Esercizio 42 Si dimostri che non esistono vettori $\omega \in \mathbb{R}^2$ che verificano la condizione diofantea (84.20) con $\tau < 1$. [*Soluzione.* Sia $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ e siano p_k/q_k i convergenti di $\alpha := \omega_2/\omega_1$. Supponiamo per assurdo che si abbia $|\langle \omega, \nu \rangle| > \gamma/|\nu|^\tau$, con $\tau < 1$, per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^2$ non nullo. Si avrebbe allora, per $\nu_k = (-p_k, q_k)$,

$$\frac{\gamma_0}{q_k^\tau} < \frac{\gamma}{|\nu_k|^\tau} < |\langle \omega, \nu_k \rangle| = |\omega_1| \, |q_k \alpha - p_k| < \frac{|\omega_1|}{q_{k+1}},$$

dove $\gamma_0 := \gamma(1+4\alpha^2)^{-\tau/2}$, e quindi $q_{k+1} < C_0 q_k^\tau$, con $C_0 = |\omega_1|/\gamma_0$. Per k sufficientemente grande, si avrebbe $q_{k+1} < q_k$, che è in contraddizione con la relazione $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} > q_k$.]

Esercizio 43 Si dimostri che $\sqrt{2}$ è irrazionale e se ne trovi la rappresentazione in frazioni continue. [*Suggerimento.* Si supponga per assurdo che esistano $p/q \in \mathbb{N}$, primi tra loro, tali che $\sqrt{2} = p/q$. Si avrebbe allora $2q^2 = p^2$, così che p^2 e quindi p dovrebbe essere divisibile per 2. Ne seguirebbe $p = 2m$, per qualche $m \in \mathbb{N}$, e dunque $q^2 = 2m^2$: anche q dovrebbe essere divisibile per 2, contro l'ipotesi che p e q siano primi tra loro. Per trovarne la rappresentazione in frazioni continua si scriva

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \; &= \; 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}} \\
&= \; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\ldots}}}},
\end{aligned}$$

da cui si ottiene $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$, i.e. $a_k = 2 \; \forall k \geq 1$.]

Esercizio 44 Si dia un esempio di sistema hamiltoniano degenere non isocrono. [*Suggerimento* Si consideri l'hamiltoniana $\mathcal{H}_0(J) = J_1^3 - J_2^3$ per $n = 2$: il determinante in (84.23) si annulla lungo la retta $J_1 = J_2$.]

Esercizio 45 Si verifichi che il sistema hamiltoniano a due gradi di libertà descritto dall'hamiltoniana $\mathcal{H}_0(J) = J_1^2 + J_2$ è degenere ma non isocrono.

Esercizio 46 Si dia un esempio di sistema hamiltoniano con hamiltoniana $\mathcal{H}_0(J)$ quadratica nelle J tale che il determinante in (84.23) si annulli identicamente. [*Suggerimento.* Si consideri $\mathcal{H}_0(J) = (J_1 + J_2)^2$ per $n = 2$.]

Esercizio 47 Si dimostri che la serie di Fourier (84.18) converge in $D(\rho, \xi/2, J_0)$ se $\omega = \omega(J')$ soddisfa la condizione diofantea (84.20) per ogni $J' \in B_\rho(J_0)$. [*Suggerimento.* Sotto l'ipotesi che si abbia $|\langle \omega(J'), \nu \rangle| > \gamma |\nu|^{-\tau}$ per ogni $\nu \neq 0$ e per ogni $J \in B_\rho(J_0)$, si trova

$$\max_{(\varphi, J') \in D(\rho, \xi/2, J_0)} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \left| \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1,\nu}(J') \right| \leq \Phi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{e}^{|\nu| \xi/2} |\nu|^\tau \, \mathrm{e}^{-\xi|\nu|} \leq \Phi \, A \, 2^{n+\tau} \xi^{-n-\tau},$$

dove A è una costante, calcolabile esplicitamente (cfr. l'esercizio 9), che dipende da τ e n.]

Esercizio 48 Si dimostri la stima (84.24) se si sceglie $N = N_0(\varepsilon)$ in accordo con la (84.25). [*Suggerimento.* Si ha, per $|\Im(\varphi_i)| \le \xi/2$,

$$\left|V^{>N}(\varphi, J)\right| \le \Phi \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^n \\ |\nu|>N}} \mathrm{e}^{-\xi|\nu|/2} \le C_2 \Phi \mathrm{e}^{-\xi N/4}, \qquad C_2 := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{e}^{-\xi|\nu|/4} \le A 4^n \xi^{-n},$$

dove si è usato l'esercizio 9 per stimare l'ultima somma. La stima segue allora con $C_1 = C/C_2\Phi$.]

Esercizio 49 Si dimostri che la funzione N_k in (85.3) ha la forma (85.4). [*Soluzione.* La funzione caratteristica di Hamilton W in (85.2) risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right\rangle + \varepsilon V\left(\varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') + O(\varepsilon^{k_0+1}).$$

Se prendiamo la formula di Taylor di V intorno a (φ, J), otteniamo (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3)

$$V\left(\varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = \sum_{a_1,\ldots,a_n=0}^{\infty} \frac{1}{a_1!\ldots a_n!} \frac{\partial^{a_1+\ldots+a_n}}{\partial J_1^{a_1}\ldots\partial J_n^{a_n}} V(\varphi, J') \left(\sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_1}\right)^{a_1} \ldots \left(\sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_n}\right)^{a_n},$$

dove ogni termine

$$\left(\sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_i}\right)^{a_i}$$

va interpretato come 1 se $a_i = 0$ (i.e. se V non è derivato rispetto alla variabile J_i). Scrivendo esplicitamente, se $a_i \ge 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \frac{\partial W_k}{\partial \varphi_i}\right)^{a_i} = \sum_{k_{i1}=1}^{k_0} \ldots \sum_{k_{ia_i}=1}^{k_0} \varepsilon^{k_{i1}+\ldots+k_{ia_i}} \frac{\partial W_{k_{i1}}}{\partial \varphi_i} \ldots \frac{\partial W_{k_{ia_i}}}{\partial \varphi_i},$$

per $i = 1, \ldots, n$, e ponendo $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $|a| = a_1 + \ldots + a_n$, $a! = a_1! \ldots a_n!$ e $\partial J^a = \partial J_1^{a_1} \ldots \partial J_n^{a_n}$, troviamo

$$V\left(\varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = \sum_{a_1,\ldots,a_n=0}^{\infty} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum{}^{*} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} \varepsilon^{k_{ij}} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i},$$

dove la somma $\sum^*$ è su k_{ij}, per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, a_i$, con $k_{ij} \ge 1$ se $a_i > 0$ e $k_{ij} = 0$ se $a_i = 0$; se $k_{ij} = 0$ il termine $\partial W_{k_{ij}}/\partial \varphi_i$ va interpretato come 1. Se scriviamo

$$\varepsilon V\left(\varphi, J' + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N_k(\varphi, J'),$$

la funzione $N_k(\varphi, J')$ è quindi data dai contributi dell'espansione trovata tali che

$$k_{11} + \ldots + k_{1a_1} + k_{21} + \ldots + k_{2a_2} + \ldots + k_{n1} + \ldots + k_{na_n} = k - 1.$$

Da qui segue l'asserto.]

Esercizio 50 Si calcolino le funzioni N_k in (85.4) per $k = 1, 2, 3$. [*Soluzione.* Per $k = 1$, si ha $a_1 = \ldots = a_n = 0$ e quindi $N_1 = V$; in tal caso l'equazione (85.3) si riduce all'equazione (84.15). Per $k = 2$, si ha che un solo k_{ij} vale 1 e tutti gli altri sono 0; quindi se $a_i = 1$ per qualche $i = 1, \ldots, n$ risulta $a_j = 0$ $\forall j \neq i$, così che si ha

$$N_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial J_i} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle .$$

Per $k = 3$, poiché la somma dei k_{ij} è 2, sono possibili due casi: uno dei k_{ij} vale 2 e tutti gli altri sono nulli oppure due dei k_{ij} valgono 1 e tutti gli altri sono nulli. Nel primo caso si ha $a_i = 1$ e $a_j = 0$ $\forall j \neq i$, per qualche $i = 1, \ldots, n$ (e $k_{i1} = 1$), mentre nel secondo si hanno due sottocasi: $a_i = 2$ e $a_j = 0$ $\forall j \neq i$ (e $k_{i1} = k_{i2} = 1$) oppure $a_i = a_j = 1$ per $i \neq j$ e $a_h = 0$ $\forall h \neq i, j$ (e $k_{i1} = k_{j1} = 1$). Se ne deduce che

$$N_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial J_i} \frac{\partial W_2}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial J_i^2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial J_i \partial J_j} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_j} .$$

Si noti che N_k è sempre funzioni di coefficienti $W_{k'}$ con $k' < k$.]

Esercizio 51 Data una funzione $f(z)$, analitica in un aperto $D \subset \mathbb{C}$ e continua sulla frontiera ∂D, si ha (cfr. l'esercizio 29 del capitolo 11)

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta ,$$

dove l'integrale è esteso alla curva ∂D. Se ne deduca che, se $D' \subset D$ e $z \in D'$, si ha

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) \right| \leq \frac{M}{\delta^n} ,$$

dove M è il massimo del modulo di $f(z)$ in D e δ è la distanza tra D' e ∂D, e si utilizzi il risultato per dimostrare le (85.8) e (85.18).

Esercizio 52 Si dimostrino le (85.9). [*Soluzione.* Utilizzando la seconda delle (85.7) e ragionando come per la (85.8), si trova

$$\max_{(\varphi,J) \in D_1} \left| \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq \sum_{\nu \neq 0} \gamma^{-1} |\nu|^{\tau} |\nu V_\nu(J)| \, \mathrm{e}^{(\xi - \delta)|\nu|} \leq B_0 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau} ,$$

dove B_0 è una costante positiva. Da qui segue la (85.9a). Allo stesso modo, utilizzando la prima delle (85.7), si ha

$$\max_{(\varphi,J) \in D_1} \left| \frac{\partial W_1}{\partial J}(\varphi, J) \right| \leq \sum_{\nu \neq 0} \gamma^{-1} |\nu|^{\tau} \left| \frac{\partial V_\nu}{\partial J}(J) \right| \mathrm{e}^{(\xi - \delta)|\nu|} \leq B_0 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau} ,$$

che dà la (85.9b).]

Esercizio 53 Si dimostri la (85.10).

Esercizio 54 Si dimostri che la condizione (85.10) permette di risolvere le (85.12) con il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Definendo $G(J,J',\varphi) := J' - J + \varepsilon(\partial W_1/\partial\varphi)(\varphi, J')$, si considera l'equazione $G(J,J',\varphi) = 0$. Si ha allora $\partial G/\partial J' = \mathbb{1} + \varepsilon(\partial^2 W_1/\partial\varphi\partial J)$ e quindi, tenuto conto che $\det(\mathbb{1} + O(\varepsilon)) = 1 + O(\varepsilon)$ (cfr. la (71.20) e l'esercizio 22 del capitolo 16), si ha $|\det(\partial G/\partial J')| \geq 1/2$ purché $\varepsilon B_3 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau-1} < 1/2$, per qualche costante positiva B_3.]

Esercizio 55 Si dimostri la (85.16). [*Soluzione.* Dimostriamo innanzitutto per induzione che, se $k = k_1 + \ldots + k_s$ e $k_1, \ldots, k_s \geq 1$, si ha $k_1! \ldots k_s! \leq (k-(s-1))!$ Per $s = 1$ la stima è ovvia. Per $s = 2$, se $k_2 = 1$ si ha $(k_1 + k_2 - 1)! = k_1! = (k-1)!$, se invece $k_2 \geq 2$ si ha

$$(k_1 + k_2 - 1)! = k_1!(k_1 + 1) \ldots (k_1 + (k_2 - 1)) \geq k_1!(2 \cdot \ldots \cdot k_2) = k_1!k_2!$$

Per $s > 2$ si ha

$$k_1! \ldots k_s! \leq k_1! \ldots k_{s-1}!k_s! \leq (\tilde{k} - (s-2))!k_s! \leq (\tilde{k} + k_s - (s-2) - 1)!,$$

dove $\tilde{k} = k_1 + \ldots + k_{s-1} = k - k_s$. Questo completa la dimostrazione induttiva. La somma su $k_1! \ldots k_s!$ con i vincoli sopra si può quindi stimare con il numero di modi di scegliere $s-1$ numeri tra k per il massimo di $k_1! \ldots k_s!$, quindi

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s \geq 1 \\ k_1+\ldots+k_s = k}} k_1! \ldots k_s! \leq \binom{k}{s-1} (k-(s-1))! \leq k!,$$

da cui segue l'asserto.]

Esercizio 56 Si dimostri la (85.17). [*Soluzione.* Poiché $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ e $a_1 + \ldots + a_n = p$, esiste $m \in \mathbb{N}$, con $1 \leq m \leq n$, tale che $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m} \geq 1$ e $a_{i_1} + \ldots + a_{i_m} = p$, mentre i restanti a_i sono nulli. La somma su $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ che verificano tali condizioni si può stimare con la somma dei possibili modi di fissare m punti tra p dati. Infine si può stimare

$$\binom{p}{m} \leq 2^p \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \geq 0 \\ a_1+\ldots+a_n = p}} 1 \leq \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \binom{p}{m} \leq 2^p \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} = 2^p 2^n.$$

Si noti che la somma si può anche stimare come indicato nell'esercizio 5.]

Esercizio 57 Si dimostri la (85.20).

Esercizio 58 Si dimostri che $k^k \mathrm{e}^{-k} \leq k! \leq k^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. [*Suggerimento.* Si osservi che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot k \leq k \cdot k \cdot k \ldots \cdot k = k^k$ per dimostrare la stima dall'alto e che

$$\frac{k^k}{k!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = \mathrm{e}^k \qquad \Longrightarrow \qquad k^k \mathrm{e}^{-k} \leq k!$$

per dimostrare la stima dal basso (cfr. anche l'esercizio 6). In alternativa si può usare la formula di Stirling (cfr. l'esercizio successivo).]

Esercizio 59 Si utilizzi la formula di Sterling dell'esercizio 16 per dedurre le stime dell'esercizio 58. [*Soluzione.* La stima $n! \geq n^n \mathrm{e}^{-n}$ si ottiene banalmente notando che $\sqrt{2\pi n}\, n^n \geq 1$. Per ottenere la stima $n! \leq n^n$ basta osservare che la funzione $x \mapsto \sqrt{x}\mathrm{e}^{-(x-1)}\mathrm{e}^{1/12x}$ è decrescente in $[1, +\infty)$, così che $n! \leq n^n \sqrt{2\pi/\mathrm{e}} < n^n$.]

Esercizio 60 Si dimostri la (85.21). [*Suggerimento.* Poiché $\mathcal{H}'(\varphi', J') = \mathcal{H}(\varphi, J)$, si ha

$$\begin{aligned} V'(\varphi', J') &:= \mathcal{H}'(\varphi', J') - \sum_{k=0}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') \\ &= \left[\sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k \mathcal{H}'_k(J') \right] + \left[\varepsilon V\Big(\varphi, J' + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}\Big) - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k \right], \end{aligned}$$

dove i termini nelle prime parentesi quadre si cancellano in virtù della (85.3), mentre

$$\varepsilon V\Big(\varphi, J' + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}\Big) - \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon^k N_k = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{a_1,\ldots,a_n \geq 0} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum\nolimits'_{k-1} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}.$$

Usando la stima (85.13) sulle funzioni W_k, con $A = \rho\delta/4$, si trova

$$|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq \|V\|_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{2A}{\rho\delta}\right)^p \sum\nolimits'_{k-1} \left(\varepsilon\, k_0\, B\delta^{-\beta}\right)^k,$$

dove si è usato che $k_{ij} \leq k_0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, a_i$, così che

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! \leq \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}^{k_{ij}} \leq \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} k_0^{k_{ij}} \leq k_0^{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i} k_{ij}} \leq k_0^{k-1} \leq k_0^k$$

dove si è usato l'esercizio 58. Poiché $k_{ij} \geq 1$, si ha inoltre (cfr. la soluzione dell'esercizio 56)

$$\sum\nolimits'_{k-1} \leq \binom{k-1}{p} \leq 2^{k-1} < 2^k.$$

Fissando $k_0 = N(\varepsilon)$ e $\delta = (1/2N(\varepsilon)) \min\{\xi, 1\}$, si trova

$$|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq \|V\|_0 2^n \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(2\varepsilon\, k_0\, B\delta^{-\beta}\right)^k \leq b_2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(b_3 (N(\varepsilon))^{1+\beta} \varepsilon\right)^k,$$

per opportune costanti b_2 e b_3. Se ε è sufficientemente piccolo, così che $b_3(N(\varepsilon))^{1+\beta}\varepsilon < 1/2$, si ottiene $|\varepsilon V'(\varphi', J')| \leq 2b_2 (b_3 (N(\varepsilon))^{1+\beta}\varepsilon)^{N(\varepsilon)+1}$, da cui segue l'asserto.]

Esercizio 61 Si discuta come cambiano le stime (85.13) qualora si definiscano i domini D_k come $D_k = D(\rho_k, \xi_k, J_0)$, dove $\rho_{k+1} = \rho_k - \rho\Delta_k$ e $\xi_{k+1} = \xi_k - \Delta_k$, con $\rho_0 = \rho$ e $\xi_0 = \xi$, e $\Delta_k = \delta_1 + \ldots + \delta_k$, con $\delta_k = \delta_0/k^2$. [*Suggerimento.* La stima (85.13) va sostituita con

$$\max_{(\varphi,J)\in D_k} \left| \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq AB^k (k!)^{2\beta} \delta_0^{-\beta k}, \qquad \beta = \tau + n + 1,$$

con A come in (85.14) e B opportuno. La dimostrazione è per induzione. Si procede come nella dimostrazione del lemma 85.1, con le seguenti modifiche: in (85.18) dobbiamo scrivere δ_1 anziché δ e nella seconda riga di (85.15) dobbiamo sostituire $1/(\rho\delta)^{p-1}$ con $1/(\rho\delta_1)^{p-1}$, δ^{-k} con $\delta_0^{-\beta k}$ e $k_{ij}!$ con $(k_{ij}!)^{2\beta}$. Ragionando come nell'esercizio 55 si trova

$$\sum\nolimits'_k \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{a_i}(k_{ij}!)^{2\beta} \le \binom{k}{s-1}\left((k-(s-1))!\right)^{2\beta} \le (k!)^{2\beta},$$

dove s è il numero dei $k_{ij}\neq 0$ su cui si somma. Infine in (85.20) dobbiamo sostituire $\delta^{-\tau-n-1}=\delta^{-\beta}$ con $(k+1)^{2\beta}\delta_0^{-\beta}$, così che, utilizzando il fatto che $(k+1)^{2\beta}(k!)^{2\beta}=((k+1)!)^{2\beta}$ e scegliendo B in modo opportuno si ottiene la stima dell'asserto.]

Esercizio 62 Si mostri che è possibile definire le funzioni W_k in (85.2) all'interno di uno stesso dominio $D(\rho/2,\xi/2,J_0)$ e si discuta come procedere per stimarne le norme. [*Soluzione.* La (85.3) si può risolvere passando allo spazio di Fourier,

$$W_k(\varphi,J') = -\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^n\\ \nu\neq 0}} \mathrm{e}^{i\langle\varphi,\nu\rangle}\frac{N_{k,\nu}}{i\,\langle\omega,\nu\rangle},$$

dove $N_{k,\nu}$ è espresso in termini di coefficienti di Fourier $W_{k',\nu'}$, con $k'<k$ e $\nu'\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$. Per esempio si ha (cfr. l'esercizio 50) $N_{1,\nu}=V_\nu$ per $k=1$,

$$N_{2,\nu} = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2\in\mathbb{Z}^n\\ \nu'+\nu''=\nu}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_{\nu'}}{\partial J_i}\, i\nu''_i W_{1,\nu''}$$

per $k=2$ e

$$\begin{aligned} N_{3,\nu} = &\sum_{\substack{\nu',\nu''\in\mathbb{Z}^n\\ \nu'+\nu''=\nu}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_{\nu'}}{\partial J_i}\, i\nu''_i W_{2,\nu''} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu',\nu'',\nu'''\in\mathbb{Z}^n\\ \nu'+\nu''+\nu'''=\nu}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i^2}\,(i\nu''_i)\,(i\nu'''_i)W_{1,\nu''}W_{1,\nu'''} \\ &+ \sum_{\substack{\nu',\nu'',\nu'''\in\mathbb{Z}^n\\ \nu'+\nu''+\nu'''=\nu}}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}\frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i\partial J_j}\,(i\nu''_i)\,(i\nu'''_j)W_{1,\nu''}W_{1,\nu'''}. \end{aligned}$$

per $k=3$. Quindi W_1 è scritta in termini di V; W_2 è scritta in termini di V e W_1, così che, esprimendo W_1 in termini di V, si ottiene per W_2 un'espressione in cui l'unica funzione che compare è V; W_3 è scritta in termini di V, W_1 e W_2, così che, esprimendo W_1 e W_2 in termini di V, si ottiene anche per W_2 un'espressione in cui l'unica funzione che compare è V; e così via. In conclusione ogni coefficiente $W_{k,\nu}$ è espresso come somma di contributi in cui compaiono s coefficienti di Fourier di derivate della funzione V con indici $\nu_1,\ldots,\nu_s$, con $s\le k$, e s denominatori della forma $-1/i\,\langle\omega,\nu_{s+1}\rangle,\ldots,-1/i\,\langle\omega,\nu_{2s}\rangle$ (i cosiddetti *piccoli divisori*), con $\nu_1,\ldots,\nu_s\in\mathbb{Z}^n$, mentre i vettori $\nu_{s+1},\ldots,\nu_{2s}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ sono dati ciascuno da somme opportune dei vettori $\nu_1,\ldots,\nu_s$. Per esempio, quando si calcola $W_{3,\nu}$, inserendo l'espressione di $W_{1,\nu''}$ e $W_{1,\nu'''}$ in termini di $V_{\nu''}$ e $V_{\nu'''}$, rispettivamente, nella somma della seconda riga di $N_{3,\nu}$, si trova una somma su ν',ν'',ν''' di contributi in cui compare il prodotto

$$\frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial J_i\partial J_j}\,(i\nu''_i)\,(i\nu'''_j)V_{\nu''}V_{\nu'''},$$

ovvero il prodotto dei coefficienti di Fourier delle derivate $[\partial^2 V/\partial J_i \partial J_j](\varphi, J)$, $[\partial V/\partial \varphi_i](\varphi, J)$ e $[\partial V/\partial \varphi_j](\varphi, J)$, con indici di Fourier ν', ν'' e ν''', per il prodotto

$$\left(-\frac{1}{i\,\langle \omega, \nu \rangle}\right)\left(-\frac{1}{i\,\langle \omega, \nu'' \rangle}\right)\left(-\frac{1}{i\,\langle \omega, \nu''' \rangle}\right),$$

dove $\nu = \nu' + \nu'' + \nu'''$. Si possono quindi usare le stime sui coefficienti di Fourier delle derivate della funzione $V(\varphi, J)$ e la condizione diofantea per stimare i piccoli divisori, per ottenere stime dei coefficienti $W_{k,\nu}$ del dominio $D(\rho/2, \xi/2, J_0)$. Si può formalizzare la discussione appena fatta, a tutti gli ordini, procedendo secondo le linee del §88.]

Esercizio 63 Si consideri l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = J_1 + \alpha J_2 + \varepsilon\,(J_2 + F(\varphi_1, \varphi_2)),$$

dove $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore diofanteo e

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi \rangle} F_\nu$$

è analitica e tale che $F_\nu > 0\ \forall \nu \in \mathbb{Z}^2$. Si calcoli esplicitamente la serie di Birkhoff. [*Suggerimento.* Si trova $\mathcal{H}'_1(J') = J'_2$ e $\mathcal{H}'_k(J') = 0$ per $k \geq 2$, mentre

$$W_k(\varphi, J') = -\sum_{\nu \neq 0} \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{i\,\langle \omega, \nu \rangle} \left(-\frac{\nu_2}{\langle \omega, \nu \rangle}\right)^{k-1}$$

per $k \geq 1$.]

Esercizio 64 Si dimostri che i coefficienti di ordine k della serie di Birkhoff dell'esercizio 63 si stimano proporzionalmente a $k!^{\tau+1}$. [*Suggerimento.* Si trova che $|W_{k,\nu}(J')|$ si stima proporzionalmente a $|\nu|^{\tau+(k-1)(\tau+1)}$ e si usa che $(k(\tau+1))! \leq C^k k!^{\tau+1}$ per un'opportuna costante C.]

Esercizio 65 Si dimostri che i moti del sistema descritto dall'hamiltoniana $\mathcal{H}(\varphi, J)$ dell'esercizio 63 divergono linearmente nel tempo per un insieme denso di valori di ε e se ne deduca che le serie di Birhkoff divergono. [*Suggerimento.* Si integrano esplicitamente le equazioni di Hamilton

$$\dot\varphi_1 = 1, \qquad \dot\varphi_2 = \alpha + \varepsilon, \qquad \dot J_1 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1, \varphi_2), \qquad \dot J_2 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Le equazioni per le variabili angolari dànno

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t, \qquad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + (\alpha + \varepsilon)\,t,$$

così che, inserendo le espressioni per φ nelle equazioni per la variabili d'azione e integrando, si ottiene

$$J(t) = J(0) - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{i\langle \varphi(0), \nu \rangle}\,(i\nu)\,F_\nu \int_0^t \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{i\langle \omega_\varepsilon, \nu \rangle t'}$$

dove abbiamo posto $\omega_\varepsilon = (1, \alpha + \varepsilon)$. Poiché $F_\nu > 0\ \forall \nu \in \mathbb{Z}^n$, le variabili d'azione crescono linearmente in t per ogni valore di ε tale che $\langle \omega_\varepsilon, \nu \rangle = 0$ per qualche $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$: questo succede per un numero denso di valori di ε.]

Esercizio 66 Si consideri l'hamiltoniana dell'esercizio 63. Si dimostri che la soluzione formale dell'equazione di Hamilton-Jacobi è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(J') &= J_1' + \alpha J_2' + \varepsilon\, J_2' + \varepsilon\, F_0, \\ W(\varphi, J') &= \varphi_1 J_1' + \varphi_2 J_2' + i\varepsilon \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^2 \\ \nu\neq 0}} \mathrm{e}^{i\langle \nu,\varphi\rangle} \frac{F_\nu}{\nu_1 + \nu_2(\alpha+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Se ne deduca che le serie di Birkhoff divergono.

Esercizio 67 Sia $\mathcal{H}_0(J)$ un'hamiltoniana non degenere e si ponga $\omega(J) = [\partial\mathcal{H}_0/\partial J](J)$. Si dimostri che se la funzione $J \mapsto A(J)$ è tale che $\langle A(J), \nu\rangle = 0$ per tutti i vettori $\nu \in \mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ in corrispondenza dei quali si abbia $\langle \omega(J), \nu\rangle = 0$ allora $A(J)$ deve essere parallelo a $\omega(J)$. [*Suggerimento.* Sia $\mathcal{A}$ il dominio dell'applicazione $\omega(J)$. Sia J_1 tale che $\langle \omega(J_1), \nu_1\rangle = 0$ per qualche vettore $\nu_1 \in \mathbb{Z}^n$. Quindi $\omega(J_1)$ giace in un piano ortogonale a ν_1. Muovendo un po' J si trova un valore J_2, arbitrariamente vicino a J_1, tale che $\omega(J_2)$ continua a giacere sullo stesso stesso piano e $\langle\omega(J_2), \nu_2\rangle = 0$ per qualche vettore $\nu_2 \in \mathbb{Z}^n$ ortogonale a ν_1 (J_2 può essere reso arbitrariamente vicino a J_1 scegliendo ν_2 arbitrariamente grande). Quindi $\omega(J_2)$ è ortogonale sia a ν_1 che a ν_2. Iterando, e modificando ogni volta di poco il valore di J, si trova un valore J_n tale che $\langle\omega(J_n), \nu_1\rangle = \langle\omega(J_n), \nu_2\rangle = \ldots = \langle\omega(J_n), \nu_{n-1}\rangle = 0$ per $n-1$ vettori $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$. Se imponiamo che sia $\langle A(J_n), \nu_k\rangle = 0$ per gli stessi vettori $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$, ne deriva che $A(J_n)$ deve essere parallelo a $\omega(J_n)$. Poiché i valori J_1 tali che $\langle\omega(J_1), \nu\rangle = 0$ per qualche $\nu \in \mathbb{Z}^n$ sono densi e poiché J_n può essere reso arbitrariamente vicino a J_1, ne segue che $\omega(J_1)$ e $A(J_1)$ sono paralleli su un insieme denso di vettori $J_1 \in \mathcal{A}$. Sotto le ipotesi che ω e A siano funzioni regolari, ne segue che $\omega(J)$ e $A(J)$ sono paralleli su tutto $\mathcal{A}$.]

Esercizio 68 Si dimostrino le (86.3) e (86.4). [*Soluzione.* Si ha

$$\int \mathrm{d}\varphi\, \sin^4\varphi = \int \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi \left(1-\cos^2\varphi\right) = \int \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\int \mathrm{d}\varphi \sin^4\varphi,$$

e quindi

$$\int \mathrm{d}\varphi\, \sin^4\varphi = \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi\right).$$

In particolare si ha $\langle\sin^4\varphi\rangle = 3/8$.]

Esercizio 69 Si dimostrino le (86.15) e (86.16).

Esercizio 70 Si dimostri che i coefficienti di Fourier $H^{(1)}_\nu$ e $h^{(1)}_\nu$ nel §87 decadono esponenzialmente e se ne deduca che le funzioni $H^{(1)}(\psi, J_0)$ e $h^{(1)}(\psi, J_0)$ sono analitiche per $|\Im(\psi)| \le \xi_1$, dove $\xi_1 \in (0, \xi)$. [*Suggerimento.* Si scrivano $H^{(1)}(\psi, J_0)$ e $h^{(1)}(\psi, J_0)$ in serie di Fourier e si usi il decadimento dei coefficienti per stimare le due funzioni. Fin tanto che $|\Im(\psi_i)| \le \xi_1$, dove $\xi_1 \in (0,\xi)$, le serie di Fourier risultano sommabili, e si ha

$$\left|H^{(1)}(\psi, J_0)\right| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \left|\mathrm{e}^{i\langle\nu,\psi\rangle} H^{(1)}_\nu\right| \le \frac{\Phi}{\gamma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\nu|^{\tau+1}\,\mathrm{e}^{-(\xi-\xi_1)|\nu|} \le \frac{A\Phi}{\gamma}\,(\xi-\xi_1)^{-\tau+n+1},$$

dove si è usato l'esercizio 9 per stimare l'ultima somma (e per la definizione della costante A); analogamente si ragiona per la funzione $h^{(1)}(\psi, J_0)$.]