$  dobbiamo richiedere che anche l'equazione (87.29) sia soddisfatta, mentre noi al momento stiamo ignorando tale equazione. In altre parole, sulla base dei risultati dimostrati finora, possiamo solo dire che le serie formali (88.1) risolvono le equazioni (87.28) e (87.30) per ogni  $k$ . Dobbiamo quindi dimostrare che i coefficienti trovati risolvono automaticamente la (87.29) per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . È importante realizzare che anche la (87.29) ammette una rappresentazione grafica (cfr. la figura 19.13).

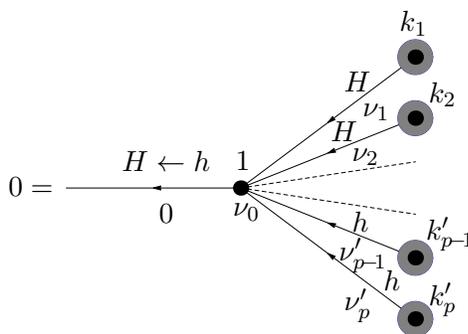


Figura 19.13: Rappresentazione grafica della (87.29).

Confrontando la (87.29) con la (87.28a) si vede che la rappresentazione grafica del membro di destra della (87.29) è analoga alla figura 19.10, con le seguenti differenze:

- l'etichetta  $\nu$  associata alla linea  $\ell_0$  vale  $\nu = 0$
- di conseguenza il corrispondente propagatore è  $g_{\ell_0} = 1$ .

Espandendo i coefficienti  $H_{\nu'}^{(k')}$ ,  $h_{\nu'}^{(k')}$  e  $\mu^{(k')}$ , con  $k' < k$ , otteniamo che il membro di destra della (87.29) può essere espresso come somma su tutti gli alberi in  $\mathcal{T}_{k,0,H}$  dei corrispettivi valori, così che possiamo riscrivere l'equazione (87.29) in termini di alberi nella forma

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}} \text{Val}(\theta) = 0. \quad (88.14)$$

Dimostrare che la (87.29) è soddisfatta è quindi equivalente a dimostrare che vale la (88.14).

Dato un albero  $\theta$ , se  $v_0$  è il suo ultimo nodo, definiamo

$$W(\theta) = \{v \in V(\theta) : \nu_\ell \neq 0 \quad \forall \ell \in L(\mathcal{P}(v_0, v))\}, \quad (88.15)$$

dove  $\mathcal{P}(v_0, v)$  è il cammino che connette i nodi  $v_0$  e  $v$  e  $L(\mathcal{P}(v_0, v))$  è l'insieme dei rami contenuti in  $\mathcal{P}(v_0, v)$  (cfr. pag. 396 per le notazioni).

**Osservazione 88.23** L'insieme dei nodi in  $W(\theta)$  e l'insieme dei rami che li uniscono costituiscono il grafo connesso massimale contenente  $v_0$  e tale che i suoi rami abbiano tutti momento diverso da zero. Il ramo uscente da  $v_0$  (ramo della radice) può avere momento nullo; tutti i rami  $\ell \in L(\theta)$  che entrano in un nodo di  $W(\theta)$ , se esistono, sono tali che  $\nu_\ell = 0$ .

**Osservazione 88.24** Si ha

$$\sum_{v \in V(\theta)} \nu_v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{v \in W(\theta)} \nu_v = 0,$$

poiché tutti i rami  $(\pi(w), w)$  con  $\pi(w) \in W(\theta)$  e  $w \notin W(\theta)$  hanno momento nullo.

Per ogni nodo  $v \in V(\theta)$  indichiamo con  $\mathcal{G}_v$  il gruppo delle permutazioni dei sottoalberi che entrano nel nodo  $v$  e con  $G_v(\theta)$  l'insieme degli alberi non equivalenti ottenuti da  $\theta$  attraverso l'operazione  $\mathcal{G}_v$ . Sia  $G(\theta)$  l'insieme di tutti gli alberi non equivalenti ottenuti applicando  $\mathcal{G}_v$  a tutti i nodi  $v \in W(\theta)$ .

**Definizione 88.25** (FAMIGLIA DI UN ALBERO) Per ogni albero  $\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}$  consideriamo l'insieme  $\mathcal{F}(\theta)$  costituito dagli alberi  $\theta'$  ottenuti da  $\theta$  attraverso le seguenti operazioni:

1. stacciamo il ramo della radice  $\ell_0$  dal nodo  $v_0$  e lo riattacciamo a un qualsiasi altro nodo  $v \in W(\theta)$  tale che  $\delta_v = 1$ ;
2. applichiamo  $\mathcal{G}_v$  a ogni nodo  $v \in W(\theta)$ ;

Chiamiamo  $\mathcal{F}(\theta)$  la famiglia dell'albero  $\theta$ .

Come effetto dell'operazione 1, poiché vogliamo che l'oggetto che si ottiene spostando il ramo della radice sia ancora un albero, dobbiamo necessariamente cambiare l'orientazione di tutte i rami  $\ell$  lungo il cammino  $\mathcal{P}(v_0, v)$ , in modo tale che la freccia corrisponde punti verso la radice e quindi verso il nuovo nodo privilegiato  $v$ . In  $\theta'$ , il ramo  $\ell$  può diventare un ramo  $\ell'$  di tipo diverso: infatti un ramo di tipo  $h \leftarrow H$  diventa di tipo  $H \leftarrow h$  e viceversa. Al contrario un ramo di tipo  $h \leftarrow h$  rimane di tipo  $h \leftarrow h$ . Un ramo  $\ell \in \mathcal{P}(v_0, v)$  non può essere di tipo  $\mu \leftarrow H$  perché  $\nu_\ell \neq 0$  per costruzione (cfr. la definizione di  $W(\theta)$  in (88.15) e la costruzione della famiglia dell'albero  $\theta$ ). A causa del cambiamento della freccia, cambia anche il momento  $\nu_\ell$  del ramo  $\ell$ . In realtà il momento cambia semplicemente segno, come mostra il seguente argomento. Dato un ramo  $\ell$ , sia  $v$  il nodo da cui  $\ell$  esce (così che  $\ell = \ell_v$ ). Poniamo

$$W_v^1(\theta) = \{w \in W(\theta) : w \preceq v\}, \quad W_v^2(\theta) = W(\theta) \setminus W_v^1(\theta).$$

Poiché  $\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}$ , e quindi  $\nu_{\ell_0} = 0$ , se  $\ell_0$  è il ramo della radice, si ha (per l'osservazione 88.24)

$$\sum_{w \in W(\theta)} \nu_w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{w \in W_v^1(\theta)} \nu_w + \sum_{w \in W_v^2(\theta)} \nu_w = 0.$$

Se  $\ell \in \mathcal{P}(v_0, v)$ , in  $\theta$  si ha

$$\nu_\ell = \sum_{w \prec v} \nu_w = \sum_{w \in W_v^1(\theta)} \nu_w,$$

mentre in  $\theta'$  il momento  $\nu_{\ell'}$  del ramo  $\ell'$  ottenuto da  $\ell$  cambiandone l'orientazione diventa

$$\nu_{\ell'} = \sum_{w \in W_v^2(\theta)} \nu_w = - \sum_{w \in W_v^1(\theta)} \nu_w = -\nu_\ell$$

e quindi cambia segno rispetto a  $\nu_\ell$ .

**Lemma 88.26** *Dato  $\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}$ , per ogni  $\ell \in L(\theta)$  il prodotto  $O_\ell g_\ell$  è invariante all'interno della famiglia  $\mathcal{F}(\theta)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\theta' \in \mathcal{F}(\theta)$ . Dobbiamo studiare l'effetto dello spostamento del ramo della radice. Sia  $v$  il nodo di  $\theta$  a cui è stata riattaccato il ramo della radice per ottenere l'albero  $\theta'$ . Dobbiamo dimostrare che per ogni ramo  $\ell \in L(\theta)$  il prodotto  $O_\ell g_\ell$  non cambia passando dall'albero  $\theta$  all'albero  $\theta'$ . Se  $\ell \notin \mathcal{P}(v_0, v)$  questo è ovvio, dal momento che sia  $O_\ell$  che  $g_\ell$  non cambiano. Se invece  $\ell \in \mathcal{P}(v_0, v)$ , se abbiamo  $\ell = (v', v)$  in  $\theta$ , indichiamo con  $\ell' = (v, v')$  la linea in  $\theta'$  ottenuta cambiando l'orientazione di  $\ell$ . Dalla definizione 88.15 di propagatore e dalla definizione 88.17 di operatore di un ramo si vede che

- $O_{\ell'} = -O_\ell$  e  $g_{\ell'} = -g_\ell$  se  $\ell$  è di tipo  $H \leftarrow h$  (e, di conseguenza,  $\ell'$  è di tipo  $h \leftarrow H$ );
- $O_{\ell'} = -O_\ell$  e  $g_{\ell'} = -g_\ell$  se  $\ell$  è di tipo  $h \leftarrow H$  (e, di conseguenza,  $\ell'$  è di tipo  $H \leftarrow h$ );
- $O_{\ell'} = O_\ell$  e  $g_{\ell'} = g_\ell$  se  $\ell$  (e quindi anche  $\ell'$ ) è di tipo  $h \leftarrow h$ .

Ne segue che  $O_\ell g_\ell = O_{\ell'} g_{\ell'}$  per ogni linea  $\ell$ . Da questo segue l'asserto. ■

Dal lemma 88.26 concludiamo che, se scriviamo

$$\left( \prod_{v \in V(\theta)} F_v \right) \left( \prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell \right) = -i\nu_{v_0} \mathcal{A}(\theta), \quad \mathcal{A}(\theta) := g_{\ell_0} \prod_{\ell \in L(\theta) \setminus \{\ell_0\}} O_\ell g_\ell,$$

si ha

$$\left( \prod_{v \in V(\theta')} F_v \right) \left( \prod_{\ell \in L(\theta')} g_\ell \right) = -i\nu_v \mathcal{A}(\theta') = -i\nu_v \mathcal{A}(\theta). \quad (88.16)$$

poiché  $\mathcal{A}(\theta') = \mathcal{A}(\theta) \forall \theta' \in \mathcal{F}(\theta)$ .

**Osservazione 88.27** Ovviamente dalla (88.16) non possiamo dedurre  $\text{Val}(\theta') = \text{Val}(\theta)$ , a causa dei diversi fattori combinatori  $1/m_v!$  che compaiono nella definizione di  $\text{Val}(\theta)$ . Tuttavia se potessimo trascurare i fattori combinatori, sommando i valori di tutti gli alberi ottenuti attaccando il ramo della radice a tutti i nodi  $v \in W(\theta)$  con  $\delta_v = 1$ , otterremmo

$$\sum_{v \in W(\theta)} (-i\nu_v \mathcal{A}(\theta)) = -\mathcal{A}(\theta) \sum_{v \in W(\theta)} i\nu_v = 0,$$

ovvero la somma dei valori degli alberi in  $\mathcal{T}_{k,0,H}$  sarebbe zero.

L'argomento dato nell'osservazione 88.27, in realtà, non può essere utilizzato per dimostrare la (88.14), almeno – come vedremo – non senza ulteriori considerazioni, non solo perché stiamo trascurando i fattori combinatori, ma anche perché non stiamo tenendo conto se gli alberi che otteniamo staccando e riattaccando il ramo della radice sono equivalenti o no.

Si consideri per esempio l'albero  $\theta$  della figura 19.14 e si assuma (per semplicità) che tutti i rami siano di tipo  $h \leftarrow h$  e quindi tutti i nodi  $w \in V(\theta)$  abbiano  $\delta_w = 1$ . Supponiamo che i modi siano come indicato nella figura: le foglie hanno tutte e tre modo  $\nu_1$ , tale che  $\nu_0 + 3\nu_1 = 0$ , così che si abbia  $\theta \in \mathcal{T}_{4,0,h}$ .

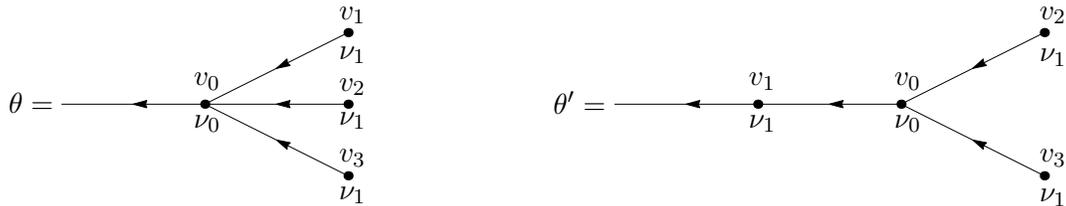


Figura 19.14: L'albero  $\theta'$  è ottenuto da  $\theta$  attaccando il ramo della radice a uno degli altri nodi.

Consideriamo ora gli alberi ottenuti staccando il ramo della radice  $\ell_0$  da  $v_0$  e riattaccandolo a uno degli altri nodi, per esempio a  $v_1$ . Indipendentemente dal nodo a cui  $\ell_0$  è riattaccato si ottiene sempre l'albero  $\theta'$  della figura 19.14; si ricordi infatti che per stabilire se due alberi sono equivalenti o no, dobbiamo ignorare gli indici  $v_i$  ed  $\ell_i$ , e guardare solo alle altre etichette associate ai nodi e ai rami (cfr. l'osservazione 88.8). Il fattore combinatorio associato al nodo  $v_0$  è  $1/3!$  in  $\theta$  (poiché  $m_{v_0} = 3$  in  $\theta$ ) ed è  $1/2!$  in  $\theta'$  (poiché  $m_{v_0} = 2$  in  $\theta'$ ). Quindi, mentre i fattori combinatori degli altri nodi sono tutti 1 in entrambi gli alberi, i fattori combinatori del nodo  $v_0$  sono invece diversi.

Quando andiamo ad applicare gli operatori  $\mathcal{G}_w$ ,  $w \in V(\theta)$ , non otteniamo altri contributi, dal momento che i sottoalberi che entrano nel nodo  $v_0$  sono (per costruzione) equivalenti tra loro. Lo stesso accade in  $\theta'$ . Notiamo tuttavia che  $\theta'$  si può ottenere in tre modi a partire da  $\theta$ , a seconda del nodo a cui andiamo a riattaccare il ramo della radice. Possiamo ugualmente sommare i tre contributi ottenuti attaccando il ramo della radice ai nodi  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ , però, per evitare di contare lo stesso albero tre volte, dobbiamo dividere i corrispondenti valori per 3. In altre parole, invece di sommare a  $\text{Val}(\theta)$  soltanto  $\text{Val}(\theta')$  con un fattore combinatorio  $1/2!$ , possiamo sommare tre contributi uguali a  $\text{Val}(\theta')$ , ciascuno con un fattore combinatorio

$1/(3 \cdot 2!) = 1/3!$ , in modo tale che si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta) &= \frac{1}{3!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) \\ &= \frac{1}{3!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{3!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{3!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{3!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) \\ &= \frac{1}{3!}\mathcal{A}(\theta) \sum_{v \in V(\theta)} i\nu_v = 0, \end{aligned}$$

che mostra che, tenendo conto in modo corretto dei fattori combinatori, si trova la cancellazione discussa nell'osservazione 88.27, almeno per gli alberi che abbiamo considerato.

Prima di discutere il caso generale, vediamo un altro esempio, per meglio capire il meccanismo della cancellazione. Si consideri l'albero  $\theta$  della figura 19.15, in cui il nodo  $v_0$  ha lo stesso modo  $\nu_0$  di  $v_2$  e le foglie hanno entrambe modo  $\nu_2$ .

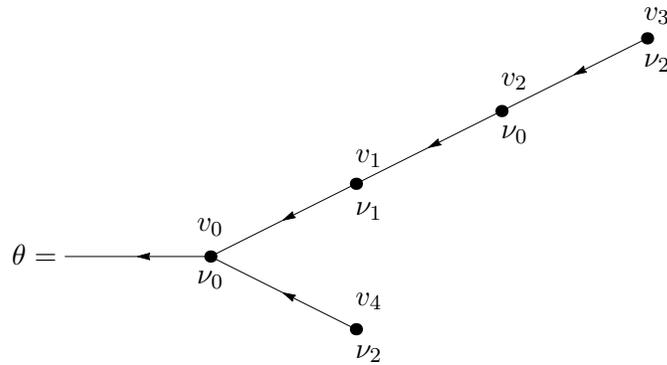


Figura 19.15: L'albero  $\theta$  considerato nel testo.

Di nuovo, per semplicità, si assuma che tutti i rami siano di tipo  $h \leftarrow h$ , che tutti i nodi  $w \in V(\theta)$  abbiano di conseguenza  $\delta_w = 1$  e che  $2\nu_0 + \nu_1 + 2\nu_2 = 0$ , così che  $\theta \in \mathcal{T}_{5,0,h}$ . Staccando il ramo della radice  $\ell_0$  e riattaccandolo ai nodi  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  e  $v_4$  si ottengono gli alberi  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$  della figura 19.16, rispettivamente. Notiamo che il fattore combinatorio associato al nodo  $v_0$  è  $1/2!$  in  $\theta$  ed è 1 negli altri alberi, il fattore combinatorio di  $v_1$  è  $1/2!$  in  $\theta_1$  ed è 1 negli altri alberi, il fattore combinatorio di  $v_2$  è  $1/2!$  in  $\theta_2$  ed è 1 negli altri alberi; gli altri fattori combinatori sono tutti 1, indipendentemente dall'albero.

Adesso aggiungiamo agli alberi della figura 19.16 anche gli alberi che si ottengono a partire da essi attraverso le operazioni  $\mathcal{G}_w$  applicate ai loro nodi. Gli unici nodi  $w$  per i quali l'operazione non è banale sono quelli con  $m_w = 2$ : permutando i rami che entrano nel nodo  $v_0$  in  $\theta$  si ottiene l'albero  $\theta_5$  e, analogamente, permutando i rami che entrano nel nodo  $v_2$  in  $\theta_2$  si ottiene l'albero  $\theta_6$  (cfr. la figura 19.17), mentre, se permutiamo i rami che entrano il nodo  $v_1$  in  $\theta_1$  non otteniamo nuovi alberi, poiché i sottoalberi che entrano in  $v_1$  sono equivalenti tra

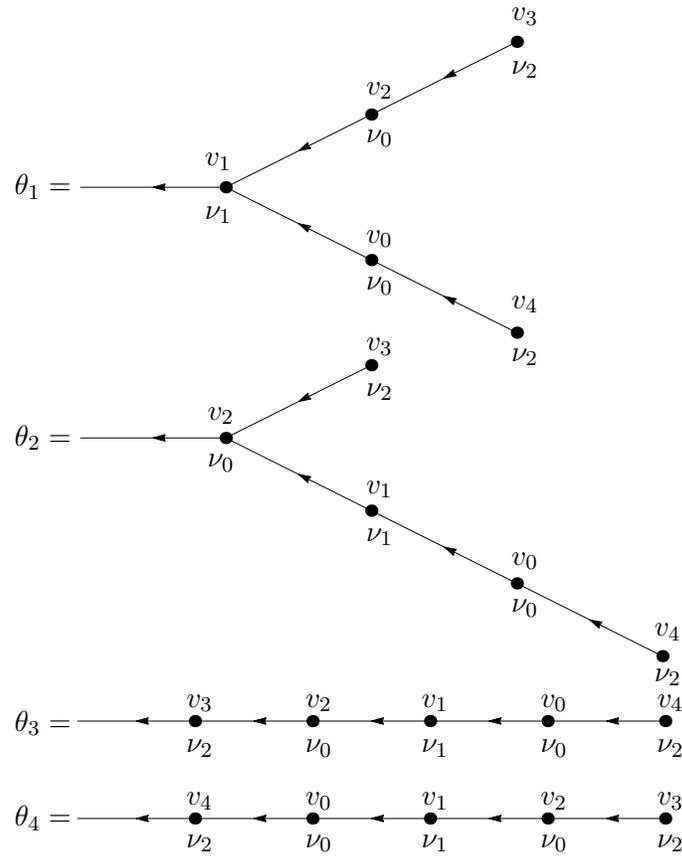


Figura 19.16: Gli alberi  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  considerati nel testo.

loro. Si noti che in realtà  $\theta_5$  e  $\theta_6$  sono equivalenti, rispettivamente, a  $\theta_2$  e  $\theta$ ; analogamente sono equivalenti tra loro gli alberi  $\theta_3$  e  $\theta_4$ .

In conclusione  $\mathcal{F}(\theta) = \{\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta') &= \text{Val}(\theta) + \text{Val}(\theta_1) + \text{Val}(\theta_2) + \text{Val}(\theta_3) \\ &= \frac{1}{2!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + (i\nu_2)\mathcal{A}(\theta) \\ &= \frac{1}{2!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_1)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_0)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_2)\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2!}(i\nu_2)\mathcal{A}(\theta) \\ &= \frac{1}{2!}\mathcal{A}(\theta) \sum_{v \in V(\theta)} i\nu_v = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che non dobbiamo contare  $\theta_4, \theta_5$  e  $\theta_6$  perché equivalenti a  $\theta_3, \theta_2$  e

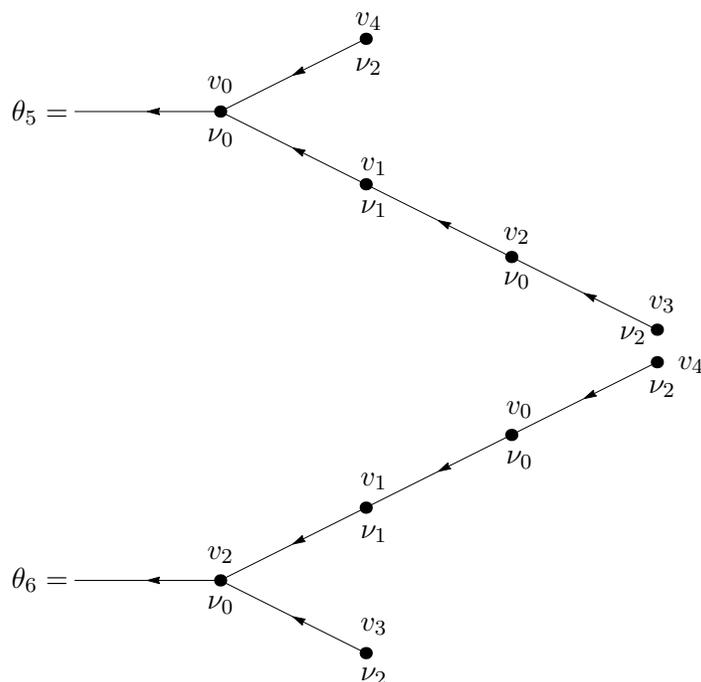


Figura 19.17: Gli alberi  $\theta_5$  e  $\theta_6$  considerati nel testo.

$\theta$ , rispettivamente, e abbiamo contato due volte l'albero  $\theta_3$  dove averne modificato il fattore combinatorio da 1 a  $1/2!$ . In conclusione, possiamo associare lo stesso fattore combinatorio a ogni albero, ma, per far questo, dobbiamo contare alcuni alberi più volte, altrimenti si perdono alcuni contributi (in questo caso parte del valore di  $\theta_3$ ).

Vogliamo ora mostrare che l'argomento si può estendere a qualsiasi albero, così da ottenere la (88.14) e poter quindi enunciare il seguente risultato.

**Lemma 88.28**, *Si assuma che i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$ ,  $h_\nu^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$  siano definiti in accordo con il lemma 88.22. Allora la (87.29) è verificata per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare la (87.29), ovvero la (88.14), mostriamo che gli addendi che compaiono nella somma (88.14) possono essere raccolti nelle famiglie introdotte nella definizione 88.25 e che i valori degli alberi all'interno di ogni famiglia sommano a zero. Riscriviamo la somma in (88.14) come

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}} \text{Val}(\theta) = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}} \frac{1}{|\mathcal{F}(\theta)|} \sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta'), \quad (88.17)$$

dove abbiamo introdotto il fattore  $1/|\mathcal{F}(\theta)|$  per evitare di contare lo stesso contributo  $|\mathcal{F}(\theta)|$  volte; infatti se  $\theta' \in \mathcal{F}(\theta)$  si ha  $\theta \in \mathcal{F}(\theta')$ .

La (88.14) sarà allora dimostrata se dimostreremo che per ogni  $\theta \in \mathcal{T}_{k,0,H}$  si ha

$$\sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta') = 0. \quad (88.18)$$

A ogni nodo  $v \in W(\theta)$  possiamo associare un fattore combinatorio nel modo seguente. Immaginiamo di staccare il ramo della radice di  $\theta$  e riattaccarlo al nodo  $v$ . Sia  $\theta(v)$  l'albero che si ottiene in questo modo. Ci sono  $m_v$  sottoalberi che entrano in  $v$ . Alcuni di essi sono equivalenti tra loro: ci saranno  $r_v$  sottoalberi  $\theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,r_v}$  non equivalenti tali che  $s_{v,1}$  sottoalberi entranti in  $v$  sono equivalenti a  $\theta_{v,1}$ ,  $s_{v,2}$  sottoalberi entranti in  $v$  sono equivalenti a  $\theta_{v,2}$ , e così via; per costruzione si ha  $r_v \leq m_v$  e  $s_{v,1} + \dots + s_{v,r_v} = m_v$ .

Associamo al nodo  $v$  il fattore combinatorio

$$\sigma_v := \frac{1}{s_{v,1}! s_{v,2}! \dots s_{v,r_v}!}. \quad (88.19)$$

Il fattore  $\sigma_v$  assume lo stesso valore per ogni albero  $\theta' \in \mathcal{F}(\theta)$ , poiché è determinato dall'albero  $\theta(v)$ , indipendentemente dall'albero  $\theta$  da cui siamo partiti.

Per esempio, con riferimento alle figure 19.15 e 19.16 – per seguire l'argomento sotto può anche essere utile vedere cosa succede nel caso della figura 19.14 (cfr. l'esercizio 73) –, si ha, per ogni albero ivi rappresentato,

$$\sigma_{v_0} = \frac{1}{111!} = 1, \quad \sigma_{v_1} = \frac{1}{2!}, \quad \sigma_{v_2} = \frac{1}{111!} = 1, \quad \sigma_{v_3} = \frac{1}{0!} = 1, \quad \sigma_{v_4} = \frac{1}{0!} = 1,$$

perché, per calcolare i coefficienti  $\sigma_v$ , dobbiamo utilizzare, in base alla definizione data,  $\theta$  per  $v_0$ ,  $\theta_1$  per  $v_1$ ,  $\theta_2$  per  $v_2$ ,  $\theta_3$  per  $v_3$  e  $\theta_4$  per  $v_4$ .

Consideriamo ora la somma in (88.18) e riscriviamola

$$\sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta') = \sum_{v \in W(\theta)} (i\nu_v) \mathcal{A}(\theta) \sum_{\theta' \in G(\theta(v))}^* \prod_{w \in V(\theta')} \frac{1}{m_w(\theta(v))!}, \quad (88.20)$$

dove

- l'indice  $*$  nella sommatoria esprime il vincolo che nella somma vanno considerati solo gli alberi non equivalenti;
- abbiamo scritto  $m_w = m_w(\theta(v))$  per sottolineare il fatto che i fattori combinatori dipendono dall'albero  $\theta(v)$ , così che, se escludiamo il ramo della radice, tutti i rami adiacenti a  $w = v$  sono entranti (il ramo uscente da  $v$  è il ramo della radice), mentre per ogni  $w \neq v$  uno dei rami adiacenti a  $w$  è un ramo uscente; per esempio, facendo sempre riferimento alla figura 19.16, si ha  $m_{v_0} = 2$  in  $\theta$  e  $m_{v_0} = 1$  negli altri alberi, poiché  $\theta(v_0) = \theta$ .

Possiamo riordinare le somme in (88.20) nel modo seguente:

$$\sum_{\theta' \in G(\theta(v))}^* \prod_{v \in V(\theta')} \frac{1}{m_v(\theta(v))!} = \prod_{w \in V(\theta)} \sum_{\theta' \in G_w(\theta(v))}^* \frac{1}{m_w(\theta(v))!}, \quad (88.21)$$

dal momento ogni operazione  $\mathcal{G}_w$  non altera i fattori combinatori dei nodi  $w' \neq w$ . L'indice  $*$  esprime di nuovo il vincolo che dobbiamo considerare solo alberi non equivalenti, quindi, per ogni nodo  $w$ , ogni qual volta l'operazione  $\mathcal{G}_w$  produce un albero equivalente a un albero che abbiamo già ottenuto applicando  $\mathcal{G}_{w'}$  a un nodo  $w'$  già considerato nel prodotto, dobbiamo scartare tale albero. Ora, se da una parte si ha

$$\sum_{\theta' \in G_v(\theta(v))} \frac{1}{m_v(\theta(v))!} = \sigma_v,$$

dall'altra, in generale, non possiamo scrivere una relazione dello stesso tipo per i fattori in (88.21) che corrispondono ai nodi  $w \neq v$ . Infatti, se  $w \neq v$ , il numero dei rami entranti in  $w$  non è dato da  $m_w(\theta(w))$ , dal momento che uno degli  $m(\theta(w))$  rami adiacenti a  $w$  è un ramo uscente; in altre parole si ha  $m_w(\theta(v)) = m(\theta(w)) - 1$ . Nell'albero  $\theta(w)$  il ramo uscente ha orientazione opposta rispetto all'albero  $\theta(v)$  ed è il ramo della radice di un sottoalbero  $\theta'$ ; tale sottoalbero è equivalente a uno dei sottoalberi di  $\theta(w)$  (non equivalenti tra loro) che entrano in  $w$ . Con le notazioni introdotte dopo la (88.18), indichiamo con  $\theta_{w,1}, \dots, \theta_{w,r_w}$  tali sottoalberi, e con  $s_{w,1}, \dots, s_{w,2}$  il loro numero. Supponiamo che si abbia  $\theta' = \theta_{w,1}$ ; questo è sempre possibile a meno di un riordinamento degli indici. Per ogni  $w \neq v$ , si ha

$$\sum_{\theta' \in G_w(\theta(v))} \frac{1}{m_w(\theta(v))!} = \frac{1}{(s_{w,1} - 1)! s_{w,2}! \dots s_{w,r_w}!},$$

poiché in  $\theta(v)$  ci sono solo  $s_{w,1} - 1$  sottoalberi equivalenti a  $\theta_{w,1}$  che entrano in  $w$ .

A questo punto è importante osservare che, proprio perché ci sono  $s_{w,1}$  alberi equivalenti a  $\theta_{w,1}$  che entrano in  $w$  in  $\theta(w)$ , se attacchiamo il ramo della radice non al nodo  $v$  ma al nodo omologo del nodo  $v$  in ciascuno di tali sottoalberi, otteniamo  $s_{w,1}$  alberi equivalenti a  $\theta'$ . Di conseguenza, poiché la somma in (88.21) è solo sugli alberi non equivalenti, tali contributi vanno contati una volta sola o, equivalentemente, se li contiamo tutti dobbiamo dividere per  $s_{w,1}$ . In pratica, è più comodo contarli tutti. Questo, infatti, comporta un duplice vantaggio: primo, se non facessimo così di fatto non potremmo attaccare il ramo delle radice al alcuni nodi perché così verremmo a sommare su alberi equivalenti tra loro; secondo, contando tutti gli alberi, il fattore combinatorio corrispondente al nodo  $w$  diventa, invece di (88.21),

$$\frac{1}{s_{w,1}} \frac{1}{(s_{w,1} - 1)! s_{w,2}! \dots s_{w,r_w}!} = \frac{1}{s_{w,1}! s_{w,2}! \dots s_{w,r_w}!} = \sigma_w.$$

Ne concludiamo che, come conseguenza del vincolo espresso da  $*$ , la (88.21) dà

$$\sum_{\theta' \in G(\theta(v))}^* \prod_{w \in V(\theta')} \frac{1}{m_w(\theta(v))!} = \mathcal{B}(\theta), \quad \mathcal{B}(\theta) := \prod_{w \in V(\theta)} \sigma_w, \quad (88.22)$$

e quindi non dipende da  $\theta'$ . Per esempio, nel caso della figura 19.16, si ha  $\mathcal{B}(\theta) = 1/2!$  (cfr. la discussione a pag. 419). Usando le (88.21) e (88.22), la (88.20) diventa

$$\sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta)} \text{Val}(\theta') = \sum_{v \in W(\theta)} (i\nu_v) \mathcal{A}(\theta) \mathcal{B}(\theta) = \mathcal{A}(\theta) \mathcal{B}(\theta) \sum_{v \in W(\theta)} (i\nu_v) = 0,$$

che, inserita nella (88.17), implica l'asserto.  $\blacksquare$

**Osservazione 88.29** Il significato del lemma 88.28 è il seguente. Abbiamo visto che trovare una serie formale (87.8) che risolva le equazioni (87.6) è equivalente a risolvere le (87.28), (87.29) e (87.30) a tutti gli ordini. Se ci disinteressiamo della (87.29) riusciamo a trovare una soluzione delle restanti equazioni della forma (87.8), con la funzione  $h$  a media nulla. In principio tale serie non risolve le equazioni (87.6), neppure ordine per ordine, poiché non è detto che la (87.29) sia soddisfatta. A questo punto, dal momento che non disponiamo di parametri liberi utili (l'unico parametro che abbiamo è appunto la media di  $h$ , ma la abbiamo potuta scegliere arbitrariamente uguale a zero proprio perché il suo valore è irrilevante), affinché la funzione trovata sia una soluzione del sistema completo di equazioni, occorre che (87.29) sia soddisfatta automaticamente. In altre parole deve essere un'identità. Il lemma 88.28 mostra che questo è ciò che accade.

**Lemma 88.30** *Le serie di potenze formali (88.1), con i coefficienti dati dalle (88.10), risolvono le equazioni (87.28), (87.29) e (87.30) a tutti gli ordini.*

*Dimostrazione.* Il lemma 88.22 mostra che i coefficienti (88.10) risolvono le equazioni (87.28) e (87.30) a tutti gli ordini. Il lemma 88.28 assicura che le (87.29) sono anch'esse verificate per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Da qui segue l'asserto.  $\blacksquare$

### 88.5 Problema dei piccoli divisori

Il lemma 88.19 fornisce una stima sul prodotto dei fattori associati ai nodi. Per poter stimare il valore di un albero, dobbiamo anche trovare una stima sul prodotto dei propagatori.

**Lemma 88.31** *Sia  $\theta$  un albero etichettato di ordine  $k$ . Per ogni  $\xi' \in (0, \xi_0)$  si ha*

$$\left( \prod_{\ell \in L(\theta)} |g_\ell| \right) \left( \prod_{v \in V(\theta)} e^{-\xi' |\nu_v|} \right) \leq C_0^k \left( \frac{1}{\xi'} \right)^{2(2\tau+1)k} k!^{2(2\tau+1)},$$

per un'opportuna costante  $C_0$ .

*Dimostrazione.* Per ogni ramo  $\ell \in L(\theta)$  tale che  $\nu_\ell \neq 0$ , se  $v$  è il nodo da cui  $\ell$  esce, si ha

$$|\nu_\ell| \leq \sum_{w \preceq v} |\nu_w| \leq \sum_{w \in V(\theta)} |\nu_w|,$$

così che, per ogni  $\xi' > 0$ , possiamo scrivere

$$\prod_{\ell \in L(\theta)} e^{\xi' |\nu_\ell|/2k} \leq \left( \exp \left( \frac{\xi'}{2k} \sum_{v \in V(\theta)} |\nu_v| \right) \right)^{2k} = \exp \left( \xi' \sum_{v \in V(\theta)} |\nu_v| \right) = \prod_{v \in V(\theta)} e^{\xi' |\nu_v|}.$$

Usando la condizione diofantea (84.20) e indicando con  $M := \lceil 2\tau \rceil$  la *parte intera superiore* di  $2\tau$  (i.e. il più piccolo intero non minore di  $2\tau$ ) si ha (cfr. l'esercizio 6)

$$|g_\ell| \leq \frac{1}{|\langle \omega_0, \nu_\ell \rangle|^{R_\ell}} \leq \left( \frac{|\nu_\ell|^\tau}{\gamma} \right)^{R_\ell} \leq \frac{|\nu_\ell|^{2\tau}}{\gamma^2} \leq \frac{|\nu_\ell|^M}{\gamma^2} \leq \frac{M!}{\gamma^2} \left( \frac{2k}{\xi'} \right)^M e^{\xi' |\nu_\ell|/2k},$$

purché si abbia  $\xi' > 0$ . Possiamo allora stimare

$$\prod_{\ell \in L(\theta)} |g_\ell| \leq \left( \frac{M!}{\gamma^2} \left( \frac{2k}{\xi'} \right)^M \right)^{2k} \prod_{\ell \in L(\theta)} e^{\xi' |\nu_\ell|/2k} \leq C_0^k \left( \frac{1}{\xi'} \right)^{2Mk} k!^{2M} \prod_{v \in V(\theta)} e^{\xi' |\nu_v|},$$

dove abbiamo definito

$$C_0 := \left( 2^M e^{2M} \frac{M!}{\gamma^2} \right)^2$$

e usato il fatto che  $k^k \leq e^k k!$  (cfr. l'esercizio 58). Poiché  $M \leq 2\tau + 1$  segue l'asserto. ■

**Lemma 88.32** *Per ogni albero  $\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$ , dove  $\zeta = h, H$  se  $\nu \neq 0$  e  $\zeta = \mu$  se  $\nu = 0$ , si ha*

$$|\text{Val}(\theta)| \leq C_1^k k!^{2(2\tau+1)} \prod_{v \in V(\theta)} e^{-3\xi |\nu_v|/4}, \quad C_1 := \left( \frac{8}{3\xi} \right)^{2(2\tau+3)} \frac{4\beta_0^2 E^2 n^2 C_0}{\rho^4},$$

dove le costanti  $E$  e  $\beta_0$  sono definite in (88.9), mentre la costante  $C_0$  è come nel lemma 88.31.

*Dimostrazione.* Dal lemma 88.19 e dal lemma 88.31 otteniamo

$$|\text{Val}(\theta)| \leq \left( \frac{\beta_0 E n}{\xi_3^2 \rho_0^2} \right)^{2k} 2^{2k} C_0^k \left( \frac{1}{\xi'} \right)^{2(2\tau+1)k} k!^{2(2\tau+1)} \prod_{v \in V(\theta)} e^{-(\xi - \xi_3 - \xi') |\nu_v|},$$

dove abbiamo usato che  $(m_v + 1)! \leq 2^{m_v} m_v! \leq 2$  per ogni  $m_v \in \mathbb{N}$ , così che

$$\prod_{v \in V(\theta)} \frac{(m_v + 1)!}{m_v!} \leq \prod_{v \in V(\theta)} 2^{m_v} \leq 2^{2k},$$

per il lemma 88.5. Scegliendo  $\xi_3 = \xi' = 3\xi_0/8$  segue l'asserto. ■

Il lemma 88.32 mostra che i coefficienti  $H_\nu^{(k)}$ ,  $h_\nu^{(k)}$  e  $\mu^{(k)}$  possono essere scritti come “somme sugli alberi”. Poiché il lemma 88.32 fornisce una stima sui valori degli alberi, possiamo utilizzare tale stima per effettuare la somma sugli alberi contenuti negli insiemi  $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$ .

Ovviamente, per ogni  $k \geq 2$ , il numero di alberi in  $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$  è infinito a causa dei modi di Fourier: per ogni nodo  $v$  con  $\delta_v = 1$  si ha  $\nu_v \in \mathbb{Z}^n$  e quindi dobbiamo sommare su tutti i possibili valori di  $\nu_v$ ,  $v \in V(\theta)$ , tale che la loro somma  $\sum_{v \in V(\theta)} \nu_v$  sia uguale a  $\nu$ . Al contrario la somma sugli altri indici è su un insieme finito. Questo suggerisce di riscrivere la somma sugli alberi nel modo seguente. Sia  $\mathcal{T}_{k,\zeta}^*$  l'insieme degli alberi etichettati che differisce da  $\mathcal{T}_{\nu,k,\zeta}$  perché ai nodi sono associate tutte le etichette tranne quelle dei modi e, di conseguenza, ai rami non sono associati i momenti. Possiamo allora scrivere

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}} \text{Val}(\theta) = \sum_{\theta^* \in \mathcal{T}_{k,\zeta}^*} \sum_{\{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)}} \text{Val}(\theta^*; \{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)}), \quad (88.23)$$

dove  $V_1(\theta^*) := \{v \in V(\theta^*) : \delta_v = 1\}$  e  $(\theta^*; \{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)})$  è l'albero in  $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$  ottenuto da  $\theta^* \in \mathcal{T}_{k,\zeta}^*$  assegnando i modi  $\nu_v$  ai nodi  $v \in V_1(\theta^*)$ .

**Lemma 88.33** *Il numero di alberi in  $\mathcal{T}_{k,\zeta}^*$  è stimato da  $C_2^k$  per un'opportuna costante  $C_2$ .*

*Dimostrazione.* Un albero  $\theta^* \in \mathcal{T}_{k,\zeta}^*$  ha al più  $2k$  nodi (per il lemma 88.13). Ogni nodo  $v \in V(\theta^*)$  ha un'etichetta  $\delta_v$  che può assumere due valori e due etichette  $\zeta_v^1$  e  $\zeta_v^2$  tali che  $(\zeta_v^1, \zeta_v^2)$  può assumere 3 valori (cfr. le definizioni 88.11 e 88.12). Assegnate tali etichette, tutte le altre, comprese quelle dei rami, sono determinate in modo univoco. Quindi il numero di modi di assegnare le etichette a un albero non etichettato si può stimare con  $(2 \cdot 3)^{2k}$ . Ovviamente stiamo ignorando alcuni vincoli che legano le etichette  $\delta_v$  alle etichette  $\zeta_v^1$  e  $\zeta_v^2$ . D'altra parte il numero di alberi non etichettati con  $2k$  nodi si può stimare con  $2^{4k} = 4^{2k}$ , per il lemma 88.6. Ne concludiamo che il numero di alberi in  $\mathcal{T}_{k,\zeta}^*$  è stimato da  $24^{2k}$ , da cui segue l'asserto con  $C_2 = 24^2$ . ■

**Lemma 88.34** *Per ogni  $k \geq 1$  si ha*

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}} |\text{Val}(\theta)| \leq C_3^k e^{-\xi|\nu|/2} k!^{2(2\tau+1)},$$

per un'opportuna costante  $C_3$ .

*Dimostrazione.* In (88.23) si ha

$$\sum_{\{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)}} |\text{Val}(\theta^*; \{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)})| \leq C_1^k \prod_{v \in V_1(\theta)} \sum_{\nu_v \in \mathbb{Z}^n} e^{-3\xi|\nu_v|/4} \leq C_1^k C_4^k e^{-\xi|\nu|/4},$$

dove abbiamo definito

$$C_4 := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{-\xi|\nu|/4}.$$

Quindi dal lemma 88.33 si ottiene

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}} |\text{Val}(\theta)| \leq \sum_{\theta^* \in \mathcal{T}_{k,\zeta}^*} \sum_{\{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)}} |\text{Val}(\theta^*; \{\nu_v\}_{v \in V_1(\theta^*)})| \leq C_1^k C_2^k C_4^k e^{-\xi|\nu|/4},$$

così che, se poniamo  $C_3 = C_1 C_2 C_4$  (con  $C_1$  e  $C_2$  definite come nel lemma 88.32 e nel lemma 88.33, rispettivamente), segue l'asserto. ■

**Osservazione 88.35** Il lemma 88.30, integrato dalle stime del lemma 88.34, mostra che le funzioni  $h^{(k)}(\psi, J_0)$  e  $H^{(k)}(\psi, J_0)$  in (87.7) sono analitiche in un dominio  $D(\xi/2, \rho, J_0)$  per ogni  $k \geq 1$ . Tuttavia la dipendenza da  $k$  della stima non è tale da garantire la sommabilità della serie perturbativa.

**Osservazione 88.36** Dal momento che il lemma 88.34 fornisce solo una stima del valore dell'albero, si potrebbe pensare che la stima sia pessimistica e che in realtà, attraverso un'analisi più attenta, sia migliorabile. Al contrario, anche se l'esponente del fattoriale non è sicuramente ottimale, non è difficile esibire alberi di ordine  $k$  il cui valore abbia realmente una dipendenza da  $k$  tale da impedire la sommabilità. Si consideri per esempio l'albero "a pettine" della figura 19.18, costituito da  $k = 2p + 1$  nodi, di cui i  $p$  nodi in basso hanno modo  $\nu_0$  e i  $p$  nodi in alto hanno modo  $-\nu_0$ , tranne l'ultimo che ha modo  $\nu$ .

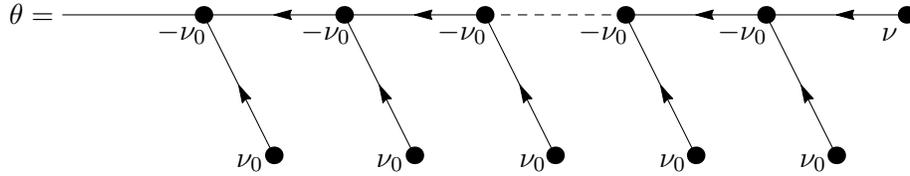


Figura 19.18: Albero  $\theta$  di ordine  $k$  il cui valore è proporzionale a  $k!$ .

Si assuma che tutte i rami siano di tipo  $h \leftarrow h$ . Supponiamo anche che  $\nu$  sia tale che  $\langle \omega_0, \nu \rangle \approx \gamma/|\nu|^\tau$ , i.e tale che  $\langle \omega_0, \nu \rangle$  sia positivo e maggiore di  $\gamma/|\nu|^\tau$ , consistentemente con la condizione diofantea, ma molto vicino al valore  $C_1 \gamma/|\nu|^\tau$  per qualche costante  $C_1$  (cfr. l'esercizio 74). Si scelga invece  $\nu_0$  tale che  $|\langle \omega_0, \nu_0 \rangle|$  sia molto più piccolo di  $|\langle \omega_0, \nu \rangle|$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \text{Val}(\theta) &= -iT(J_0) \nu_0 \langle -i\nu_0, iT(J_0) \nu_0 \rangle^{p-1} \langle -i\nu_0, -iT(J_0) \nu_0 \rangle^p \langle -i\nu_0, -iT(J_0) \nu \rangle \\ &= \left( \frac{1}{2!} V_{-\nu_0} \right)^p (V_{\nu_0})^p V_\nu \left( \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu_0 \rangle^2} \right)^p \left( \frac{1}{\langle i\omega_0, \nu \rangle^2} \right)^{p+1}, \end{aligned} \quad (88.24)$$

dove abbiamo tenuto conto che i  $p$  rami che escono dalle foglie con modo  $\nu_0$  hanno momento  $\nu_0$ , mentre tutti gli altri rami hanno momento  $\nu$ . Possiamo quindi stimare

$$|\text{Val}(\theta)| \leq 2^{-p} \Phi^{2p+1} \beta_0^{2p} |\nu_0|^{4p} |\nu| \left( e^{-\xi|\nu_0|} \right)^p \left( e^{-\xi|\nu_0|} \right)^p e^{-\xi|\nu|} \left( \frac{1}{|\langle \omega_0, \nu_0 \rangle|^2} \right)^p \left( \frac{|\nu|^{2\tau}}{C_1^2 \gamma^2} \right)^{p+1}.$$

Se definiamo

$$K_0 := \frac{|\nu_0|^4}{|\langle \omega_0, \nu_0 \rangle|^2} e^{-2\xi|\nu_0|}, \quad K_1 := \frac{2^{-1}\Phi^2\beta_0^2 K_0}{C_1^2 \gamma^2},$$

abbiamo quindi

$$|\text{Val}(\theta)| \leq |\nu|^{1+2\tau} \Phi K_1^p |\nu|^{2\tau p} e^{-\xi|\nu|},$$

Inoltre, per opportune scelte delle funzioni  $\mathcal{H}_0$  e  $V$  e dei vettori  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\nu_0$ , il valore di  $\theta$  può essere reso molto vicino alla sua stima (cfr. l'esercizio 74), così che si trova

$$A_0^{-1} |\nu|^{2\tau+1} A_1^{-k} |\nu|^{2\tau k} e^{-\xi|\nu|} \leq |\text{Val}(\theta)| \leq A_0 |\nu|^{2\tau+1} A_1^k |\nu|^{2\tau k} e^{-\xi|\nu|} \quad (88.25)$$

per opportune costanti positive  $A_0$  e  $A_1$ . La stima dal basso in (88.25) non è sommabile su  $k$ . Infatti, per ogni  $\nu$  che soddisfi la (88.25), si può trovare  $k \in \mathbb{N}$  tale che (cfr. l'esercizio 75)

$$|\text{Val}(\theta)| \geq k! A_0^{-1} A_2^{-k} (2/\xi)^{2\tau k} e^{-\xi|\nu|/2}, \quad (88.26)$$

per un'opportuna costante  $A_2$ . Abbiamo quindi trovato alberi di ordine  $k$  i cui i valori crescono almeno come  $k!$ , così che, se stimiamo singolarmente in valore assoluto i valori degli alberi per ottenere una stima dei coefficienti di Taylor-Fourier, otteniamo una serie divergente.

I risultati trovati finora dimostrano la risolubilità formale delle equazioni del moto (87.6), ma non l'esistenza di una soluzione quasiperiodica. Per dimostrare la convergenza delle serie perturbative dovremo far vedere che, nonostante la stima dei valori dei singoli alberi produca dei fattoriali, si hanno tuttavia cancellazioni tra i vari valori, tali che la somma di tutti i valori produca un contributo sommabile. Per far questo, sarà necessaria un'analisi più delicata, come mostreremo nel prossimo capitolo.

**Nota bibliografica** Nel presente capitolo abbiamo seguito [Gallavotti-2] per il §85. La discussione delle serie di Lindstedt e della loro rappresentazione grafica in termini di alberi (cfr. i paragrafi §87 e 88) è invece ispirata a [Gentile & Mastropietro].

Per un'introduzione alla teoria dei grafi si veda, per esempio, [Harary & Palmer] o [Bollobas]. Per definizioni e proprietà delle frazioni continue (cfr. gli esercizi 17÷43) si veda [Hardy & Wright], [Khinčin] o [Schmidt].

Per un'approfondimento sui sistemi integrabili, nell'ambito della meccanica classica, si può vedere, per esempio, [Babelon *et al.*]. Per una (possibile) dimostrazione del teorema KAM rimandiamo al capitolo successivo; un'esposizione esauriente della storia del teorema KAM e della sua connessione con i lavori precedenti e con il contesto storico, senza insistere troppo sugli aspetti matematici, si può trovare in [Dumas].

## Esercizi

**Esercizio 1** Si dimostri la stima (84.4). [*Soluzione.* Si consideri prima il caso  $n = 1$ . Sia  $f(\varphi)$  una funzione periodica in  $\varphi$  di periodo  $2\pi$  e analitica nella striscia  $\Sigma_\xi := \{\varphi \in \mathbb{C} : \Re\varphi \in \mathbb{T}, |\Im\varphi| \leq \xi\}$ . Sviluppiamo la funzione in *serie di Fourier*:

$$f(\varphi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\nu\varphi} f_\nu, \quad f_\nu := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-i\nu\varphi} f(\varphi).$$

Dato  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , poniamo  $\sigma(\nu) := \nu/|\nu|$ . Sia  $\gamma(\nu)$  il contorno nel piano complesso che ha come frontiera il segmento  $\gamma_0 = [-\pi, \pi]$  lungo l'asse reale, il segmento  $\gamma_1 = \{\varphi \in \mathbb{C}, \Re\varphi \in [-\pi, \pi], \Im\varphi = -\sigma(\nu)\xi\}$  e i due segmenti verticali  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  che uniscono gli estremi di  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . Assumiamo che  $\gamma$  sia orientato in maniera che il segmento  $\gamma_0$  sia percorso da  $-\pi$  a  $\pi$  e gli altri segmenti in maniera consistente (cfr. la figura 19.19). Poiché la funzione  $f$  è analitica in  $\Sigma_\xi$  si ha (cfr. l'esercizio 27 del capitolo 11)

$$\oint_{\gamma} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = 0.$$

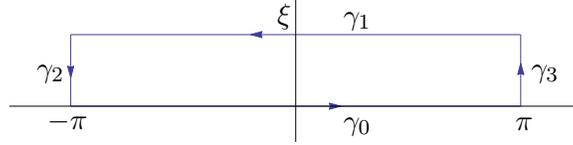


Figura 19.19: Contorno d'integrazione  $\gamma$  nel caso in cui sia  $\sigma(\nu) < 0$ .

D'altra parte

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi &= \int_{\gamma_0} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi + \int_{\gamma_3} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi - \int_{\gamma_1} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi - \int_{\gamma_2} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi \\ &= \int_{\gamma_0} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi - \int_{\gamma_1} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

avendo usato che gli integrali lungo  $\gamma_2$  e lungo  $\gamma_3$  sono uguali per la periodicit  di  $f$ . Si ottiene quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = \int_{\gamma_0} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = \int_{\gamma_1} f(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + i\sigma(\nu)\xi) e^{-i\nu\varphi} e^{-|\nu|\xi} d\varphi,$$

da cui segue che

$$|f_\nu| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-|\nu|\xi} \int_{-\pi}^{\pi} \max_{\varphi' \in \Sigma_\xi} |f(\varphi')| d\varphi \leq e^{-\xi|\nu|} \max_{\varphi' \in \Sigma_\xi} |f(\varphi')|.$$

Se  $f = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  dipende da  $n$  variabili,   periodica in ciascuna di esse di periodo  $2\pi$  ed   analitica nell'insieme  $\Sigma_\xi := \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{C}^n : \Re\varphi_i \in \mathbb{T}, |\Im\varphi_i| \leq \xi, i = 1, \dots, n\}$ , si ragiona in modo analogo integrando una variabile alla volta. Si trova

$$|f_\nu| \leq e^{-\xi|\nu_1|} \dots e^{-\xi|\nu_n|} \max_{|\Im\varphi_1|, \dots, |\Im\varphi_n| \leq \xi} |f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)|,$$

da cui segue l'asserto notando che  $|\nu_1| + \dots + |\nu_n| \geq |\nu|$ .

**Esercizio 2** Si scriva la perturbazione nell'hamiltoniana (84.5) in variabili azione-angolo.

**Esercizio 3** Sia  $I$  la matrice in (84.9). Si dimostri la (84.10).

**Esercizio 4** Dato  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , sia  $|x|$  la norma euclidea di  $x$ , i.e.  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Si definisca  $|x|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$ . Si dimostri che  $|x|_1$  è una norma e che si ha  $|x| \leq |x|_1 \leq \sqrt{n}|x|$ . [Soluzione. Si verifica facilmente che  $|\cdot|_1$  verifica le proprietà della norma (cfr. la definizione 1.31). Si ha inoltre

$$|x|_1^2 = \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| \implies |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i^2 + x_j^2) \leq n|x|^2,$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 5** Si dimostri la (84.22). [Soluzione. Si ha

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu|_1 = m}} 1 = \sum_{\nu_1 = -m}^m \sum_{\nu_2 = -(m-|\nu_1|)}^{m-|\nu_1|} \dots \sum_{\nu_{n-1} = -(m-|\nu_1| - \dots - |\nu_{n-2}|)}^{m-|\nu_1| - \dots - |\nu_{n-2}|} 2,$$

dato che, scelti  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ , allora  $\nu_n$  può assumere solo i due valori  $\nu_n = \pm(m - |\nu_1| - \dots - |\nu_{n-1}|)$ . Si ottiene quindi

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu|_1 = m}} 1 \leq 2(2m+1)^{n-1} \leq 3^n m^{n-1},$$

poiché ogni somma si può stimare, ignorando i vincoli, con  $(2m+1)$ .]

**Esercizio 6** Si dimostri che per ogni  $x \in \mathbb{R}_+$ , per ogni  $p \in \mathbb{N}$  e per ogni  $\xi > 0$  si ha  $x^p \leq p! \xi^{-p} e^{\xi x}$ . [Soluzione. Si ha

$$x^p = p! \xi^{-p} \frac{1}{p!} (\xi x)^p \leq p! \xi^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\xi x)^k = p! \xi^{-p} e^{\xi x}.$$

purché  $\xi > 0$ .]

**Esercizio 7** Sia  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  la funzione definita da  $f(x) := x^p e^{-\xi x}$ , con  $p, \xi > 0$ . Si dimostri che

- $f$  raggiunge il suo massimo  $M := p^p e^{-p} \xi^{-p}$  in  $x_0 = p/\xi$ ;
- si ha  $f(x) \geq e^{p/2} p^p e^{-p} \xi^{-p} \forall x \in [x_0/2, x_0]$ ;
- si ha  $f(x) \geq (4e^{-1})^p p^p e^{-p} \xi^{-p} \forall x \in [x_0, 2x_0]$ .

[Soluzione. La derivata di  $f(x)$  è  $f'(x) = x^{p-1} e^{-\xi x} (p - \xi x)$ , quindi  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = x_0 := p/\xi$ ; inoltre  $f'(x) > 0$  per  $x < x_0$  e  $f'(x) < 0$  per  $x > x_0$ , quindi  $x_0$  è un punto di massimo, così che  $M = f(x_0)$ . Inoltre si ha  $f(x) \geq f(x_0/2) \forall x \in (x_0/2, x_0]$  e  $f(x) \geq f(2x_0) \forall x \in [x_0, 2x_0]$ . Calcolando esplicitamente i valori di  $f(x_0)$ ,  $f(x_0/2)$  e  $f(2x_0)$  segue l'asserto. Si noti che se  $p \in \mathbb{N}$ , allora  $M \leq p! \xi^{-p}$ , poiché  $p^p \leq p! e^p$  (per l'esercizio 6 con  $x = p$  e  $\xi = 1$ ).]

**Esercizio 8** Si consideri l'intervallo  $[n_1, n_2] \subset \mathbb{R}_+$ , dove  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , con  $n_2 > n_1$ . Si dimostri che, se  $f: [n_1, n_2] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione positiva continua crescente, si ha (cfr. la figura 19.20)

$$\sum_{n=n_1}^{n_2-1} f(n) \leq \int_{n_1}^{n_2} dx f(x) \leq \sum_{n=n_1+1}^{n_2} f(n),$$

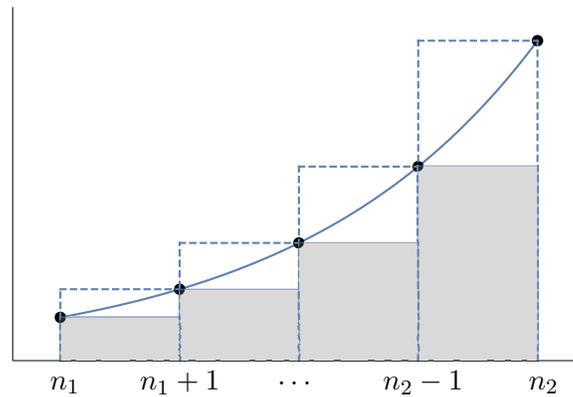


Figura 19.20: Relazione tra la somma di  $f(n)$  e l'integrale di  $f(x)$  nel caso in cui  $f$  sia crescente.

mentre, se  $f: [n_1, n_2] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione positiva continua decrescente, si ha (cfr. la figura 19.21)

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} f(n) \leq \int_{n_1}^{n_2} dx f(x) \leq \sum_{n=n_1}^{n_2-1} f(n).$$

Si deduca dall'ultimo risultato che, se  $\{a_n\}$  è una successione tale che  $a_n = f(n)$ , per qualche funzione

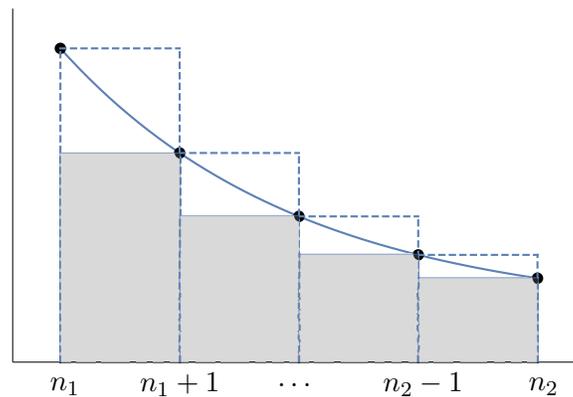


Figura 19.21: Relazione tra la somma di  $f(n)$  e l'integrale di  $f(x)$  nel caso in cui  $f$  sia decrescente.

continua  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  che sia decrescente per  $x > x_0$ , per qualche  $x_0 \in \mathbb{R}_+$ , allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge se e solo se  $f(x)$  è integrabile (*criterio integrale per la convergenza di una serie*) e che si ha

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{\infty} dx f(x)$$

per ogni  $n_0 \geq x_0$ . [*Suggerimento.* Si consideri il caso in cui  $f$  sia crescente. La somma a sinistra si può interpretare come la somma delle aree di  $n_2 - n_1$  rettangoli che hanno base di lunghezza 1 e altezza pari a  $f(n)$ , con  $n = n_1, \dots, n_2 - 1$  (cfr. la regione ombreggiata della figura 19.20); analogamente la somma a destra rappresenta la somma di  $n_2 - n_1$  rettangoli che hanno base di lunghezza 1 e altezza pari a  $f(n)$ , con  $n = n_1 + 1, \dots, n_2$  (cfr. la regione con la frontiera tratteggiata della figura 19.20). L'integrale, che rappresenta l'area dell'insieme racchiuso tra il grafico di  $f$ , l'asse delle  $x$  e le due rette verticali passanti per  $x = n_1$  e  $x = n_2$ , è compreso tra le due somme. Nel caso in cui  $f$  sia decrescente si ragiona in maniera analoga, tenendo presente la figura 19.21. In particolare, se  $a_n = f(n)$ , per ogni  $N > n_0 > x_0$  si ha

$$\sum_{n=n_0+1}^N a_n \leq \int_{n_0}^N dx f(x) \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} a_n$$

e, prendendo il limite  $N \rightarrow \infty$ , si trova

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{+\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n,$$

che mostra che la serie converge se e solo se l'integrale converge e implica la stima dall'alto.]

**Esercizio 9** Si dimostri che, per ogni  $p \in \mathbb{R}$  e per ogni  $\xi > 0$ , si ha

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\nu|^p e^{-\xi|\nu|} \leq A \xi^{-n-p},$$

per un'opportuna costante  $A$  dipendente solo da  $p$  e da  $n$ . [*Soluzione.* Se si pone  $\xi_1 := \xi/\sqrt{n}$ , si ha

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\nu|^p e^{-\xi|\nu|} \leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\nu|_1^p e^{-\xi_1|\nu|_1} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu|_1=m}} m^p e^{-\xi_1 m} \leq 3^n \sum_{m=1}^{\infty} m^{p+n-1} e^{-\xi_1 m},$$

dove  $|\nu|_1 = |\nu_1| + \dots + |\nu_n|$  (cfr. l'esercizio 4) e si è tenuto conto anche dell'esercizio 5. Definiamo  $f(x) := x^s e^{-\xi_1|x|}$ , con  $s = p + n - 1$ ; per l'esercizio 7 la funzione  $f(x)$  è crescente fino a  $x_0 := s/\xi_1$  e decrescente per  $x > x_0$ . Sia  $m_0 := \lfloor x_0 \rfloor$ , dove  $\lfloor x \rfloor$  è la *parte intera* di  $x$ , i.e. il più grande intero minore o uguale a  $x$ . Se  $m_0 \geq 1$ , si ha (cfr. l'esercizio 8)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m^{p+n-1} e^{-\xi_1 m} &= \sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \sum_{m=1}^{m_0-1} f(m) + f(m_0) + f(m_0+1) + \sum_{m=m_0+2}^{\infty} f(m) \\ &\leq \int_1^{m_0} dx f(x) + f(m_0) + f(m_0+1) + \int_{m_0+1}^{+\infty} dx f(x) \leq 2f(x_0) + \int_0^{+\infty} dx f(x). \end{aligned}$$

Si ha  $f(x_0) \leq s^s e^{-s} \xi_1^{-s} \leq s! \xi_1^{-s}$  (sempre per l'esercizio 7), mentre l'integrale si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} dx f(x) = \int_0^{+\infty} dx x^s e^{-\xi_1 x} = \xi_1^{-s-1} \int_0^{+\infty} dx x^s e^{-x}.$$

Se poniamo  $s_1 := \lceil s \rceil$ , dove  $\lceil x \rceil$  è la *parte intera superiore* di  $x$  (i.e. il più piccolo intero non minore di  $x$ ), l'ultimo integrale si può stimare con

$$\int_0^{+\infty} dx x^s e^{-x} = \int_0^1 dx e^{-x} + \int_0^1 dx x^{s_1} e^{-x} \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) + s_1! 2^{s_1} \int_0^\infty dx e^{-x/2} \leq 1 + s_1! 2^{s_1+1},$$

dove si è tenuto conto dell'esercizio 6 con  $\xi = 1/2$ . Poiché, se  $m_0 \geq 1$ , si ha  $s/\xi_1 \geq x_0 \geq m_0 > 1$  e quindi  $2^s > \xi_1$ , si ottiene

$$\begin{aligned} 2f(x_0) + \int_0^\infty dx f(x) &\leq 2s_1! \xi_1^{-s} + \xi_1^{-s-1} + s_1! 2^{s_1+1} \xi_1^{-s-1} \\ &\leq s_1! 2^{s_1+2} \xi_1^{-s-1} + s_1! 2^{s_1+1} \xi_1^{-s-1} \leq s_1! 2^{s_1+3} \xi_1^{-s-1}, \end{aligned}$$

dove si è usato che la funzione  $s \mapsto s^s e^{-s}$  è crescente. Se invece  $m_0 = 0$ , si ha semplicemente

$$\sum_{m=1}^\infty m^{p+n-1} e^{-\xi_1 m} = \sum_{m=1}^\infty f(m) \leq \int_0^\infty dx f(x),$$

e l'integrale si stima come nel caso precedente. In particolare si ha  $A = 3^n (\sqrt{n})^{p+n} s_1! 2^{p+n+3}$ .

**Esercizio 10** Sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  una successione reale tale che  $0 \leq a_k < 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . Si definisca

$$p_n := \prod_{k=0}^n (1 - a_k).$$

Si dimostri che esiste finito il limite  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  e si ha  $p \geq 0$ . [Soluzione. Poiché  $1 - a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , si ha  $p_n > 0$ . D'altra parte  $p_{n+1} = (1 - a_{n+1}) p_n < p_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi la successione  $\{p_n\}$  è decrescente. Ne segue (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 1) che la successione converge e il suo limite  $p$  è non negativo.]

**Esercizio 11** Con le notazioni dell'esercizio 10, si dice che il *prodotto infinito*

$$\prod_{k=0}^\infty (1 - a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

converge se il limite  $p$  è strettamente positivo. Si dimostri che la serie  $\sum_{k=0}^\infty a_k$  converge se e solo se converge il prodotto infinito  $\prod_{k=0}^\infty (1 - a_k)$ . [Soluzione. Se la serie converge esiste  $N > 0$  tale che  $\sum_{k=N}^\infty a_k < 1/2$ . D'altra parte si ha

$$\prod_{k=N}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=N}^n a_k, \quad n \geq N.$$

Questo può essere mostrato per induzione, usando il fatto che  $(1-x)(1-y) \geq 1-x-y$  se  $xy \geq 0$ ; infatti la disuguaglianza è ovviamente soddisfatta per  $n = N$ , mentre, se  $n > N$ , si ha

$$(1-a_N)(1-a_{N+1}) \dots (1-a_n) \geq (1-a_N)(1-(a_{N+1} + \dots + a_n)) \geq 1 - (a_N + (a_{N+1} + \dots + a_n)).$$

Quindi

$$p_n = p_{N-1}(1-a_N) \dots (1-a_n) \quad \implies \quad \frac{p_n}{p_{N-1}} \geq 1 - \sum_{k=N}^n a_k \geq 1/2,$$

da cui segue che il limite inferiore della successione  $\{p_n/p_{N-1}\}$  è strettamente positivo e quindi  $p_n/p_{N-1} \rightarrow p/p_{N-1} > 0$  (cfr. l'esercizio 10). Usando infine il fatto che  $p_{N-1} > 0$ , se ne deduce che il limite  $p$  è strettamente positivo, i.e. il prodotto infinito converge. Se invece la serie diverge si ha

$$\prod_{k=1}^n (1-a_k) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^n a_k\right), \quad n \geq 1,$$

che può di nuovo essere dimostrata per induzione usando il fatto che  $1-x \leq e^{-x}$ . Quindi

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} (1-a_k) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = 0.$$

Di conseguenza, se il prodotto infinito converge (i.e.  $p > 0$ ), allora anche la serie converge. Altrimenti, per la proprietà appena dimostrata, si dovrebbe avere  $p = 0$ .]

**Esercizio 12** Dato  $n \in \mathbb{N}$ , il *doppio fattoriale*  $n!!$  è definito nel modo seguente:

- se  $n$  è pari, i.e.  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , si ha  $n!! = (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k-2) \cdot 2k$ ,
- se  $n$  è dispari, i.e.  $n = 2k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , si ha  $n!! = (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1) \cdot (2k+1)$ .

Si dimostri che  $(2k)!! = 2^k k!$  e che  $(2k-1)!! = (2k)!/(2k)!!$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . [Soluzione. Si ha

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k-2) \cdot 2k = 2^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1) \cdot k) = 2^k k!,$$

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3) \cdot (2k-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2k-3) \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2(k-1) \cdot 2k} = \frac{(2k)!}{(2k)!!},$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .]

**Esercizio 13** Si dimostri la *formula di Wallis*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

dove il doppio fattoriale è definito nell'esercizio 12. [Soluzione. Si definisca

$$I_n := \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Integrando per parti si verifica che

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Inoltre  $I_n \geq 0$  e

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} dx \sin^{n+1} x \leq \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x = I_n,$$

che mostra che la successione  $\{I_n\}$  è decrescente. Quindi

$$\frac{2n}{2n+1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1 \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

Un calcolo diretto dà  $I_0 = \pi/2$  e  $I_1 = 1$ . Inoltre si ha

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \dots = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{4}{5} \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \\ I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

da cui concludiamo

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!} \frac{2}{\pi} = \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)} \frac{2}{\pi}.$$

Poiché il limite per  $n \rightarrow \infty$  vale 1, segue l'asserto.]

**Esercizio 14** Si dimostri che la serie di McLaurin di  $\log(1+x)$  è data da

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

e se ne deduca che

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

[*Suggerimento.* Si consideri la serie geometrica

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Poiché la serie converge uniformemente per  $|x| < 1$ , integrando termine a termine (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 3), troviamo

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^x dt t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) &= \frac{1}{2} (\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{x^k}{k} - \frac{(-x)^k}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{x^k}{k} - (-1)^k \frac{x^k}{k} \right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \end{aligned}$$

che implica il risultato.]

**Esercizio 15** Si dimostri la *formula di Stirling*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

[*Soluzione.* Si consideri la successione

$$a_n := \log \left( \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \right) = \log n! + n - \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n.$$

Si ha

$$a_n - a_{n+1} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \log \left( \frac{n+1}{n} \right) - 1.$$

Riscrivendo

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}},$$

e usando lo sviluppo di Taylor (cfr. l'esercizio 14)

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^{2k+1},$$

troviamo

$$a_n - a_{n+1} = (2n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^{2k+1} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Possiamo perciò stimare

$$\begin{aligned} 0 < a_n - a_{n+1} &< \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} \\ &\leq \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12} \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{12} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Dall'ultima disequaglianza deduciamo che

$$\left(a_n - \frac{1}{12n}\right) - \left(a_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}\right) < 0.$$

In conclusione, la successione  $\{a_n\}$  è decrescente e quindi è limitata superiormente. La successione  $\{a_n - 1/12n\}$  è crescente ed è anch'essa limitata superiormente (poiché  $a_n - 1/12n < a_n$ ), quindi converge (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 1). Sia  $a$  il suo limite. Si ha

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{12n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^a.$$

Usando le proprietà del doppio fattoriale (cfr. l'esercizio 12) e la formula di Wallis (cfr. l'esercizio 13) otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Moltiplicando e dividendo opportunamente l'ultima relazione, troviamo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} n n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n+1}} \left(\frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} n n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n+1}}\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}}\right)^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} n n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n+1}}\right) e^{2a} e^{-a} = \frac{e^a}{2}, \end{aligned}$$

che implica  $e^a = \sqrt{2\pi}$ . Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = \sqrt{2\pi},$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 16** Si dimostri che la formula di Stirling dell'esercizio 15 può essere rafforzata dando una stima dall'alto e dal basso,

$$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{1/12n},$$

valida per ogni  $n$  finito. [Soluzione. Con le notazioni usate nella soluzione dell'esercizio 15, si ha

$$a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a_n - \frac{1}{12n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{12n}\right) = a,$$

poiché la successione  $\{a_n\}$  è decrescente e la successione  $\{a_n - 1/12n\}$  è crescente. Quindi si ha

$$a \leq a_n \leq a + \frac{1}{2n} \implies \sqrt{2\pi} \leq \log e^{a_n} \leq \sqrt{2\pi} e^{1/12n},$$

da cui, ricordando la definizione di  $a_n$ , si ottiene la stima cercata.]

**Esercizio 17** Si consideri il numero reale

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots} + \frac{1}{a_n}}},$$

dove  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Scriveremo  $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ . Chiameremo  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  una *frazione continua finita* e i numeri reali  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  i *quozienti parziali* della frazione continua. Si dimostri che

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = \left[ a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right].$$

[Suggerimento. Segue dalla definizione di frazione continua.]

**Esercizio 18** Data una frazione continua  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  definiamo

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1, & p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & k &= 2, \dots, n, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & k &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Si dimostri che  $[a_0, a_1, \dots, a_k] = p_k/q_k$  per  $k = 0, \dots, n$ . I numeri reali  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$  sono chiamati i *convergenti* della frazione continua  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ . [Soluzione. Si procede per induzione su  $k$ . Per  $k = 0$  e  $k = 1$  il risultato si verifica direttamente, tenuto conto che

$$[a_0] = a_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Assumendo che si abbia  $[a_0, a_1, \dots, a_k] = p_k/q_k$  per  $k \leq m < n$ , per l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1}] &= \left[ a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right] \\ &= \frac{\left( a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left( a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right) q_{m-1} + q_{m-2}} = \frac{a_{m+1} (a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1} (a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} \\ &= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto dell'esercizio 17. Questo implica il risultato per  $k = m + 1$ .]

**Esercizio 19** Con le notazioni degli esercizi 17 e 18, si dimostri che

$$\begin{aligned} p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k &= (-1)^{k-1}, \\ p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (-1)^k a_k, \end{aligned}$$

per ogni  $k = 1, \dots, n$  e per ogni  $k = 2, \dots, n$ , rispettivamente. [Soluzione. Si consideri la prima relazione. Per  $k = 1$  la verifica è immediata. Per  $k \geq 2$  si ha

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} - p_{k-1} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) = -(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}),$$

così che, iterando  $k - 1$  volte, si arriva a

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} (p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{k-1}.$$

Analogamente, per  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) \\ &= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}) = a_k (-1)^{k-2}, \end{aligned}$$

da cui segue la seconda relazione.]

**Esercizio 20** Con le notazioni degli esercizi 17 e 18, si assuma che i quozienti parziali  $a_k$  siano positivi per  $k \geq 1$  e si scriva  $x_k = p_k/q_k$  per  $k = 0, \dots, n$ . Si dimostri che i convergenti pari  $x_{2k}$  crescono strettamente e i convergenti dispari  $x_{2k+1}$  decrescono strettamente con  $k$ . Si dimostri inoltre che ogni convergente dispari è più grande di ogni convergente pari. [Suggerimento. Se i quozienti parziali sono positivi, anche i convergenti sono positivi. Dalla seconda proprietà dell'esercizio 19 segue che

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_{k-2} q_k},$$

così che si ottiene  $x_k - x_{k-2} > 0$  se  $k$  è pari e  $x_k - x_{k-2} < 0$  se  $k$  è dispari. Dalla prima proprietà dell'esercizio 19 si ha invece

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k},$$

quindi  $x_k > x_{k-1}$  se  $k$  è dispari.]

**Esercizio 21** Con le notazioni e sotto le ipotesi dell'esercizio 20, si dimostri che  $x_{2k} < x < x_{2m+1}$  per ogni  $k, m \in \mathbb{N}$  tali che  $2k < n$  e  $2m + 1 < n$ . [Soluzione. Segue dall'esercizio precedente tenendo conto che  $x = x_n$ .]

**Esercizio 22** Data una successione reale  $a_0, a_1, a_2, \dots$  a termini positivi, si consideri la successione di frazioni continue finite  $x_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Chiameremo *frazione continua infinita* il limite  $x$  per  $n \rightarrow \infty$  di  $x_n$ , se esiste, e scriveremo

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Diremo in tal caso che la frazione continua infinita converge. Si definiscano i convergenti  $p_n/q_n$  come nel caso delle frazioni continue finite (cfr. l'esercizio 18). Si dimostri che le proprietà dei convergenti viste negli esercizi 17÷20 continuano a valere nel caso di frazioni continue infinite e se ne deduce che la frazione continua converge se e solo se i convergenti ammettono limite. [Suggerimento. Basta

osservare che, per ogni  $n$  finito,  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  è una frazione continua finita, quindi i numeri  $p_k, q_k$  che appaiono nei convergenti di  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  e quelli che appaiono nei convergenti della frazione continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  sono uguali per  $k \leq n$ . In particolare si ha  $x_n = p_n/q_n$ , quindi  $x_n \rightarrow x$  se e solo se la successione  $\{p_n/q_n\}$  converge a  $x$ .

**Esercizio 23** Si dimostri che i convergenti  $p_k/q_k$  di una frazione continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  convergono se e solo se  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{k-1}q_k = +\infty$ . [*Soluzione.* In virtù dell'esercizio 20 (e dell'esercizio 22), la successione dei convergenti pari è crescente e quella dei convergenti dispari è decrescente: entrambe le successioni ammettono limite, i.e. esistono

$$y := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k}, \quad z := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}.$$

Quindi i convergenti ammettono limite se solo se  $y = z$ . Poiché (cfr. gli esercizi 20 e 22)

$$y - z = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{q_{k-1}q_k},$$

si ha  $y = z$  se e solo se  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{k-1}q_k = +\infty$ .

**Esercizio 24** Si dimostri che una frazione continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  converge se e solo se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$

[*Soluzione.* Per le proprietà dei convergenti (cfr. gli esercizi 18 e 22) si ha  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} > q_{k-2}$  per ogni  $k \geq 2$ . Se  $q_k < q_{k-1}$  si ha  $q_{k-1} > q_k > q_{k-2}$ , quindi per ogni  $k \geq 2$  si ha  $q_k > q_{k-1}$  oppure  $q_{k-1} > q_{k-2}$ . Mostriamo prima che se la serie converge allora la frazione continua infinita non converge. Se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge esiste  $N > 0$  tale che  $a_k < 1$  per ogni  $k > N$ . Se  $q_k > q_{k-1}$  si ha

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} < a_k q_k + q_{k-2} \implies q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k},$$

mentre, se  $q_{k-1} > q_{k-2}$  si ha

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} < a_k q_{k-1} + q_{k-1} < (1 + a_k) q_{k-1} \implies q_k < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k},$$

così che, in entrambi i casi, possiamo scrivere

$$q_k < \frac{q_{k_1}}{1 - a_k},$$

per  $k_1 \in \{k-1, k-2\}$  opportuno. Poiché  $k_1 < k$ , se  $k_1 > N$  possiamo ripetere l'argomento, e così via, fino ad arrivare alla disuguaglianza

$$q_k < \frac{q_{k_p}}{(1 - a_k)(1 - a_{k_1})(1 - a_{k_2}) \dots (1 - a_{k_{p-1}})},$$

dove  $k > k_1 > k_2 > \dots > k_{p-1} > N$  e  $k_p \leq N$ . Poiché stiamo supponendo che la serie converga, in tal caso (cfr. l'esercizio 11) converge anche il prodotto infinito  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n)$ ; si ha perciò

$$\ell := \prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) > 0.$$

Se definiamo  $Q := \max\{q_k : k \leq N\}$  e usiamo il fatto che

$$(1 - a_k)(1 - a_{k_1})(1 - a_{k_2}) \dots (1 - a_{k_{p-1}}) \geq \prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n),$$

concludiamo che  $q_k \leq Q/\ell \forall k \geq N$  e, quindi,

$$q_k q_{k+1} < \frac{Q^2}{\ell^2}, \quad \forall k \geq N.$$

Di conseguenza non è possibile che si abbia  $q_k q_{k+1} \rightarrow +\infty$ . Per l'esercizio 23, la frazione continua infinita non converge. Viceversa, se la serie diverge, mostriamo che allora la frazione continua converge. Poiché  $q_k > q_{k-2} \forall k \geq 2$ , iterando si trova  $q_k > q_0$  se  $k$  è pari e  $q_k \geq q_1$  se  $k$  è dispari. Poiché  $q_0 = 1$  e  $q_1 = a_1$  (cfr. l'esercizio 18), se poniamo  $c = \min\{1, a_1\}$  otteniamo  $q_k \geq c \forall k \in \mathbb{N}$  e quindi

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq c a_k + q_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Iterando la disuguaglianza e usando che  $q_1 \geq c a_1$ , troviamo, per  $k \geq 1$ ,

$$q_{2k} \geq q_0 + c \sum_{n=1}^k a_{2n} > c \sum_{n=1}^k a_{2n}, \quad q_{2k+1} \geq q_1 + c \sum_{n=1}^k a_{2n+1} \geq c \sum_{n=0}^k a_{2n+1},$$

che implica, per ogni  $k \geq 1$ ,

$$q_{2k} + q_{2k+1} > c \sum_{n=1}^{2k+1} a_n, \quad q_{2k} + q_{2k-1} > c \sum_{n=1}^{2k} a_n.$$

Utilizzando il fatto che  $q_1 + q_0 = 1 + a_1 > a_1 \geq c a_1$ , arriviamo a un'unica disuguaglianza della forma

$$q_k + q_{k-1} > c \sum_{n=1}^k a_n, \quad k \geq 1,$$

da cui otteniamo

$$\max\{q_k, q_{k-1}\} > \frac{c}{2} \sum_{n=1}^k a_n, \quad k \geq 1.$$

Stimando anche  $\min\{q_k, q_{k-1}\} \geq \min\{q_0, q_1\} = c$ , troviamo

$$q_k q_{k-1} = \max\{q_k, q_{k-1}\} \min\{q_k, q_{k-1}\} > \frac{c^2}{2} \sum_{n=1}^k a_n, \quad k \geq 1.$$

Pertanto, se la serie diverge, diverge anche il prodotto  $q_{k-1} q_k$ . Per l'esercizio 23, ne segue che la frazione continua converge.]

**Esercizio 25** Si dimostri che, se i quozienti parziali di una frazione continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  sono definitivamente numeri interi positivi, la frazione continua converge. [Soluzione. Se esiste  $N > 0$  tale che  $a_n \geq 1 \forall n \geq N$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge, quindi, per l'esercizio 24, la frazione continua converge.]

**Esercizio 26** Si dimostri che ogni numero razionale può essere rappresentato da una frazione continua finita i cui quozienti parziali  $a_n$  sono numeri interi positivi per  $n \geq 1$ . [Soluzione. Sia  $r = p/q$  un numero razionale. Possiamo scrivere  $p = a_0q + m_1$ , dove  $a_0 \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq m_1 < q$ . Quindi

$$r = \frac{p}{q} = \frac{a_0q + m_1}{q} = a_0 + \frac{m_1}{q} = a_0 + \xi_0, \quad \xi_0 = \frac{m_1}{q}.$$

Si ha  $0 \leq \xi_0 < 1$ . Se  $\xi_0 = 0$  si ha  $r = a_0 = [a_0]$ . Se  $\xi_0 \neq 0$ , si ha

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{q}{m_1} = \frac{a_1m_1 + m_2}{m_1} = a_1 + \frac{m_2}{m_1} = a_1 + \xi_1, \quad \xi_1 = \frac{m_2}{m_1},$$

dove  $a_1 \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq m_2 < m_1$ , così che  $0 \leq \xi_1 < 1$ . Se  $\xi_1 = 0$  si ha  $r = a_0 + 1/a_1 = [a_0, a_1]$ . Se  $\xi_1 \neq 0$ , possiamo scrivere

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2m_2 + m_3}{m_2} = a_2 + \frac{m_3}{m_2} = a_2 + \xi_2, \quad \xi_2 = \frac{m_3}{m_2},$$

dove  $a_2 \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq m_3 < m_2$ , e così via. La successione di interi  $m_1, m_2, m_3, \dots$  è decrescente, così che esiste  $n > 0$  tale che  $m_{n+1} = 0$  (e quindi  $1/\xi_{n-1} = a_n$ ). Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} r &= a_0 + \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\xi_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \xi_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{1}{\xi_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \xi_2}} \\ &= \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \xi_{n-1}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}, \end{aligned}$$

dove  $r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , dove  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ , costituisce la *rappresentazione in frazioni continue del numero razionale  $r$* .]

**Esercizio 27** Si dimostri che ogni numero irrazionale può essere rappresentato da una frazione continua infinita i cui quozienti parziali  $a_n$  sono numeri interi positivi per  $n \geq 1$ . [Soluzione. Sia  $x \in \mathbb{R}$  irrazionale. Sia  $a_0 = [x]$  la *parte intera* di  $x$  (cfr. l'esercizio 9). Si ha  $\xi_0 := x - [x] \in (0, 1)$ : non può essere  $\xi_0 = 0$ , altrimenti  $x$  sarebbe un intero. Si ha  $r_1 := 1/\xi_0 > 1$ , quindi possiamo scrivere  $r_1 = a_1 + \xi_1$ , dove  $a_1 = [r_1] \geq 1$  e  $\xi_1 \in (0, 1)$ ; di nuovo  $\xi_1 = 0$  non è possibile, essendo  $x$  irrazionale. Iterando il procedimento, si costruisce una successione  $\{r_k\}$ , definita ricorsivamente ponendo

$$r_0 = x, \quad r_{k+1} = 1/\xi_k, \quad k \geq 0,$$

dove  $\xi_k = r_k - [r_k] \in (0, 1)$ . La costruzione continua indefinitamente, poiché, se si avesse  $\xi_k = 0$  per qualche  $k$ , si troverebbe  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$  e quindi  $x = p_k/q_k$  sarebbe un numero razionale. In conclusione, ponendo  $a_k := [r_k]$ , si trova una successione di numeri interi positivi  $a_1, a_1, a_2, a_3, \dots$  tale che  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  è una frazione continua infinita e  $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ . L'algoritmo che porta alla costruzione della frazione continua prende il nome di *algoritmo delle frazioni continue* e  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  costituisce la *rappresentazione in frazioni continue del numero irrazionale  $x$* .]

**Esercizio 28** Si dimostri che la frazione continua infinita che rappresenta un numero irrazionale è determinata in modo univoco. Se  $r \in \mathbb{Q}$ , si dimostri che esiste un'unica frazione continua finita  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , con  $a_n > 1$ , che lo rappresenta. [*Suggerimento.* Se  $x \in \mathbb{R}$  è irrazionale, l'algoritmo delle frazioni continue descritto nella soluzione dell'esercizio 27 determina i quozienti parziali in modo univoco. Se  $r \in \mathbb{Q}$ , l'algoritmo descritto nella soluzione dell'esercizio 26 dà  $1/\xi_k > 1$  per ogni  $k$ . Quindi se all'ultimo passo  $n$  si trova  $m_{n+1} = 0$  e quindi  $\xi_{n-1} = 1/a_n$  si ha necessariamente  $a_n > 1$ . Se si tiene conto che si può riscrivere

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad a_{n+1} := 1,$$

si vede che le due frazioni continue  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  e  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$  rappresentano entrambe il numero  $r$ . Richiedendo che l'ultimo quoziente parziale sia maggiore di 1, escludiamo la seconda possibilità e quindi la rappresentazione diventa unica.]

**Esercizio 29** Si dimostri che, dati due numeri razionali positivi  $a/b$  e  $c/d$  tali che  $a/b < c/d$ , si ha

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

[*Soluzione.* Se  $a/b < c/d$  si ha  $ad < bc$ , quindi  $a(b+d) = ab + ad < ab + bc = b(a+c)$  e  $d(a+c) = da + dc < cb + cd = c(b+d)$ .]

**Esercizio 30** Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero irrazionale e siano  $x_k = p_k/q_k$  i convergenti della frazione continua che rappresenta  $x$ . Si dimostri che  $x_{2k} < x < x_{2k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . [*Suggerimento.* Poiché  $\{x_{2k}\}$  è una successione crescente e  $\{x_{2k+1}\}$  è una successione decrescente si ha

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \inf_{k \in \mathbb{N}} x_{2k+1}.$$

Inoltre, poiché  $x$  è irrazionale, si ha  $x_{2k} \neq x$  e  $x_{2k+1} \neq x$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .]

**Esercizio 31** Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero irrazionale positivo e siano  $x_k = p_k/q_k$  i convergenti della frazione continua che rappresenta  $x$ . Si dimostri che

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . [*Soluzione.* Si assuma che  $k$  sia pari, così che  $x_k < x < x_{k+1}$ . Applicando ripetutamente il risultato dell'esercizio 29 si trova

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} < \frac{p_k + 2p_{k+1}}{q_k + 2q_{k+1}} < \dots < \frac{p_k + a_{k+2}p_{k+1}}{q_k + a_{k+2}q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} < x$$

quindi il numero  $s_k := (p_k + p_{k+1})/(q_k + q_{k+1})$  è compreso tra  $x_k$  e  $x$ . Ne segue che  $|x - x_k| > |s_k - x_k|$ , ovvero

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{q_k(p_k + p_{k+1}) - p_k(q_k + q_{k+1})}{q_k(q_k + q_{k+1})} = \frac{q_k p_{k+1} - p_k q_{k+1}}{q_k(q_k + q_{k+1})} = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})},$$

dove si è tenuto conto dell'esercizio 19 (e del fatto che  $k$  è pari). Inoltre, poiché  $x$  cade all'interno dell'intervallo  $[x_k, x_{k+1}]$  si ha  $|x - x_k| < |x_k - x_{k+1}|$ , si ha (cfr. di nuovo l'esercizio 19)

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Se  $k$  è dispari si ragiona in modo del tutto analogo, tenendo conto che  $x_k > x > x_{k+1}$  in tal caso.]

**Esercizio 32** Un numero razionale  $p/q$ , con  $p$  e  $q$  primi tra loro, si definisce una delle *migliori approssimazioni razionali* di un numero irrazionale  $x$  se

$$|nx - m| > |qx - p|$$

per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  tali che  $0 < n \leq q$  e  $m/n \neq p/q$ . Si dimostri che ciascuna delle migliori approssimazioni razionali è un convergente. [Soluzione. Se  $p/q$  è una delle migliori approssimazioni razionali di  $x$  si deve avere  $p/q \geq a_0$ . Infatti,  $p/q < a_0$  implicherebbe  $|1 \cdot x - a_0| \leq |x - p/q| \leq |qx - p|$  (poiché  $x > a_0$  e  $q \geq 1$ ) e quindi  $p/q$  non sarebbe una delle migliori approssimazioni razionali. Supponiamo per assurdo che  $p/q$  non sia un convergente. Allora  $p/q$  dovrebbe essere o più grande di  $p_1/q_1$  o compreso tra due convergenti  $p_{k-1}/q_{k-1}$  e  $p_{k+1}/q_{k+1}$ , entrambi più grandi di  $x$  se  $k$  fosse pari (cfr. la figura 19.22) ed entrambi più piccoli se  $k$  fosse dispari (cfr. la figura 19.23).

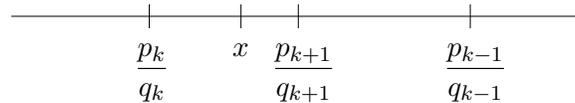


Figura 19.22: Posizione dei convergenti  $p_{k-1}/q_{k-1}$ ,  $p_k/q_k$  e  $p_{k+1}/q_{k+1}$  rispetto a  $x$  nel caso  $k$  pari.

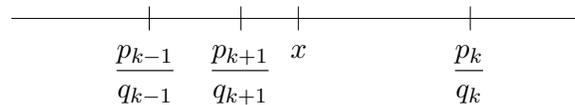


Figura 19.23: Posizione dei convergenti  $p_{k-1}/q_{k-1}$ ,  $p_k/q_k$  e  $p_{k+1}/q_{k+1}$  rispetto a  $x$  nel caso  $k$  dispari.

Nel primo caso ( $p/q > p_1/q_1$ ), poiché  $p_1/q_1 > x$ , si avrebbe

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p}{q} \right| > \frac{|p_1q - q_1p|}{q_1q} \geq \frac{1}{q_1q} \implies |qx - p| \geq \frac{1}{q_1},$$

essendo  $p_1q - q_1p$  un intero diverso da zero. D'altra parte, poiché per le proprietà dei convergenti (cfr. l'esercizio 31) si ha

$$|1 \cdot x - a_0| = |q_0x - p_0| < \frac{1}{q_1},$$

questo implicherebbe

$$|qx - p| > \frac{1}{q_1} > |1 \cdot x - a_0|,$$

così che  $p/q$  non potrebbe essere una delle migliori approssimazioni razionali. Nel secondo caso ( $p/q$  compreso tra  $p_{k-1}/q_{k-1}$  e  $p_{k+1}/q_{k+1}$ ), si avrebbe

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| > \frac{|q_{k-1}p - p_{k-1}q|}{q_{k-1}q} \geq \frac{1}{q_{k-1}q},$$

essendo  $q_{k-1}p - p_{k-1}q$  un intero diverso da zero. D'altra parte

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \frac{|q_{k-1}p_k - p_{k-1}q_k|}{q_{k-1}q_k} = \frac{1}{q_{k-1}q_k},$$

che, unita alla diseuguaglianza precedente, implicherebbe  $q > q_k$ . Inoltre si avrebbe

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q_{k+1}q} \implies |qx - p| > \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Poiché  $|q_kx - p_k| < 1/q_{k+1}$  (cfr. l'esercizio 31), si avrebbe quindi

$$|q_kx - p_k| < |qx - p|, \quad q_k < q,$$

così che  $p/q$  non potrebbe essere una delle migliori approssimazioni razionali. Quindi, in entrambi i casi, si troverebbe una contraddizione; ne segue che  $p/q$  deve essere un convergente.]

**Esercizio 33** Sia  $\{p_n/q_n\}$  la successione dei convergenti di un numero irrazionale  $x$ . Si dimostri che

$$|q_0x - p_0| > |q_1x - p_1| > |q_2x - p_2| > \dots > |q_{k-1}x - p_{k-1}| > |q_kx - p_k| > \dots$$

[*Soluzione.* Per le proprietà dei convergenti (cfr. l'esercizio 31) si ha, per ogni  $k \geq 1$ ,

$$|q_kx - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}, \quad |q_{k-1}x - p_{k-1}| > \frac{1}{q_{k-1} + q_k} \geq \frac{1}{q_{k-1} + a_k q_k} = \frac{1}{q_{k+1}},$$

dove si è usato che  $a_k \geq 1$  (cfr. l'esercizio 27).]

**Esercizio 34** Sia  $\{p_k/q_k\}$  la successione dei convergenti di un numero irrazionale  $x$ . Si dimostri che per ogni  $k \geq 0$  si ha

$$|qx - p| > |q_kx - p_k|$$

per ogni  $p, q \in \mathbb{N}$  tali che  $0 < q < q_{k+1}$  e  $q \neq q_k$ . [*Soluzione.* Si definiscano  $\mu, \nu$  tali che

$$\begin{cases} p = \mu p_{k+1} + \nu p_k, \\ q = \mu q_{k+1} + \nu q_k. \end{cases}$$

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} q_k & -p_k \\ -q_{k+1} & p_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

dove abbiamo tenuto conto che il determinante della matrice vale  $(-1)^k$  (cfr. l'esercizio 19), quindi  $\mu$  e  $\nu$  sono interi. Non si può avere  $\nu = 0$ , perché questo implicherebbe  $p = \mu p_{k+1}$  e  $q = \mu q_{k+1}$ , con  $\mu \geq 1$ ,

mentre stiamo supponendo  $q < q_{k+1}$ . Se  $\mu = 0$  si ha  $p = \nu p_k$  e  $q = \nu q_k$ , con  $\nu \geq 2$  (poiché  $q \neq q_k$  per ipotesi), così che

$$|qx - p| \geq 2|q_k x - p_k| > |q_k x - p_k|$$

che implica il risultato. Infine, se entrambi  $\mu$  e  $\nu$  sono non nulli, essi devono avere segno opposto (poiché  $q < q_{k+1}$ ). Poiché anche  $q_{k+1}x - p_{k+1}$  e  $q_k x - p_k$  hanno segno opposto (cfr. l'esercizio 21), ne segue che  $\mu(q_{k+1}x - p_{k+1})$  e  $\nu(q_k x - p_k)$  hanno lo stesso segno. Poiché  $|\mu|, |\nu| \geq 1$  nel caso che stiamo considerando, si ottiene

$$\begin{aligned} |qx - p| &= |\mu(q_{k+1}x - p_{k+1}) + \nu(q_k x - p_k)| = |\mu(q_{k+1}x - p_{k+1})| + |\nu(q_k x - p_k)| \\ &\geq |q_{k+1}x - p_{k+1}| + |q_k x - p_k| > |q_k x - p_k|, \end{aligned}$$

che dimostra l'asserto anche in questo caso.]

**Esercizio 35** Si dimostri che un numero razionale  $p/q$  è una delle migliori approssimazioni di un numero irrazionale  $x$  se e solo se  $p/q$  è un convergente di  $x$ . [Soluzione. L'esercizio 34 comporta che ogni convergente di  $x$  è una delle migliori approssimazioni razionali di  $x$ . Questo e il risultato dell'esercizio 32 implicano l'asserto.]

**Esercizio 36** Sia  $\omega = (1, \alpha)$  un vettore diofanteo in  $\mathbb{R}^2$  con esponente  $\tau$  e siano  $p_k/q_k$  i convergenti di  $\alpha$ . Si dimostri che esiste una costante  $C_0$  tale che  $q_{k+1} < C_0 q_k^\tau \forall k \in \mathbb{N}$ . [Soluzione. Le stime dell'esercizio 31 assicurano che, per  $k \geq 1$ ,

$$|q_k \alpha - p_k| = q_k \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

da cui si deduce anche che, se definiamo  $\nu_k := (-p_k, q_k)$ , si ha  $q_k < |\nu_k| \leq q_k \sqrt{1 + 4\alpha^2}$ . Infatti, per  $k \geq 1$ , si ha  $q_{k+1} \geq q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq a_2 a_1 + 1 \geq 2$  (cfr. l'esercizio 18), così che  $|q_k \alpha - p_k| < 1/2$ ; si ha perciò  $|p_k| \leq |q_k \alpha| + 1/2 \leq 2|q_k \alpha|$ , essendosi tenuto conto che  $|q_k \alpha| > 1/2$  se  $p_k \neq 0$ . Pertanto la condizione diofantea (84.20) dà

$$|q_k \alpha - p_k| = |\langle \omega, \nu_k \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu_k|^\tau} > \frac{\gamma}{(1 + 4\alpha^2)^{\tau/2} q_k^\tau}.$$

Unendo le due disequazioni otteniamo  $q_{k+1} \leq C_0 q_k^\tau$ , dove  $C_0 = \gamma^{-1}(1 + 4\alpha^2)^{\tau/2}$ .]

**Esercizio 37** Fissato  $\tau \geq 1$ , si consideri la frazione continua infinita  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  costruita ricorsivamente nel modo seguente. Il numero  $a_0$  è arbitrario. Per  $k \geq 0$ , sia  $a_{k+1} \geq 1$  il più piccolo intero tale  $a_{k+1} q_k + q_{k-1} \geq q_k^\tau$ . Si dimostri che il vettore  $\omega = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ , con  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , è diofanteo con esponente  $\tau$ . [Suggerimento. Si noti innanzitutto che la definizione dei quozienti parziali è ben posta perché al passo  $k$  i quozienti parziali  $a_0, \dots, a_k$ , e quindi i convergenti  $p_0/q_0, \dots, p_k/q_k$ , sono già determinati; inoltre  $q_{k-1} < q_k$ . Per definizione di  $a_{k+1}$  si ha  $(a_{k+1} - 1)q_k + q_{k-1} < q_k^\tau$ , quindi  $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} < q_k^\tau + q_k < 2q_k^\tau$ . Di conseguenza si ha

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{2q_k q_{k+1}} > \frac{1}{4q_k^{\tau+1}} \quad \implies \quad |q_k \alpha - p_k| > \frac{1}{2q_{k+1}} > \frac{1}{4q_k^\tau}.$$

quindi, tenendo conto che i convergenti sono le migliori approssimazioni di  $\alpha$  (cfr. l'esercizio 35), concludiamo che  $\omega$  è diofanteo con esponente  $\tau$ .]

**Esercizio 38** Si dimostri che l'insieme dei numeri irrazionali contenuti nell'intervallo  $[0, 1]$  con quozienti parziali limitati ha misura di Lebesgue nulla. [Soluzione. Identificando ogni numero  $x \in [0, 1]$  con la frazione continua che lo rappresenta, l'insieme

$$E_n(k_1, \dots, k_n) := \{x \in [0, 1] : a_1 = k_1, \dots, a_n = k_n\}$$

rappresenta l'insieme dei numeri nell'intervallo  $[0, 1]$  (quindi con  $a_0 = 0$ ) che hanno i primi  $n$  quozienti parziali fissati ai valori  $k_1, \dots, k_n$ , rispettivamente. I numeri  $x \in E_n(k_1, \dots, k_n)$  sono della forma

$$x = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n + \xi_n}}},$$

dove  $\xi_n \in (0, 1)$  (cfr. l'algoritmo descritto nella soluzione dell'esercizio 27). Possiamo scrivere (cfr. l'esercizio 17)

$$x = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n + \xi_n}}} = [0, k_1, k_2, \dots, k_n + \xi_n] = [0, k_1, k_2, \dots, k_n, r_{n+1}],$$

dove  $r_{n+1} = 1/\xi_n \geq 1$ , e quindi (cfr. l'esercizio 18)

$$x = \frac{r_{n+1}p_n + p_{n-1}}{r_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \quad \text{dove} \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}], \quad \frac{p_n}{q_n} = [0, k_1, k_2, \dots, k_n].$$

L'espressione trovata per  $x$  è una funzione decrescente in  $r_{n+1}$ , quindi, poiché  $r_{n+1} \geq 1$ ,  $x$  è compreso nell'intervallo di estremi  $p_n/q_n$  e  $(p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$  ( $x$  tende al primo estremo per  $r_{n+1} \rightarrow +\infty$  ed è uguale al secondo per  $r_{n+1} = 1$ ), dove  $p_n/q_n < (p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$  se  $n$  è pari e  $p_n/q_n > (p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$  se  $n$  è dispari (cfr. gli esercizi 20 e 29). Ne segue che  $E_n(k_1, \dots, k_n)$  è un intervallo di lunghezza (i.e. misura di Lebesgue)

$$|E_n(k_1, \dots, k_n)| = \left| \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Per ogni  $k \geq 1$ , sia  $E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)$  l'insieme dei numeri in  $E_n(k_1, \dots, k_n)$  che hanno  $a_{n+1} = k$ . Se  $x \in E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)$  si ha  $p_{n+1}/q_{n+1} = [0, k_1, k_2, \dots, k_n, k]$ . Di conseguenza, ragionando come sopra, e utilizzando il fatto che  $p_{n+1} = kp_n + p_{n-1}$  e  $q_{n+1} = kq_n + q_{n-1}$ , si trova

$$|E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)| = \left| \frac{p_{n+1} + p_n}{q_{n+1} + q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_{n+1}^2 \left(1 + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)} = \frac{1}{q_n^2 k^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{kq_n}\right) \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{q_{n-1}}{kq_n}\right)},$$

da cui si ricava

$$\frac{|E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)|}{|E_n(k_1, \dots, k_n)|} = \frac{1 + \frac{q_{n+1}}{q_n}}{k^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{kq_n}\right) \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{q_{n-1}}{kq_n}\right)}.$$

Dal momento che

$$1 < 1 + \frac{1}{k} + \frac{q_{n-1}}{kq_n} < 3, \quad 1 < 1 + \frac{q_{n+1}}{q_n} < 2, \quad 1 < 1 + \frac{q_{n+1}}{kq_n} < 2,$$

risulta

$$\frac{1}{3k^2} < \frac{|E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)|}{|E_n(k_1, \dots, k_n)|} < \frac{2}{k^2}.$$

Si noti che, poiché gli intervalli  $E_n(k_1, \dots, k_n)$  sono disgiunti, si ha

$$\begin{aligned} \bigcup_{k_1, \dots, k_n \geq 1} E_n(k_1, \dots, k_n) = [0, 1] &\implies \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 1} |E_n(k_1, \dots, k_n)| = 1, \\ \bigcup_{k \geq 1} E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k) = E_n(k_1, \dots, k_n) &\implies \sum_{k \geq 1} |E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)| = |E_n(k_1, \dots, k_n)|. \end{aligned}$$

Fissato un intero  $M > 0$ , definiamo

$$\begin{aligned} J_M &:= \{x \in [0, 1] : a_k < M \quad \forall k \in \mathbb{N}\}, \\ J_M(n) &:= \{x \in [0, 1] : a_k < M \quad \forall k = 1, \dots, n\}, \\ J &:= \bigcup_{M=1}^{\infty} J_M. \end{aligned}$$

Utilizzando la stima precedente abbiamo (cfr. l'esercizio 8)

$$\sum_{k \geq M} |E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)| > \frac{|E_n(k_1, \dots, k_n)|}{3} \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2} > \frac{|E_n(k_1, \dots, k_n)|}{3} \int_{M+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{|E_n(k_1, \dots, k_n)|}{3(M+1)},$$

così che

$$\sum_{k < M} |E_{n+1}(k_1, \dots, k_n, k)| < \delta |E_n(k_1, \dots, k_n)|, \quad \delta := 1 - \frac{1}{3(M+1)}.$$

Ne deduciamo che

$$|J_M(n+1) \cap E_n(k_1, \dots, k_n)| < \delta |E_n(k_1, \dots, k_n)|,$$

così che

$$|J_M(n+1)| = \sum_{k_1, \dots, k_n < M} |J_M(n+1) \cap E_n(k_1, \dots, k_n)| < \delta \sum_{k_1, \dots, k_n < M} |E_n(k_1, \dots, k_n)| = \delta |J_M(n)|,$$

Ripetendo l'argomento  $n$  volte arriviamo a

$$|J_M(n+1)| \leq \delta^n |J_M(1)| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |J_M(n)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |J_M| = 0,$$

dove abbiamo usato che  $J_M \subset J_M(n) \forall n \geq 1$ . Vediamo allora che  $J$  è l'insieme di tutti i numeri  $x \in [0, 1]$  che hanno quozienti parziali limitati. Per ogni  $x \in J$  esiste  $M > 0$  tale che  $x \in J_M$ . Quindi

$$|J| \leq \sum_{M=1}^{\infty} |J_M| = 0,$$

che completa la dimostrazione.]

**Esercizio 39** Si dimostri che, fissato un qualsiasi intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , l'insieme dei numeri irrazionali contenuti in  $I$  con quozienti parziali limitati ha misura di Lebesgue nulla. [*Suggerimento.* Dato un intervallo  $I$ , siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  tali che  $I \subset [a, b]$ . Dividiamo  $[a, b]$  in  $N$  intervalli  $I_1, \dots, I_N$  tali che  $I_1 = [a, a+1]$ ,  $I_2 = [a+1, a+2]$ ,  $\dots$ ,  $I_N = [b-1, b]$ . Per ogni  $m = 1, \dots, N$ , ragionando come nella soluzione dell'esercizio precedente, si trova che l'insieme dei numeri in  $I_m$  che hanno quozienti limitati ha misura nulla (l'unica differenza è che ora  $a_0$  è uguale all'estremo di sinistra dell'intervallo).]

**Esercizio 40** Siano  $p_k/q_k$  i convergenti del numero irrazionale  $x$ . Si dimostri che esiste una costante positiva  $C$  tale che  $q_{k+1} \leq Cq_k \forall k \geq 0$  se e solo se i quozienti parziali di  $x$  sono limitati. [*Soluzione.* Se i quozienti parziali di  $x$  sono limitati, esiste  $M > 0$  tale che  $a_k < M \forall k \in \mathbb{N}$ ; quindi si ha

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} < Mq_k + q_{k-1} < (M+1)q_k, \quad k \geq 1,$$

e  $q_1 = a_1 \leq M = Mq_0 < (M+1)q_0$ . Viceversa, se  $q_{k+1} \leq Cq_k \forall k \geq 0$  si ha  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} > a_k q_{k-1}$  e quindi  $a_k < q_k/q_{k-1} \leq C$  per ogni  $k \geq 2$  e  $a_1 = q_1 \leq Cq_0 = C$ ; in conclusione si ha  $a_k \leq C \forall k \in \mathbb{N}$ .]

**Esercizio 41** Si dimostri che un vettore  $\omega = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$  è diofanteo con esponente  $\tau = 1$  se e solo se i quozienti parziali di  $\alpha$  sono limitati. Se ne deduca che la misura dei vettori  $\omega \in \mathbb{R}^2$  che soddisfano la condizione diofantea con esponente  $\tau = 1$  ha misura di Lebesgue nulla. [*Soluzione.* Supponiamo per semplicità che sia  $\alpha > 0$  (se  $\alpha < 0$  si ragiona in modo analogo). Siano  $p_k/q_k$  i convergenti di  $\alpha$  e poniamo  $\nu_k := (-p_k, q_k)$ . Se  $\omega$  è diofanteo con esponente  $\tau = 1$ , si ha

$$\frac{\gamma}{|\nu_k|} < |\langle \omega, \nu_k \rangle| = |q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}, \quad k \geq 1,$$

che implica  $q_{k+1} < C_0 q_k \forall k \geq 1$ , con  $C_0 = \gamma^{-1} \sqrt{1 + 4\alpha^2}$  e quindi (cfr. l'esercizio 40) i quozienti parziali di  $\alpha$  sono limitati. Viceversa, se i quozienti parziali di  $\alpha$  sono limitati, si ha  $q_{k+1} \leq C q_k \forall k \in \mathbb{N}$  per un'opportuna costante  $C$  (di nuovo per l'esercizio 40), così che

$$|\langle \omega, \nu_k \rangle| = |q_k \alpha - p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}} \geq \frac{1}{(1+C)q_k} > \frac{\gamma_0}{|\nu_k|},$$

dove  $\gamma_0 := 1/(C+1)$ . Per ogni  $\nu = (-m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , si ha  $\langle \omega, \nu \rangle = n\alpha - m$ . Per  $n \neq 0$  fissato sia  $k$  tale  $q_k \leq |n| < q_{k+1}$ . Per l'esercizio 34 si ha

$$|n\alpha - m| \geq |q_k \alpha - p_k| > \frac{1}{(1+C)q_k} \geq \frac{1}{(1+C)|n|} \geq \frac{\gamma_0}{|\nu|},$$

quindi  $\omega$  soddisfa la condizione diofantea (84.20) con  $\gamma = \gamma_0$  ed esponente  $\tau = 1$ . In conclusione  $\omega$  è diofanteo con esponente  $\tau$  se e solo se i quozienti parziali di  $\alpha$  sono limitati. Ne segue che, fissato un qualsiasi intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , la misura dei valori di  $\alpha \in I$  tali che  $(1, \alpha)$  è diofanteo con esponente  $\tau = 1$  è nulla. Infine, nel caso generale in cui si abbia  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , poiché  $\omega = \omega_1(1, \alpha)$ , dove  $\alpha = \omega_2/\omega_1$ , si vede che il vettore  $\omega$  è diofanteo con esponente  $\tau$  se e solo se lo è  $\omega_0 := (1, \alpha)$ .]

**Esercizio 42** Si dimostri che non esistono vettori  $\omega \in \mathbb{R}^2$  che verificano la condizione diofantea (84.20) con  $\tau < 1$ . [Soluzione. Sia  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  e siano  $p_k/q_k$  i convergenti di  $\alpha := \omega_2/\omega_1$ . Supponiamo per assurdo che si abbia  $|\langle \omega, \nu \rangle| > \gamma/|\nu|^\tau$ , con  $\tau < 1$ , per ogni  $\nu \in \mathbb{Z}^2$  non nullo. Si avrebbe allora, per  $\nu_k = (-p_k, q_k)$ ,

$$\frac{\gamma_0}{q_k^\tau} < \frac{\gamma}{|\nu_k|^\tau} < |\langle \omega, \nu_k \rangle| = |\omega_1| |q_k \alpha - p_k| < \frac{|\omega_1|}{q_{k+1}},$$

dove  $\gamma_0 := \gamma(1 + 4\alpha^2)^{-\tau/2}$ , e quindi  $q_{k+1} < C_0 q_k^\tau$ , con  $C_0 = |\omega_1|/\gamma_0$ . Per  $k$  sufficientemente grande, si avrebbe  $q_{k+1} < q_k$ , che è in contraddizione con la relazione  $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} > q_k$ .]

**Esercizio 43** Si dimostri che  $\sqrt{2}$  è irrazionale e se ne trovi la rappresentazione in frazioni continue. [Suggerimento. Si supponga per assurdo che esistano  $p/q \in \mathbb{N}$ , primi tra loro, tali che  $\sqrt{2} = p/q$ . Si avrebbe allora  $2q^2 = p^2$ , così che  $p^2$  e quindi  $p$  dovrebbe essere divisibile per 2. Ne seguirebbe  $p = 2m$ , per qualche  $m \in \mathbb{N}$ , e dunque  $q^2 = 2m^2$ : anche  $q$  dovrebbe essere divisibile per 2, contro l'ipotesi che  $p$  e  $q$  siano primi tra loro. Per trovarne la rappresentazione in frazioni continua si scriva

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \end{aligned}$$

da cui si ottiene  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$ , i.e.  $a_k = 2 \forall k \geq 1$ .

**Esercizio 44** Si dia un esempio di sistema hamiltoniano degenerare non isocrono. [Suggerimento Si consideri l'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0(J) = J_1^3 - J_2^3$  per  $n = 2$ : il determinante in (84.23) si annulla lungo la retta  $J_1 = J_2$ .]

**Esercizio 45** Si verifichi che il sistema hamiltoniano a due gradi di libertà descritto dall'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0(J) = J_1^2 + J_2$  è degenerare ma non isocrono.

**Esercizio 46** Si dia un esempio di sistema hamiltoniano con hamiltoniana  $\mathcal{H}_0(J)$  quadratica nelle  $J$  tale che il determinante in (84.23) si annulli identicamente. [Suggerimento. Si consideri  $\mathcal{H}_0(J) = (J_1 + J_2)^2$  per  $n = 2$ .]

**Esercizio 47** Si dimostri che la serie di Fourier (84.18) converge in  $D(\rho, \xi/2, J_0)$  se  $\omega = \omega(J')$  soddisfa la condizione diofantea (84.20) per ogni  $J' \in B_\rho(J_0)$ . [Suggerimento. Sotto l'ipotesi che si abbia  $|\langle \omega(J'), \nu \rangle| > \gamma/|\nu|^{-\tau}$  per ogni  $\nu \neq 0$  e per ogni  $J \in B_\rho(J_0)$ , si trova

$$\max_{(\varphi, J') \in D(\rho, \xi/2, J_0)} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \left| e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1, \nu}(J') \right| \leq \Phi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{|\nu| \xi/2} |\nu|^\tau e^{-\xi |\nu|} \leq \Phi A 2^{n+\tau} \xi^{-n-\tau},$$

dove  $A$  è una costante, calcolabile esplicitamente (cfr. l'esercizio 9), che dipende da  $\tau$  e  $n$ .]

**Esercizio 48** Si dimostri la stima (84.24) se si sceglie  $N = N_0(\varepsilon)$  in accordo con la (84.25). [*Suggerimento.* Si ha, per  $|\Im(\varphi_i)| \leq \xi/2$ ,

$$|V^{>N}(\varphi, J)| \leq \Phi \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N}} e^{-\xi|\nu|/2} \leq C_2 \Phi e^{-\xi N/4}, \quad C_2 := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{-\xi|\nu|/4} \leq A4^n \xi^{-n},$$

dove si è usato l'esercizio 9 per stimare l'ultima somma. La stima segue allora con  $C_1 = C/C_2\Phi$ .]

**Esercizio 49** Si dimostri che la funzione  $N_k$  in (85.3) ha la forma (85.4). [*Soluzione.* La funzione caratteristica di Hamilton  $W$  in (85.2) risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right\rangle + \varepsilon V \left( \varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') + O(\varepsilon^{k_0+1}).$$

Se prendiamo la formula di Taylor di  $V$  intorno a  $(\varphi, J)$ , otteniamo (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3)

$$V \left( \varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \sum_{a_1, \dots, a_n=0}^{\infty} \frac{1}{a_1! \dots a_n!} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_n}}{\partial J_1^{a_1} \dots \partial J_n^{a_n}} V(\varphi, J') \left( \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_1} \right)^{a_1} \dots \left( \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_n} \right)^{a_n},$$

dove ogni termine

$$\left( \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_i} \right)^{a_i}$$

va interpretato come 1 se  $a_i = 0$  (i.e. se  $V$  non è derivato rispetto alla variabile  $J_i$ ). Scrivendo esplicitamente, se  $a_i \geq 1$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_i} \right)^{a_i} = \sum_{k_{i1}=1}^{k_0} \dots \sum_{k_{ia_i}=1}^{k_0} \varepsilon^{k_{i1}+\dots+k_{ia_i}} \frac{\partial W_{k_{i1}}}{\partial \varphi_i} \dots \frac{\partial W_{k_{ia_i}}}{\partial \varphi_i},$$

per  $i = 1, \dots, n$ , e ponendo  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $|a| = a_1 + \dots + a_n$ ,  $a! = a_1! \dots a_n!$  e  $\partial J^a = \partial J_1^{a_1} \dots \partial J_n^{a_n}$ , troviamo

$$V \left( \varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \sum_{a_1, \dots, a_n=0}^{\infty} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum^* \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} \varepsilon^{k_{ij}} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i},$$

dove la somma  $\sum^*$  è su  $k_{ij}$ , per  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, a_i$ , con  $k_{ij} \geq 1$  se  $a_i > 0$  e  $k_{ij} = 0$  se  $a_i = 0$ ; se  $k_{ij} = 0$  il termine  $\partial W_{k_{ij}}/\partial \varphi_i$  va interpretato come 1. Se scriviamo

$$\varepsilon V \left( \varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N_k(\varphi, J'),$$

la funzione  $N_k(\varphi, J')$  è quindi data dai contributi dell'espansione trovata tali che

$$k_{11} + \dots + k_{1a_1} + k_{21} + \dots + k_{2a_2} + \dots + k_{n1} + \dots + k_{na_n} = k - 1.$$

Da qui segue l'asserto.]

**Esercizio 50** Si calcolino le funzioni  $N_k$  in (85.4) per  $k = 1, 2, 3$ . [Soluzione. Per  $k = 1$ , si ha  $a_1 = \dots = a_n = 0$  e quindi  $N_1 = V$ ; in tal caso l'equazione (85.3) si riduce all'equazione (84.15). Per  $k = 2$ , si ha che un solo  $k_{ij}$  vale 1 e tutti gli altri sono 0; quindi se  $a_i = 1$  per qualche  $i = 1, \dots, n$  risulta  $a_j = 0 \forall j \neq i$ , così che si ha

$$N_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial J_i} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle.$$

Per  $k = 3$ , poiché la somma dei  $k_{ij}$  è 2, sono possibili due casi: uno dei  $k_{ij}$  vale 2 e tutti gli altri sono nulli oppure due dei  $k_{ij}$  valgono 1 e tutti gli altri sono nulli. Nel primo caso si ha  $a_i = 1$  e  $a_j = 0 \forall j \neq i$ , per qualche  $i = 1, \dots, n$  (e  $k_{i1} = 1$ ), mentre nel secondo si hanno due sottocasi:  $a_i = 2$  e  $a_j = 0 \forall j \neq i$  (e  $k_{i1} = k_{i2} = 1$ ) oppure  $a_i = a_j = 1$  per  $i \neq j$  e  $a_h = 0 \forall h \neq i, j$  (e  $k_{i1} = k_{j1} = 1$ ). Se ne deduce che

$$N_3 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial J_i} \frac{\partial W_2}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial J_i^2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial^2 V}{\partial J_i \partial J_j} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_j}.$$

Si noti che  $N_k$  è sempre funzioni di coefficienti  $W_{k'}$  con  $k' < k$ .]

**Esercizio 51** Data una funzione  $f(z)$ , analitica in un aperto  $D \subset \mathbb{C}$  e continua sulla frontiera  $\partial D$ , si ha (cfr. l'esercizio 29 del capitolo 11)

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

dove l'integrale è esteso alla curva  $\partial D$ . Se ne deduca che, se  $D' \subset D$  e  $z \in D'$ , si ha

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) \right| \leq \frac{M}{\delta^n},$$

dove  $M$  è il massimo del modulo di  $f(z)$  in  $D$  e  $\delta$  è la distanza tra  $D'$  e  $\partial D$ , e si utilizzi il risultato per dimostrare le (85.8) e (85.18).

**Esercizio 52** Si dimostrino le (85.9). [Soluzione. Utilizzando la seconda delle (85.7) e ragionando come per la (85.8), si trova

$$\max_{(\varphi, J) \in D_1} \left| \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq \sum_{\nu \neq 0} \gamma^{-1} |\nu|^\tau |\nu V_\nu(J)| e^{(\xi - \delta)|\nu|} \leq B_0 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n - \tau},$$

dove  $B_0$  è una costante positiva. Da qui segue la (85.9a). Allo stesso modo, utilizzando la prima delle (85.7), si ha

$$\max_{(\varphi, J) \in D_1} \left| \frac{\partial W_1}{\partial J}(\varphi, J) \right| \leq \sum_{\nu \neq 0} \gamma^{-1} |\nu|^\tau \left| \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J) \right| e^{(\xi - \delta)|\nu|} \leq B_0 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n - \tau},$$

che dà la (85.9b).]

**Esercizio 53** Si dimostri la (85.10).

**Esercizio 54** Si dimostri che la condizione (85.10) permette di risolvere le (85.12) con il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Definendo  $G(J, J', \varphi) := J' - J + \varepsilon(\partial W_1/\partial \varphi)(\varphi, J')$ , si considera l'equazione  $G(J, J', \varphi) = 0$ . Si ha allora  $\partial G/\partial J' = \mathbf{1} + \varepsilon(\partial^2 W_1/\partial \varphi \partial J)$  e quindi, tenuto conto che  $\det(\mathbf{1} + O(\varepsilon)) = 1 + O(\varepsilon)$  (cfr. la (71.20) e l'esercizio 22 del capitolo 16), si ha  $|\det(\partial G/\partial J')| \geq 1/2$  purché  $\varepsilon B_3 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau-1} < 1/2$ , per qualche costante positiva  $B_3$ .]

**Esercizio 55** Si dimostri la (85.16). [*Soluzione.* Dimostriamo innanzitutto per induzione che, se  $k = k_1 + \dots + k_s$  e  $k_1, \dots, k_s \geq 1$ , si ha  $k_1! \dots k_s! \leq (k - (s - 1))!$  Per  $s = 1$  la stima è ovvia. Per  $s = 2$ , se  $k_2 = 1$  si ha  $(k_1 + k_2 - 1)! = k_1! = (k - 1)!$ , se invece  $k_2 \geq 2$  si ha

$$(k_1 + k_2 - 1)! = k_1!(k_1 + 1) \dots (k_1 + (k_2 - 1)) \geq k_1!(2 \dots k_2) = k_1!k_2!$$

Per  $s > 2$  si ha

$$k_1! \dots k_s! \leq k_1! \dots k_{s-1}! k_s! \leq (\tilde{k} - (s - 2))! k_s! \leq (\tilde{k} + k_s - (s - 2) - 1)!,$$

dove  $\tilde{k} = k_1 + \dots + k_{s-1} = k - k_s$ . Questo completa la dimostrazione induttiva. La somma su  $k_1! \dots k_s!$  con i vincoli sopra si può quindi stimare con il numero di modi di scegliere  $s - 1$  numeri tra  $k$  per il massimo di  $k_1! \dots k_s!$ , quindi

$$\sum_{\substack{k_1, \dots, k_s \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_s = k}} k_1! \dots k_s! \leq \binom{k}{s-1} (k - (s - 1))! \leq k!,$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 56** Si dimostri la (85.17). [*Soluzione.* Poiché  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  e  $a_1 + \dots + a_n = p$ , esiste  $m \in \mathbb{N}$ , con  $1 \leq m \leq n$ , tale che  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \geq 1$  e  $a_{i_1} + \dots + a_{i_m} = p$ , mentre i restanti  $a_i$  sono nulli. La somma su  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  che verificano tali condizioni si può stimare con la somma dei possibili modi di fissare  $m$  punti tra  $p$  dati. Infine si può stimare

$$\binom{p}{m} \leq 2^p \implies \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + \dots + a_n = p}} 1 \leq \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \binom{p}{m} \leq 2^p \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} = 2^p 2^n.$$

Si noti che la somma si può anche stimare come indicato nell'esercizio 5.]

**Esercizio 57** Si dimostri la (85.20).

**Esercizio 58** Si dimostri che  $k^k e^{-k} \leq k! \leq k^k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . [*Suggerimento.* Si osservi che  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \leq k \cdot k \cdot k \dots k = k^k$  per dimostrare la stima dall'alto e che

$$\frac{k^k}{k!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = e^k \implies k^k e^{-k} \leq k!$$

per dimostrare la stima dal basso (cfr. anche l'esercizio 6). In alternativa si può usare la formula di Stirling (cfr. l'esercizio successivo).]

**Esercizio 59** Si utilizzi la formula di Sterling dell'esercizio 16 per dedurre le stime dell'esercizio 58. [Soluzione. La stima  $n! \geq n^n e^{-n}$  si ottiene banalmente notando che  $\sqrt{2\pi n} n^n \geq 1$ . Per ottenere la stima  $n! \leq n^n$  basta osservare che la funzione  $x \mapsto \sqrt{x} e^{-(x-1)} e^{1/12x}$  è decrescente in  $[1, +\infty)$ , così che  $n! \leq n^n \sqrt{2\pi/e} < n^n$ .]

**Esercizio 60** Si dimostri la (85.21). [Suggerimento. Poiché  $\mathcal{H}'(\varphi', J') = \mathcal{H}(\varphi, J)$ , si ha

$$\begin{aligned} V'(\varphi', J') &:= \mathcal{H}'(\varphi', J') - \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') \right] + \left[ \varepsilon V\left(\varphi, J' + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}\right) - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k \right], \end{aligned}$$

dove i termini nelle prime parentesi quadre si cancellano in virtù della (85.3), mentre

$$\varepsilon V\left(\varphi, J' + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}\right) - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{a_1, \dots, a_n \geq 0} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum'_{k-1} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}.$$

Usando la stima (85.13) sulle funzioni  $W_k$ , con  $A = \rho\delta/4$ , si trova

$$|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq \|V\|_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{2A}{\rho\delta}\right)^p \sum'_{k-1} (\varepsilon k_0 B \delta^{-\beta})^k,$$

dove si è usato che  $k_{ij} \leq k_0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, a_i$ , così che

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! \leq \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}^{k_{ij}} \leq \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} k_0^{k_{ij}} \leq k_0^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{a_i} k_{ij}} \leq k_0^{k-1} \leq k_0^k$$

dove si è usato l'esercizio 58. Poiché  $k_{ij} \geq 1$ , si ha inoltre (cfr. la soluzione dell'esercizio 56)

$$\sum'_{k-1} \leq \binom{k-1}{p} \leq 2^{k-1} < 2^k.$$

Fissando  $k_0 = N(\varepsilon)$  e  $\delta = (1/2N(\varepsilon)) \min\{\xi, 1\}$ , si trova

$$|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq \|V\|_0 2^n \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (2\varepsilon k_0 B \delta^{-\beta})^k \leq b_2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (b_3(N(\varepsilon))^{1+\beta} \varepsilon)^k,$$

per opportune costanti  $b_2$  e  $b_3$ . Se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo, così che  $b_3(N(\varepsilon))^{1+\beta} \varepsilon < 1/2$ , si ottiene  $|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq 2b_2(b_3(N(\varepsilon))^{1+\beta} \varepsilon)^{N(\varepsilon)+1}$ , da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 61** Si discuta come cambiano le stime (85.13) qualora si definiscano i domini  $D_k$  come  $D_k = D(\rho_k, \xi_k, J_0)$ , dove  $\rho_{k+1} = \rho_k - \rho\Delta_k$  e  $\xi_{k+1} = \xi_k - \Delta_k$ , con  $\rho_0 = \rho$  e  $\xi_0 = \xi$ , e  $\Delta_k = \delta_1 + \dots + \delta_k$ , con  $\delta_k = \delta_0/k^2$ . [Suggerimento. La stima (85.13) va sostituita con

$$\max_{(\varphi, J) \in D_k} \left| \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq AB^k (k!)^{2\beta} \delta_0^{-\beta k}, \quad \beta = \tau + n + 1,$$

con  $A$  come in (85.14) e  $B$  opportuno. La dimostrazione è per induzione. Si procede come nella dimostrazione del lemma 85.1, con le seguenti modifiche: in (85.18) dobbiamo scrivere  $\delta_1$  anziché  $\delta$  e nella seconda riga di (85.15) dobbiamo sostituire  $1/(\rho\delta)^{p-1}$  con  $1/(\rho\delta_1)^{p-1}$ ,  $\delta^{-k}$  con  $\delta_0^{-\beta k}$  e  $k_{ij}!$  con  $(k_{ij}!)^{2\beta}$ . Ragionando come nell'esercizio 55 si trova

$$\sum_k' \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{a_i} (k_{ij}!)^{2\beta} \leq \binom{k}{s-1} ((k-(s-1))!)^{2\beta} \leq (k!)^{2\beta},$$

dove  $s$  è il numero dei  $k_{ij} \neq 0$  su cui si somma. Infine in (85.20) dobbiamo sostituire  $\delta^{-\tau-n-1} = \delta^{-\beta}$  con  $(k+1)^{2\beta} \delta_0^{-\beta}$ , così che, utilizzando il fatto che  $(k+1)^{2\beta} (k!)^{2\beta} = ((k+1)!)^{2\beta}$  e scegliendo  $B$  in modo opportuno si ottiene la stima dell'asserto.]

**Esercizio 62** Si mostri che è possibile definire le funzioni  $W_k$  in (85.2) all'interno di uno stesso dominio  $D(\rho/2, \xi/2, J_0)$  e si discuta come procedere per stimarne le norme. [Soluzione. La (85.3) si può risolvere passando allo spazio di Fourier,

$$W_k(\varphi, J') = - \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \neq 0}} e^{i\langle \varphi, \nu \rangle} \frac{N_{k,\nu}}{i \langle \omega, \nu \rangle},$$

dove  $N_{k,\nu}$  è espresso in termini di coefficienti di Fourier  $W_{k',\nu'}$ , con  $k' < k$  e  $\nu' \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ . Per esempio si ha (cfr. l'esercizio 50)  $N_{1,\nu} = V_\nu$  per  $k = 1$ ,

$$N_{2,\nu} = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}^n \\ \nu' + \nu'' = \nu}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial J_i} i \nu_i'' W_{1,\nu''}$$

per  $k = 2$  e

$$\begin{aligned} N_{3,\nu} &= \sum_{\substack{\nu', \nu'' \in \mathbb{Z}^n \\ \nu' + \nu'' = \nu}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial J_i} i \nu_i'' W_{2,\nu''} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu', \nu'', \nu''' \in \mathbb{Z}^n \\ \nu' + \nu'' + \nu''' = \nu}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i^2} (i \nu_i'') (i \nu_i''') W_{1,\nu''} W_{1,\nu'''} \\ &+ \sum_{\substack{\nu', \nu'', \nu''' \in \mathbb{Z}^n \\ \nu' + \nu'' + \nu''' = \nu}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i \partial J_j} (i \nu_i'') (i \nu_j''') W_{1,\nu''} W_{1,\nu'''} \end{aligned}$$

per  $k = 3$ . Quindi  $W_1$  è scritta in termini di  $V$ ;  $W_2$  è scritta in termini di  $V$  e  $W_1$ , così che, esprimendo  $W_1$  in termini di  $V$ , si ottiene per  $W_2$  un'espressione in cui l'unica funzione che compare è  $V$ ;  $W_3$  è scritta in termini di  $V$ ,  $W_1$  e  $W_2$ , così che, esprimendo  $W_1$  e  $W_2$  in termini di  $V$ , si ottiene anche per  $W_2$  un'espressione in cui l'unica funzione che compare è  $V$ ; e così via. In conclusione ogni coefficiente  $W_{k,\nu}$  è espresso come somma di contributi in cui compaiono  $s$  coefficienti di Fourier di derivate della funzione  $V$  con indici  $\nu_1, \dots, \nu_s$ , con  $s \leq k$ , e  $s$  denominatori della forma  $-1/i \langle \omega, \nu_{s+1} \rangle, \dots, -1/i \langle \omega, \nu_{2s} \rangle$  (i cosiddetti *piccoli divisori*), con  $\nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbb{Z}^n$ , mentre i vettori  $\nu_{s+1}, \dots, \nu_{2s} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  sono dati ciascuno da somme opportune dei vettori  $\nu_1, \dots, \nu_s$ . Per esempio, quando si calcola  $W_{3,\nu}$ , inserendo l'espressione di  $W_{1,\nu''}$  e  $W_{1,\nu'''}$  in termini di  $V_{\nu''}$  e  $V_{\nu'''}$ , rispettivamente, nella somma della seconda riga di  $N_{3,\nu}$ , si trova una somma su  $\nu', \nu'', \nu'''$  di contributi in cui compare il prodotto

$$\frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i \partial J_j} (i \nu_i'') (i \nu_j''') V_{\nu''} V_{\nu'''},$$

ovvero il prodotto dei coefficienti di Fourier delle derivate  $[\partial^2 V / \partial J_i \partial J_j](\varphi, J)$ ,  $[\partial V / \partial \varphi_i](\varphi, J)$  e  $[\partial V / \partial \varphi_j](\varphi, J)$ , con indici di Fourier  $\nu'$ ,  $\nu''$  e  $\nu'''$ , per il prodotto

$$\left(-\frac{1}{i \langle \omega, \nu' \rangle}\right) \left(-\frac{1}{i \langle \omega, \nu'' \rangle}\right) \left(-\frac{1}{i \langle \omega, \nu''' \rangle}\right),$$

dove  $\nu = \nu' + \nu'' + \nu'''$ . Si possono quindi usare le stime sui coefficienti di Fourier delle derivate della funzione  $V(\varphi, J)$  e la condizione diofantea per stimare i piccoli divisori, per ottenere stime dei coefficienti  $W_{k,\nu}$  del dominio  $D(\rho/2, \xi/2, J_0)$ . Si può formalizzare la discussione appena fatta, a tutti gli ordini, procedendo secondo le linee del §88.]

**Esercizio 63** Si consideri l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = J_1 + \alpha J_2 + \varepsilon (J_2 + F(\varphi_1, \varphi_2)),$$

dove  $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$  è un vettore diofanteo e

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{i \langle \nu, \varphi \rangle} F_\nu$$

è analitica e tale che  $F_\nu > 0 \forall \nu \in \mathbb{Z}^2$ . Si calcoli esplicitamente la serie di Birkhoff. [*Suggerimento.* Si trova  $\mathcal{H}'_1(J') = J'_2$  e  $\mathcal{H}'_k(J') = 0$  per  $k \geq 2$ , mentre

$$W_k(\varphi, J') = - \sum_{\nu \neq 0} e^{i \langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{i \langle \omega, \nu \rangle} \left(-\frac{\nu_2}{\langle \omega, \nu \rangle}\right)^{k-1}$$

per  $k \geq 1$ .]

**Esercizio 64** Si dimostri che i coefficienti di ordine  $k$  della serie di Birkhoff dell'esercizio 63 si stimano proporzionalmente a  $k!^{\tau+1}$ . [*Suggerimento.* Si trova che  $|W_{k,\nu}(J')|$  si stima proporzionalmente a  $|\nu|^{\tau+(k-1)(\tau+1)}$  e si usa che  $(k(\tau+1))! \leq C^k k!^{\tau+1}$  per un'opportuna costante  $C$ .]

**Esercizio 65** Si dimostri che i moti del sistema descritto dall'hamiltoniana  $\mathcal{H}(\varphi, J)$  dell'esercizio 63 divergono linearmente nel tempo per un insieme denso di valori di  $\varepsilon$  e se ne deduca che le serie di Birkhoff divergono. [*Suggerimento.* Si integrano esplicitamente le equazioni di Hamilton

$$\dot{\varphi}_1 = 1, \quad \dot{\varphi}_2 = \alpha + \varepsilon, \quad \dot{J}_1 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1, \varphi_2), \quad \dot{J}_2 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Le equazioni per le variabili angolari danno

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + (\alpha + \varepsilon)t,$$

così che, inserendo le espressioni per  $\varphi$  nelle equazioni per la variabili d'azione e integrando, si ottiene

$$J(t) = J(0) - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{i \langle \varphi(0), \nu \rangle} (i\nu) F_\nu \int_0^t dt' e^{i \langle \omega_\varepsilon, \nu \rangle t'}$$

dove abbiamo posto  $\omega_\varepsilon = (1, \alpha + \varepsilon)$ . Poiché  $F_\nu > 0 \forall \nu \in \mathbb{Z}^n$ , le variabili d'azione crescono linearmente in  $t$  per ogni valore di  $\varepsilon$  tale che  $\langle \omega_\varepsilon, \nu \rangle = 0$  per qualche  $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ : questo succede per un numero denso di valori di  $\varepsilon$ .]

**Esercizio 66** Si consideri l'hamiltoniana dell'esercizio 63. Si dimostri che la soluzione formale dell'equazione di Hamilton-Jacobi è data da

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'(J') &= J'_1 + \alpha J'_2 + \varepsilon J'_2 + \varepsilon F_0, \\ W(\varphi, J') &= \varphi_1 J'_1 + \varphi_2 J'_2 + i\varepsilon \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^2 \\ \nu \neq 0}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{\nu_1 + \nu_2(\alpha + \varepsilon)}.\end{aligned}$$

Se ne deduca che le serie di Birkhoff divergono.

**Esercizio 67** Sia  $\mathcal{H}_0(J)$  un'hamiltoniana non degenere e si ponga  $\omega(J) = [\partial\mathcal{H}_0/\partial J](J)$ . Si dimostri che se la funzione  $J \mapsto A(J)$  è tale che  $\langle A(J), \nu \rangle = 0$  per tutti i vettori  $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  in corrispondenza dei quali si abbia  $\langle \omega(J), \nu \rangle = 0$  allora  $A(J)$  deve essere parallelo a  $\omega(J)$ . [*Suggerimento.* Sia  $\mathcal{A}$  il dominio dell'applicazione  $\omega(J)$ . Sia  $J_1$  tale che  $\langle \omega(J_1), \nu_1 \rangle = 0$  per qualche vettore  $\nu_1 \in \mathbb{Z}^n$ . Quindi  $\omega(J_1)$  giace in un piano ortogonale a  $\nu_1$ . Muovendo un po'  $J$  si trova un valore  $J_2$ , arbitrariamente vicino a  $J_1$ , tale che  $\omega(J_2)$  continua a giacere sullo stesso stesso piano e  $\langle \omega(J_2), \nu_2 \rangle = 0$  per qualche vettore  $\nu_2 \in \mathbb{Z}^n$  ortogonale a  $\nu_1$  ( $J_2$  può essere reso arbitrariamente vicino a  $J_1$  scegliendo  $\nu_2$  arbitrariamente grande). Quindi  $\omega(J_2)$  è ortogonale sia a  $\nu_1$  che a  $\nu_2$ . Iterando, e modificando ogni volta di poco il valore di  $J$ , si trova un valore  $J_n$  tale che  $\langle \omega(J_n), \nu_1 \rangle = \langle \omega(J_n), \nu_2 \rangle = \dots = \langle \omega(J_n), \nu_{n-1} \rangle = 0$  per  $n-1$  vettori  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ . Se imponiamo che sia  $\langle A(J_n), \nu_k \rangle = 0$  per gli stessi vettori  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ , ne deriva che  $A(J_n)$  deve essere parallelo a  $\omega(J_n)$ . Poiché i valori  $J_1$  tali che  $\langle \omega(J_1), \nu \rangle = 0$  per qualche  $\nu \in \mathbb{Z}^n$  sono densi e poiché  $J_n$  può essere reso arbitrariamente vicino a  $J_1$ , ne segue che  $\omega(J_1)$  e  $A(J_1)$  sono paralleli su un insieme denso di vettori  $J_1 \in \mathcal{A}$ . Sotto le ipotesi che  $\omega$  e  $A$  siano funzioni regolari, ne segue che  $\omega(J)$  e  $A(J)$  sono paralleli su tutto  $\mathcal{A}$ .]

**Esercizio 68** Si dimostrino le (86.3) e (86.4). [*Soluzione.* Si ha

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \int d\varphi \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \int d\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \int d\varphi \sin^4 \varphi,$$

e quindi

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right).$$

In particolare si ha  $\langle \sin^4 \varphi \rangle = 3/8$ .]

**Esercizio 69** Si dimostrino le (86.15) e (86.16).

**Esercizio 70** Si dimostri che i coefficienti di Fourier  $H_\nu^{(1)}$  e  $h_\nu^{(1)}$  nel §87 decadono esponenzialmente e se ne deduca che le funzioni  $H^{(1)}(\psi, J_0)$  e  $h^{(1)}(\psi, J_0)$  sono analitiche per  $|\Im(\psi)| \leq \xi_1$ , dove  $\xi_1 \in (0, \xi)$ . [*Suggerimento.* Si scrivano  $H^{(1)}(\psi, J_0)$  e  $h^{(1)}(\psi, J_0)$  in serie di Fourier e si usi il decadimento dei coefficienti per stimare le due funzioni. Fin tanto che  $|\Im(\psi_i)| \leq \xi_1$ , dove  $\xi_1 \in (0, \xi)$ , le serie di Fourier risultano sommabili, e si ha

$$\left| H^{(1)}(\psi, J_0) \right| \leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \left| e^{i\langle \nu, \psi \rangle} H_\nu^{(1)} \right| \leq \frac{\Phi}{\gamma} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\nu|^{\tau+1} e^{-(\xi-\xi_1)|\nu|} \leq \frac{A\Phi}{\gamma} (\xi - \xi_1)^{-\tau+n+1},$$

dove si è usato l'esercizio 9 per stimare l'ultima somma (e per la definizione della costante  $A$ ); analogamente si ragiona per la funzione  $h^{(1)}(\psi, J_0)$ .]

**Esercizio 71** Si dimostri che ci sono passeggiate aleatorie di  $2n$  passi che non rappresentano alcun albero di ordine  $n$ . [*Suggerimento.* Perché una sequenza di  $2n$  segni  $\pm$  rappresenti un albero, essa deve soddisfare dei vincoli. In primo luogo il numero di segni  $+$  deve essere uguale al numero di segni  $-$ , poiché ogni ramo è percorso una volta verso destra e una volta verso sinistra (e quindi la sequenza contiene un segno  $+$  e un segno  $-$  per ogni ramo). Inoltre, come si vede dalla figura 19.4, i primi due segni sono necessariamente  $+$  e gli ultimi due sono necessariamente  $-$ .]

**Esercizio 72** Si dimostri che  $p!q! \leq (p+q)! \forall p, q \in \mathbb{N}$ . [*Suggerimento.* La disuguaglianza è banalmente soddisfatta se  $p = 0$  o  $q = 0$ . Se  $p, q \geq 1$ , si ha  $p!q! \leq (p+q-1)!$  (cfr. la soluzione dell'esercizio 55).]

**Esercizio 73** Con le notazioni della dimostrazione del lemma 88.28 si calcoli  $\mathcal{B}(\theta)$  per  $\theta$  come nella figura 19.14. [*Soluzione.* Si indichino con  $v_1, v_2, v_3$  le tre foglie di  $\theta$ . Si ha  $\sigma_{v_0} = 1/3!$  e  $\sigma_{v_1} = \sigma_{v_2} = \sigma_{v_3} = 1/0! = 1$ , quindi  $\mathcal{B}(\theta) = 1/3!$ .]

**Esercizio 74** Si dimostri che, nella stima dell'albero considerato osservazione 88.36, per opportune scelte delle funzioni  $\mathcal{H}_0$  e  $V$  e dei vettori  $\omega_0, \nu$  e  $\nu_0$ , il valore (88.24) soddisfa la (88.25). [*Suggerimento.* Si scelga

$$\mathcal{H}_0(J) := \frac{1}{2} \langle J, J \rangle, \quad V(\varphi, J) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} e^{-\xi|\nu|},$$

così che

$$T(J_0) = \mathbb{1} \quad \implies \quad \langle \nu, T(J_0) \nu \rangle = |\nu|^2 \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n.$$

La (88.24) dà

$$\text{Val}(\theta) = -i\nu_0 |\nu_0|^{2(p-1)} (-|\nu_0|^2)^p (-\langle \nu_0, \nu \rangle) 2^{-p} \frac{1}{(i \langle \omega_0, \nu_0 \rangle)^{2p}} \frac{1}{(i \langle \omega_0, \nu \rangle)^{2(p+1)}} e^{-2p\xi|\nu_0| - \xi|\nu|},$$

così che, se definiamo

$$B_1 = \frac{|\langle \nu_0, \nu \rangle|}{|\nu_0|}, \quad B_0 = \frac{|\nu_0|^4 e^{-2\xi|\nu_0|}}{2 |\langle \omega_0, \nu_0 \rangle|^2},$$

troviamo

$$|\text{Val}(\theta)| = B_1 B_0^p \frac{e^{-\xi|\nu|}}{(i \langle \omega_0, \nu \rangle)^{2(p+1)}}.$$

Scegliamo  $\omega_0 = (1, \alpha)$  come suggerito nell'esercizio 37 e consideriamo  $\nu = (-p_k, q_k)$ , dove  $p_k/q_k$  è un convergente di  $\alpha$ ; si ha quindi  $q_k^\tau \leq q_{k+1} \leq 2q_k^\tau$ . Possiamo stimare (cfr. anche gli esercizi 31 e 36)

$$\frac{1}{4|\nu|^\tau} < \frac{1}{4q_k^\tau} < \frac{1}{2q_{k+1}} < \frac{1}{q_k + q_{k+1}} < |q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^\tau} < \frac{(1 + 4\alpha^2)^{\tau/2}}{|\nu|^\tau}.$$

Poiché i convergenti costituiscono le migliori approssimazioni razionali di  $\alpha$ , dalla stima dal basso deduciamo che  $\omega_0$  soddisfa la condizione diofantea  $|\langle \omega_0, \nu \rangle| > \gamma |\nu|^{-\tau} \forall \nu \neq 0$ , con  $\gamma = 1/4$ . Se poniamo  $C_1 := 4(1 + 4\alpha^2)^{\tau/2}$ , per  $\nu = (-p_k, q_k)$  si ha anche  $|\langle \omega_0, \nu \rangle| \leq C_1 \gamma |\nu|^{-\tau}$ , da cui si ottiene

$$|\text{Val}(\theta)| \geq \frac{B_1}{\gamma} \left( \frac{B_0}{C_1^2 \gamma^2} \right)^p |\nu|^{2\tau(p+1)} e^{-\xi|\nu|},$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 75** Si dimostri la stima 88.26. [*Suggerimento.* Se definiamo  $f(x) := x^p e^{-\xi x}$  e  $x_0 := p/\xi$ , le stime dell'esercizio 7 e la stima dall'alto dell'esercizio 16 implicano che esiste una costante positiva  $C_1$  tale che  $f(x) \geq C_1^p p! \forall x \in [x_0/2, 2x_0]$ . Sia  $\xi_1 := \xi/2$  e  $M := \lfloor 2\tau \rfloor$ . Fissato  $\nu$  sufficientemente grande, si scelga  $k$  tale che  $\xi|\nu|/2 \leq Mk \leq 2\xi|\nu|$ . Per tale  $k$  si ha

$$(\xi_1|\nu|)^{2\tau k} e^{-\xi_1|\nu|} \geq (\xi|\nu|)^{Mk} e^{-\xi_1|\nu|} \geq C_1^{Mk} (Mk)! \geq C_1^{Mk} M!k!$$

e quindi

$$A_0^{-1}|\nu|^{2\tau+1} A_1^{-k} |\nu|^{2\tau k} e^{\xi|\nu|} \geq A_0^{-1} \left( \frac{C_1^M 2^{2\tau}}{A_1 \xi^{2\tau}} \right)^k M!k! e^{-\xi|\nu|/2}$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 76** Si dimostri che  $\sqrt{5}$  è irrazionale e se ne trovi la rappresentazione in frazioni continue. [*Suggerimento.* Supponiamo per assurdo che si abbia  $\sqrt{5} = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  primi tra loro. Si avrebbe allora  $5q^2 = p^2$ . Inoltre  $q$  dovrebbe essere dispari: se fosse pari,  $5q^2$  dovrebbe essere pari e, di conseguenza, anche  $p^2$  e quindi  $p$  dovrebbe essere pari, contro l'ipotesi che  $p$  e  $q$  fossero primi tra loro. Ma se  $q$  fosse dispari, in base allo stesso ragionamento, anche  $p$  dovrebbe essere dispari e si avrebbe  $q = 2m + 1$  e  $p = 2n + 1$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ , così che  $5q^2 = p^2$  implicherebbe  $5(2m + 1)^2 = (2n + 1)^2$ , i.e.

$$5(4m^2 + 4m + 1) = 4n^2 + 4n + 1 \implies 4(5m^2 + 5m + 1) = 4(n^2 + n) \implies 5m(m + 1) + 1 = n(n + 1).$$

D'altra parte, essendo dispari sia  $m(m + 1)$  che  $n(n + 1)$  e quindi anche  $5m(m + 1)$ ,  $5m(m + 1) + 1$  dovrebbe essere pari e pertanto non potrebbe essere uguale a  $n(n + 1)$ . Si è trovata quindi una contraddizione. Infine si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)}} \\ &= 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene  $\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, 4, \dots]$ , i.e.  $a_k = 4 \forall k \geq 1$ .]

**Esercizio 77** La *sezione aurea*  $\gamma_0$  è definita come il numero irrazionale rappresentato dalla frazione continua  $\gamma_0 = [1, 1, 1, 1, \dots]$ , i.e. tale che  $a_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . Si dimostri che  $\gamma_0 = (1 + \sqrt{5})/2$  e che il vettore  $(1, \gamma_0)$  è diofanteo con esponente  $\tau = 1$ . [*Soluzione.* Utilizzando l'esercizio 17 si ha

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \implies \gamma_0^2 = \gamma_0 + 1.$$

Risolviendo l'equazione di secondo grado si trova  $\gamma_0 = (1 \pm \sqrt{5})/2$ , di cui solo la determinazione con  $+$  è positiva. Poiché i quozienti parziali di  $\gamma_0$  sono limitati, per l'esercizio 41, il vettore  $(1, \gamma_0)$  è diofanteo con esponente  $\tau = 1$ .]

**Esercizio 78** Si dimostri che per ogni numero irrazionale  $x$  esistono infiniti valori di  $p$  e  $q$  tali che

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

[*Soluzione.* Basta considerare i convergenti  $p_k/q_k$  di  $x$ . Si ha infatti  $|x - p_k/q_k| < 1/q_k q_{k+1} < 1/q_k^2 \forall k \geq 0$  (cfr. l'esercizio 31).]

**Esercizio 79** Sia  $x$  un numero irrazionale. Siano  $p_k/q_k$  i suoi convergenti e  $a_k$  i suoi quozienti parziali. Si introducano le successioni  $\{r_k\}$  e  $\{\varphi_k\}$  ponendo ricorsivamente (cfr. anche l'esercizio 27 per la definizione di  $r_k$ )

$$r_k := a_k + \frac{1}{r_{k+1}}, \quad k \geq 0, \quad \varphi_k := \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}, \quad k \geq 2,$$

e si definisca  $\psi_k := \varphi_k + r_k$  per  $k \geq 2$ . Si dimostri che se  $\psi_k \leq \sqrt{5}$  e  $\psi_{k-1} \leq \sqrt{5}$  per qualche  $k \geq 2$  allora  $\varphi_k > (\sqrt{5} - 1)/2$ . [*Soluzione.* Si ha

$$\frac{1}{\varphi_{k+1}} = \frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \varphi_k,$$

così che

$$\frac{1}{\varphi_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}} = (a_k + \varphi_k) + (r_k - a_k) = \varphi_k + r_k.$$

Per ipotesi si ha

$$\varphi_k + r_k = \psi_k \leq \sqrt{5}, \quad \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} = \psi_{k-1} \leq \sqrt{5},$$

da cui segue che

$$r_k \leq \sqrt{5} - \varphi_k, \quad \frac{1}{r_k} \leq \sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k} \quad \Longrightarrow \quad 1 = r_k \cdot \frac{1}{r_k} \leq (\sqrt{5} - \varphi_k) \left( \sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k} \right),$$

i.e.

$$5 - \sqrt{5} \left( \varphi_k + \frac{1}{\varphi_k} \right) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5 - \sqrt{5} \left( \varphi_k + \frac{1}{\varphi_k} \right) > 0,$$

dove la disuguaglianza con il segno stretto segue dal fatto che  $\sqrt{5}$  è irrazionale (cfr. l'esercizio 76). Poiché  $\varphi_k > 0$  si ottiene

$$\varphi_k^2 - \sqrt{5} \varphi_k + 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_k^2 - \sqrt{5} \varphi_k + \frac{5}{4} < \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k \right)^2 < \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k < \frac{1}{2},$$

dove abbiamo tenuto conto che  $\varphi_k < 1$  (poiché  $q_{k-2} < q_{k-1}$ ). In conclusione  $\varphi_k > (\sqrt{5} - 1)/2$ .]

**Esercizio 80** Si mostri che il risultato dell'esercizio 78 può essere rafforzato nel modo seguente: per ogni numero irrazionale  $x$  esistono infiniti valori di  $p$  e  $q$  tali che

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}.$$

[*Soluzione.* Dimostriamo che dati tre convergenti successivi  $p_{k-2}/q_{k-2}$ ,  $p_{k-1}/q_{k-1}$  e  $p_k/q_k$ , almeno uno di essi soddisfa la disuguaglianza, i.e. esiste  $i \in \{k-2, k-1, k\}$  tale che  $|x - p_i/q_i| < 1/\sqrt{5}q_i^2$ . La dimostrazione si fa per assurdo. Supponiamo che si abbia

$$\left| x - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}, \quad \left| x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}, \quad \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}.$$

Per  $i = k-2, k-1, k$  si ha (cfr. gli esercizi 18 e 19)

$$\left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| = \left| \frac{r_{i+1}p_i + p_{i-1}}{r_{i+1}q_i + q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{1}{q_i(r_{i+1}q_i + q_{i-1})} = \frac{1}{q_i^2(r_{i+1} + \varphi_{i+1})} = \frac{1}{q_i^2\psi_{i+1}},$$

dove  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  sono definiti nell'esercizio 79. Si avrebbe quindi  $\psi_{i+1} \leq \sqrt{5}$  per  $i = k-2, k-1, k$ . In virtù dell'esercizio 79 si troverebbe quindi  $\varphi_k \geq \beta$  e  $\varphi_{k+1} > \beta$ , dove  $\beta := (\sqrt{5} - 1)/2$ . In conclusione, si avrebbe

$$\frac{1}{\beta} - \beta > \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k = a_k \quad \implies \quad a_k < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{4 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}{2(\sqrt{5} - 1)} = 1,$$

che è ovviamente impossibile.]

**Esercizio 81** Si dimostri che il risultato dell'esercizio 80 non si può migliorare, ovvero che se  $c > \sqrt{5}$  esistono numeri irrazionali  $x$  per cui non si possono trovare infiniti  $p, q \in \mathbb{N}$  tali che  $|x - p/q| < 1/cq^2$ . In particolare si mostri che questo non è possibile se si sceglie  $x = \gamma_0$ , dove  $\gamma_0$  è la sezione aurea introdotta nell'esercizio 77. [*Soluzione.* Si supponga che esistano infiniti  $p, q \in \mathbb{N}$  tali che

$$\left| \gamma_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

con  $c > \sqrt{5}$ . Per ciascuna di tali coppie  $(p, q)$  si potrebbe allora trovare  $\delta \in \mathbb{R}$  tale che

$$\gamma_0 = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2}, \quad |\delta| < \frac{1}{c} < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Si avrebbe quindi

$$\left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) q = \gamma_0 q = p + \frac{\delta}{q} \quad \implies \quad \frac{\delta}{q} - \frac{\sqrt{5}}{2} q = -p + \frac{q}{2} \quad \implies \quad \frac{\delta^2}{q^2} - \sqrt{5}\delta = p^2 - pq - q^2.$$

Nell'ultima identità, per  $q$  sufficientemente grande (stiamo supponendo che esistano infiniti  $q$ , quindi possiamo considerare il limite  $q \rightarrow +\infty$ ), essendo il membro di destra un numero intero e il membro di sinistra un numero in modulo minore di 1 (poiché  $|\sqrt{5}\delta| < 1$  e  $\delta^2/q^2$  può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo  $q$  arbitrariamente grande), si dovrebbe avere

$$p^2 - pq - q^2 = 0 \quad \implies \quad p^2 - pq + \frac{q^2}{4} = \frac{5}{4}q^2 \quad \implies \quad 4p^2 - 4pq + q^2 = 5q^2 \quad \implies \quad (2p - q)^2 = (\sqrt{5}q)^2,$$

ovvero  $2p - q = \sqrt{5}q$ , che non è ovviamente possibile dal momento che  $p$  e  $q$  sono interi, mentre  $\sqrt{5}$  è irrazionale (cfr. l'esercizio 76). Si è quindi arrivati a una contraddizione. Si può interpretare il risultato appena dimostrato dicendo che la sezione aurea è, di tutti i numeri irrazionali, quello "più irrazionale", i.e. quello che peggio si approssima con numeri razionali.]