

## 20 | Il teorema KAM

### §89 Esistenza di moti quasiperiodici: il teorema KAM

Nel presente paragrafo ci proponiamo di dare la dimostrazione – anzi, due dimostrazioni basate su metodi differenti – del teorema KAM (cfr. pag. 376), sulla sopravvivenza dei moti quasiperiodici con frequenze diofantee quando si perturba un sistema hamiltoniano integrabile non degenere.

Come discusso all’inizio del §84, la domanda a cui vuole dare una risposta il teorema è cosa succeda a un sistema integrabile quando lo si perturba: il sistema continua in generale a essere integrabile – o comunque a manifestare un comportamento non troppo dissimile da quello di un sistema integrabile – oppure, al contrario, le sue caratteristiche cambiano drasticamente? Per molto tempo, anche sulla base dei risultati di Poincaré (si vedano i due teoremi di trivialità discussi nel capitolo 19: il teorema 84.15 e il teorema 85.7), si pensò che bastasse una perturbazione arbitrariamente piccola per distruggere immediatamente la regolarità dei moti; in altre parole, l’idea più diffusa era che i sistemi integrabili, per quanto interessanti dal punto di vista concettuale, si possano di fatto ritenere poco più di una curiosità in un mondo in cui i moti sono solitamente caotici e irregolari.

Fu in questo spirito che fu condotto nel 1953 l’esperimento numerico di Fermi-Pasta-Ulam (recentemente ribattezzato Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, dando credito anche di Mary Tsingou per il suo contributo), così chiamato dai nomi dei tre fisici che lo idearono: Enrico Fermi, John Pasta and Stanislaw Ulam. Il sistema considerato nell’esperimento consiste in una serie di oscillatori accoppiati, con interazioni a primi vicini che includono termini non lineari, descritti per esempio da un’hamiltoniana della forma (*modello di Fermi-Pasta-Ulam*)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} p_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (q_k - q_{k-1})^2 + \frac{1}{3} \alpha \sum_{k=1}^N (q_k - q_{k-1})^3 + \frac{1}{4} \beta \sum_{k=1}^N (q_k - q_{k-1})^4, \quad (89.1)$$

dove  $N - 1$  è il numero di oscillatori mobili ( $N = 16$  o  $32$  nell’esperimento originario), con  $q_0$  e  $q_N$  fissi (per esempio  $q_0 = q_N = 0$ ), mentre i parametri  $\alpha, \beta \geq 0$  misurano l’intensità delle interazioni non lineari. Per  $\alpha = \beta = 0$  il sistema si riduce a una collezione di oscillatori

armonici ed è quindi integrabile: in particolare è possibile trovare un sistema di coordinate – i modi normali (cfr. il capitolo 14) – in cui il sistema si presenta come un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati (cfr. l'esercizio 1)

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k := \frac{1}{2} P_k^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2, \quad (89.2)$$

per opportune frequenze proprie  $\omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ . Per studiare se il sistema si comporta o meno come un sistema integrabile si può allora immaginare di assegnare all'istante iniziale tutta l'energia a pochi modi normali, per esempio scegliendo dati iniziali tali che si abbia  $\mathcal{H}_i = 0$  per ogni  $i > 2$ . Nel caso del sistema integrabile ( $\alpha = \beta = 0$ ), l'energia rimane confinata ai modi normali eccitati inizialmente; quello che ci aspettava era che, al contrario, non appena  $\alpha$  o  $\beta$  o entrambi fossero diversi da zero, l'energia si trasferisse lentamente anche agli altri modi, fino a raggiungere l'equidistribuzione dell'energia totale del sistema (*termalizzazione*). Quello che invece si osservò fu un comportamento completamente diverso, noto come *paradosso di Fermi-Pasta-Ulam*: l'energia rimaneva concentrata vicino ai pochi modi eccitati e la dinamica del sistema presentava un'evoluzione quasi-periodica simile a quella del sistema integrabile. I risultati dell'esperimento numerico furono riportati nel 1955 in una relazione interna dei laboratori di Los Alamos, dove esso fu condotto: visto che i risultati furono giudicati deludenti e in contrasto con le aspettative, il lavoro non portò ad alcuna pubblicazione.

Nel frattempo, nel campo della matematica, ci si muoveva nella direzione opposta: sulla base dei risultati di Siegel su un altro problema di piccoli divisori (quello che è oggi noto come *problema di Siegel*), Kolmogorov nel 1954 dimostrò che perturbando un sistema integrabile la maggior parte dei tori invarianti sopravvive (cfr. l'enunciato informale di pag. 376 o il teorema 89.1 più avanti). Tuttavia, il lavoro di Kolmogorov non ebbe nell'immediato vasta risonanza, e fu solo dopo essere stato riprodotto da Arnol'd e Moser (in realtà circa dopo quasi un decennio), con tecniche leggermente diverse, che il risultato iniziò a essere recepito dalla comunità scientifica. Per qualche tempo, il lavoro di Kolmogorov fu anche considerato incompleto, più che altro perchè molto coinciso e avaro di dettagli tecnici, anche se oggi nessuno dubita più della sua correttezza.

Da un punto di vista qualitativo, il risultato di Kolmogorov sembra fornire una spiegazione definitiva dei risultati delle simulazioni numeriche sul modello di Fermi-Pasta-Ulam. In realtà la situazione è più complessa, dal momento che varie difficoltà impediscono un'applicazione diretta del teorema KAM:

1. una prima difficoltà, di natura tecnica, è dovuta al fatto che il sistema imperturbato, dal momento che consiste in una collezione di oscillatori armonici, non soddisfa la condizione di non degenerazione di Kolmogorov;
2. una seconda difficoltà, più sostanziale come vedremo, riguarda le dimensioni della perturbazione: il teorema KAM asserisce la sopravvivenza della maggior parte dei tori

purché il parametro perturbativo sia sufficientemente piccolo, quindi, quando si considera un sistema concreto in cui i parametri hanno valore fissati, occorre verificare che le condizioni di piccolezza del parametro perturbativo siano soddisfatte.

Torneremo su questo alla fine del capitolo (cfr. il §92), dove sarà brevemente discussa anche la difficoltà di applicare il teorema al sistema solare (cfr. l'esempio 84.2).

### 89.1 Notazioni ed enunciato del teorema

Definiamo, come nel capitolo 19,

$$D(\rho, \xi, J_0) := B_\rho(J_0) \times \mathbb{T}_\xi^n, \quad (89.3)$$

dove

$$B_\rho(J_0) := \{J \in \mathbb{C}^n : |J - J_0| \leq \rho\}, \quad \mathbb{T}_\xi^n := \{\varphi \in \mathbb{C}^n : \Re \varphi_i \in \mathbb{T}, \quad |\Im \varphi_i| \leq \xi\}.$$

Scriviamo

$$D_0 = D(\rho_0, \xi_0, J_0),$$

dove  $J_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\rho_0, \xi_0 > 0$  sono fissati. Scriviamo anche, per convenienza futura,

$$D_k = D(\rho_k, \xi_k, J_k) = B_{\rho_k}(J_k) \times \mathbb{T}_{\xi_k}^n,$$

dove sia  $J_k \in \mathbb{R}^n$  che  $\rho_k, \xi_k > 0$  sono da determinare.

Seguendo le notazioni (85.6), introduciamo in  $D_0$  la norma

$$\|f\|_0 := \max_{(\varphi, J) \in D_0} \left( \left| \frac{\partial f}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \right)$$

e, analogamente, per una qualsiasi funzione  $f$  analitica in  $D_k$ , poniamo

$$\|f\|_k := \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left( \left| \frac{\partial f}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho_k} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \right). \quad (89.4)$$

Consideriamo il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon V(\varphi, J), \quad (89.5)$$

analitica in  $D_0$ , e definiamo

$$\omega_0(J) := \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J).$$

Se l'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  è non degenere (cfr. la definizione 84.9), l'applicazione frequenza  $J \mapsto \omega_0(J)$  definisce un diffeomorfismo.

**Teorema 89.1** (TEOREMA KAM) *Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana (89.5), con  $\mathcal{H}_0$  e  $V$  funzioni analitiche nel dominio  $D_0$  in (89.3). Si assuma che  $\mathcal{H}_0$  sia non degenere e che  $\omega_0(J_0)$  soddisfi la condizione diofantea (84.20), per opportune costanti  $\tau > n-1$  e  $\gamma > 0$ . Allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  esistono due funzioni  $\beta$  e  $\alpha$ , tali che*

1.  $\beta: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  e  $\alpha: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
2. le funzioni  $\beta$  e  $\alpha$  sono analitiche in  $\mathbb{T}_{\xi'}^n$ , per qualche  $\xi' < \xi_0$ , e si ha  $\beta, \alpha \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
3. la superficie

$$\varphi = \psi + \beta(\psi), \quad J = J_0 + \alpha(\psi), \quad \psi \in \mathbb{T}^n, \quad (89.6)$$

è invariante per il sistema;

4. il moto sulla superficie è descritto da  $\psi \mapsto \psi + \omega_0(J_0)t$ .

La superficie (89.6) è diffeomorfa al toro  $n$ -dimensionale e costituisce perciò un toro invariante (o toro KAM) per il sistema hamiltoniano perturbato.

**Osservazione 89.2** Non è restrittivo assumere, come abbiamo fatto, che il dominio di analiticità dell'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  abbia la forma  $B_{\rho_0}(J_0) \times \mathbb{T}_{\xi_0}^n$ . In generale il dominio di analiticità nelle azioni dell'hamiltoniana (89.5) è un aperto  $\mathcal{A}$  di  $\mathbb{C}^n$  (contenente un aperto di  $\mathbb{R}^n$  poiché l'hamiltoniana è una funzione reale). Fissato  $J_0 \in \mathcal{A}$  possiamo allora considerare l'intorno  $B_{\rho_0}(J_0) \subset \mathcal{A}$  e lavorare con la restrizione di  $\mathcal{H}$  a tale intorno.

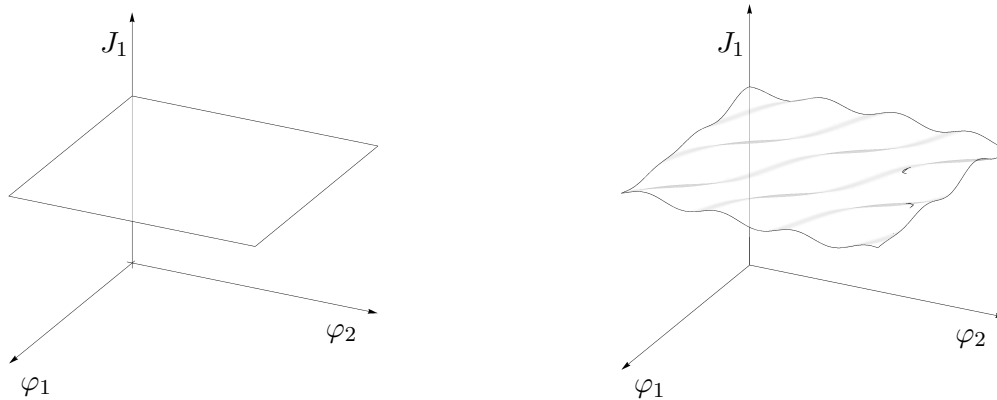


Figura 20.1: Toro imperturbato (a sinistra) e toro perturbato (a destra).

**Osservazione 89.3** Per  $\varepsilon = 0$  il toro (89.6) si riduce al toro imperturbato  $\varphi = \psi$ ,  $J = J_0$ , che è un toro “piatto”, dal momento che  $J$  è costante al variare di  $\varphi$ . Poiché  $\beta, \alpha \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il toro perturbato è leggermente “deformato” rispetto al toro imperturbato. Infatti, per  $\varepsilon$  piccolo, la funzione  $\varphi = \psi + \beta(\psi)$  in (89.6) può essere invertita in  $\psi = \varphi + \zeta(\varphi)$ , dove

$\zeta \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , così che si ottiene  $J = J_0 + \alpha(\varphi + \zeta(\varphi))$ . Quindi  $J$  non è più costante in  $\varphi$ , ma le sue deviazioni dal valore costante  $J_0$  sono infinitesime in  $\varepsilon$ . Il toro perturbato apparirà quindi come una superficie leggermente ondulata; si veda per esempio la figura 20.1, dove si è rappresentato  $J_1$  in funzione di  $\varphi$  per un possibile sistema perturbato in dimensione  $n = 2$  (un grafico analogo si ha per la variabile  $J_2$ ).

**Osservazione 89.4** Mentre per  $\varepsilon = 0$  l'intero spazio delle fasi è foliato da tori invarianti, per  $\varepsilon \neq 0$  solo alcuni dei tori con frequenze diofantee sopravvivono. Poiché la costante  $\varepsilon_0$  dipende dalla costante  $\gamma$ , a  $\varepsilon$  fissato sopravvivono solo i tori le cui frequenze soddisfano la condizione diofantea con  $\gamma$  maggiore di un certo valore. Per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la misura relativa delle frequenze che corrispondono ai tori che sopravvivono tende a 1 (cfr. anche l'osservazione 89.10 più avanti).

Per ulteriori commenti sul teorema si rimanda al §92.

## 89.2 Primo passo: trasformazione canonica

Poniamo  $V_0 := \varepsilon V$  e riscriviamo l'hamiltoniana (89.5) nella forma

$$\mathcal{H}(\varphi, J) = \mathcal{H}_0(J) + V_0(\varphi, J),$$

dove  $\mathcal{H}_0$  e  $V_0$  sono analitiche in  $D_0 = D(\rho_0, \xi_0, J_0)$ . Introduciamo le notazioni

$$\varepsilon_0 := \|V_0\|_0 = \max_{(\varphi, J) \in D_0} \left( \left| \frac{\partial V_0}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \right| \right), \quad (89.7a)$$

$$E_0 := \|\mathcal{H}_0\|_0 = \max_{J \in B_{\rho_0}(J_0)} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J}(J) \right|, \quad (89.7b)$$

$$\eta_0 := \max_{J \in B_{\rho_0}(J_0)} \left\| \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J^2}(J) \right)^{-1} \right\|, \quad (89.7c)$$

dove la norma  $\|\cdot\|$  in (89.7c) indica la norma uniforme indotta dalla norma euclidea (cfr. la definizione 3.1).

**Osservazione 89.5** Nella discussione che segue,  $\varepsilon_0$ , come definito in (89.7a), gioca il ruolo del parametro perturbativo  $\varepsilon$  dell'enunciato del teorema, dal momento che è  $\varepsilon_0$  che deve essere sufficientemente piccolo perché si applichi il teorema 89.1.

Se l'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  è non degenere, allora  $\eta_0$  in (89.7c) è finito. Richiediamo che  $\omega_0(J_0)$  soddisfi la condizione diofantea (84.20) per qualche  $\gamma > 0$  e  $\tau > n - 1$ :

$$|\langle \omega_0(J_0), \nu \rangle| > \frac{1}{C_0 |\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \quad (89.8)$$

dove abbiamo definito  $C_0 := 1/\gamma$ .

Vogliamo trovare una trasformazione di coordinate  $(\varphi, J) \mapsto (\varphi', J')$  tale che nelle nuove variabili l'hamiltoniana sia analitica in un dominio  $D_1$  e abbia la forma

$$\mathcal{H}'(\varphi', J') = \mathcal{H}_1(J') + V_1(\varphi', J'),$$

con  $\|V_1\|_1$  molto più piccola di  $\|V_0\|_0$  (cfr. il §89.1 per le notazioni).

Cerchiamo una funzione caratteristica di Hamilton della forma

$$W(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle + W_0(\varphi, J'),$$

così che

$$\begin{cases} J = J' + \frac{\partial W_0}{\partial \varphi}(\varphi, J'), \\ \varphi' = \varphi + \frac{\partial W_0}{\partial J'}(\varphi, J'). \end{cases} \quad (89.9)$$

Scriviamo

$$V_0(\varphi, J) = V_0^{\leq N_0}(\varphi, J) + V_0^{> N_0}(\varphi, J),$$

dove

$$V_0^{\leq N_0}(\varphi, J) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| \leq N_0}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_{0,\nu}(J), \quad V_0^{> N_0}(\varphi, J) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N_0}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_{0,\nu}(J),$$

per qualche  $N_0 \in \mathbb{N}$  da determinarsi. Si noti che  $V_{0,0}(J) = \langle V_0(\cdot, J) \rangle$  denota la media della funzione  $V_0(\varphi, J)$  sul toro  $\mathbb{T}^n$ .

Imponiamo che  $W_0(\varphi, J')$  risolva l'equazione omologica

$$\left\langle \omega_0(J'), \frac{\partial W_0}{\partial \varphi}(\varphi, J') \right\rangle + \left( V_0^{\leq N_0}(\varphi, J') - V_{0,0}(J') \right) = 0. \quad (89.10)$$

Si ha quindi (cfr. il §84)

$$W_0(\varphi, J') = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ 0 < |\nu| \leq N_0}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{0,\nu}(J'), \quad W_{0,\nu}(J') = -\frac{V_{0,\nu}(J')}{i \langle \omega_0(J'), \nu \rangle},$$

fin tanto che risulti  $\langle \omega_0(J'), \nu \rangle \neq 0$ .

Possiamo stimare (cfr. l'esercizio 2)

$$\max_{J \in B_\rho(J_0)} \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J) \right\| \leq \frac{2E_0 n}{\rho_0} \quad (89.11)$$

per ogni  $\rho \leq \rho_0/2$ .

D'altra parte, perché i coefficienti  $W_{0,\nu}(J')$  siano ben definiti, dobbiamo restringere il dominio della variabile  $J'$ . Se  $\omega_0(J_0)$  soddisfa la condizione diofantea (89.8), per ogni  $J' \in B_\rho(J_0)$  si ha

$$\begin{aligned} |\langle \omega_0(J'), \nu \rangle| &\geq |\langle \omega_0(J_0), \nu \rangle| - |\langle \omega_0(J') - \omega_0(J_0), \nu \rangle| \geq \frac{1}{C_0 |\nu|^\tau} - |\omega_0(J') - \omega_0(J_0)| |\nu| \\ &\geq \frac{1}{C_0 |\nu|^\tau} - \max_{J \in B_\rho(J_0)} \left\| \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J) \right\| |J' - J_0| |\nu| \geq \frac{1}{C_0 |\nu|^\tau} - \frac{2E_0 n}{\rho_0} \rho |\nu|, \end{aligned}$$

purché si abbia  $\rho \leq \rho_0/2$ , in modo da utilizzare la stima (89.11). Se richiediamo

$$\rho < \bar{\rho}_1 < \frac{\rho_0}{2}, \quad \bar{\rho}_1 := \rho_0 \min_{0 < |\nu| \leq N_0} \frac{1}{2E_0 n |\nu|} \frac{1}{2C_0 |\nu|^\tau} = \frac{\rho_0}{4C_0 E_0 n N_0^{\tau+1}}, \quad (89.12)$$

otteniamo quindi

$$|\langle \omega_0(J'), \nu \rangle| \geq \frac{1}{2C_0 |\nu|^\tau} \quad \forall J' \in B_\rho(J_0).$$

Poniamo, per semplicità notazionale,  $\tilde{D}_0 := D(\rho_0(1 - \delta_0), \xi_0 - \delta_0, J_0)$ . Poiché i coefficienti di Fourier di  $[\partial V_0 / \partial \varphi](\varphi, J)$  sono  $i\nu V_{0,\nu}(J)$ , la (84.4), applicata alla funzione  $\partial V_0 / \partial \varphi$ , implica

$$\max_{J \in B_{\rho_0}(J_0)} |\nu V_{0,\nu}(J)| \leq \max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left| \frac{\partial V_0}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| e^{-\xi_0 |\nu|} \leq \rho_0 \varepsilon_0 e^{-\xi_0 |\nu|},$$

così che troviamo (cfr. l'esercizio 9 del capitolo 19)

$$\begin{aligned} \max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left| V_0^{>N_0}(\varphi, J) \right| &\leq \max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N_0}} |e^{i\langle \nu, \varphi \rangle}| |V_{0,\nu}(J)| \leq \max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N_0}} |e^{i\langle \nu, \varphi \rangle}| |\nu|^{-1} |\nu V_{0,\nu}(J)| \\ &\leq \rho_0 \varepsilon_0 \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N_0}} e^{(\xi_0 - \delta_0)|\nu|} |\nu|^{-1} e^{-\xi_0 |\nu|} \\ &\leq \rho_0 \varepsilon_0 e^{-\delta_0 N_0/2} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| > N_0}} e^{-\delta_0 |\nu|/2} |\nu|^{-1} \leq B_1 \rho_0 \varepsilon_0 \delta_0^{-n+1} e^{-\delta_0 N_0/2}, \end{aligned} \quad (89.13)$$

per un'opportuna costante positiva  $B_1$ .

**Osservazione 89.6** Qui e nel seguito, indichiamo con la lettera  $B$ , eventualmente con pedici o barre, costanti che non dipendono dai parametri in gioco ( $\rho_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $E_0$ ,  $\eta_0$  e  $C_0$ ), ma che possono invece dipendere da altri parametri, quali l'esponente diofanteo  $\tau$  o la dimensione  $n$ .

La (89.13) porta alle stime (cfr. l'esercizio 3)

$$\max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left| \frac{\partial V_0^{>N_0}}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq B_2 \rho_0 \varepsilon_0 \delta_0^{-n} e^{-\delta_0 N_0/2}, \quad (89.14a)$$

$$\max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left| \frac{\partial V_0^{>N_0}}{\partial J}(\varphi, J) \right| \leq B_2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n} e^{-\delta_0 N_0/2}, \quad (89.14b)$$

per un'opportuna costante  $B_2 > 0$ . In maniera analoga si dimostra che (cfr. l'esercizio 4)

$$\max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left| \frac{\partial V_0^{\leq N_0}}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq B_3 \rho_0 \varepsilon_0 \delta_0^{-n}, \quad \max_{(\varphi, J') \in \tilde{D}_0} \left| \frac{\partial V_0^{\leq N_0}}{\partial J}(\varphi, J) \right| \leq B_3 \varepsilon_0 \delta_0^{-n}, \quad (89.15)$$

per un'opportuna costante positiva  $B_3$ .

La (89.14) mostra che, pur di scegliere  $N_0$  sufficientemente grande, possiamo rendere  $V_0^{>N_0}$  piccolo quanto vogliamo. In particolare se scegliamo

$$N_0 \geq \frac{2}{\delta_0} \log \left( \frac{2B_2}{C_0 \varepsilon_0 \delta_0^n} \right), \quad (89.16)$$

la (89.14) dà

$$\max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left( \left| \frac{\partial V_0^{>N_0}}{\partial J}(\varphi, J) \right| + \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{\partial V_0^{>N_0}}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \right) \leq C_0 \varepsilon_0^2. \quad (89.17)$$

Possiamo allora fissare

$$\delta_0 = \frac{\xi_0}{\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}} \quad (89.18)$$

e scegliere, per un'opportuna costante positiva  $A_0$ ,

$$N_0 = \frac{A_0}{\xi_0^2} \left( \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^2, \quad (89.19)$$

che soddisfa automaticamente la stima (89.16) (cfr. l'esercizio 5).

Con la scelta (89.18) per  $\delta_0$ , la stima (89.15) dà

$$\max_{(\varphi, J) \in \tilde{D}_0} \left( \left| \frac{\partial V_0^{\leq N_0}}{\partial J}(\varphi, J) \right| + \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{\partial V_0^{\leq N_0}}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \right) \leq 2B_3 \frac{\varepsilon_0}{\xi_0^n} \left( \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^n,$$

dove  $B_3$  è come in (89.15). Definiamo allora

$$\bar{D}_{1,1} := D(\bar{\rho}_1(1 - \delta_0), \xi_0 - \delta_0, J_0), \quad \bar{D}_{1,2} := D(\bar{\rho}_1(1 - 2\delta_0), \xi_0 - 2\delta_0, J_0),$$



con  $\bar{\rho}_1$  definito in (89.12). La funzione  $W_0(\varphi, J')$  è ben definita e analitica per  $(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,1}$  e soddisfa la stima (cfr. l'esercizio 9 del capitolo 19)

$$\max_{(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,1}} |W_0(\varphi, J')| \leq 2\rho_0 C_0 \varepsilon_0 \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ 0 < |\nu| \leq N_0}} |\nu|^{\tau-1} e^{-\delta_0 |\nu|} \leq B_4 \rho_0 C_0 \varepsilon_0 \delta_0^{-\tau-n+1},$$

così che si ha (cfr. l'esercizio 6)

$$\max_{(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,2}} \left( \left| \frac{\partial W_0}{\partial J'} \right| + \frac{1}{\bar{\rho}_1(1-2\delta_0)} \left| \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} \right| \right) \leq B_5 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau} E_0 N_0^{\tau+1}, \quad (89.20)$$

dove si è tenuto conto della definizione in (89.12) di  $\bar{\rho}_1$ , per opportune costanti  $B_4$  e  $B_5$ .

Ragionando in modo analogo (cfr. di nuovo l'esercizio 6) si trova

$$\max_{(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,2}} \left\| \frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi \partial J'} \right\| \leq B_5 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau-1} E_0 N_0^{\tau+1}. \quad (89.21)$$

Se consideriamo quindi la trasformazione di coordinate definita dalla (89.9), vediamo che, riscrivendo la seconda equazione nella forma

$$G(\varphi, \varphi', J') := \varphi - \varphi' + \frac{\partial W_0}{\partial J'}(\varphi, J') = 0, \quad (89.22)$$

abbiamo

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = \mathbf{1} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi \partial J'} \implies \det \frac{\partial G}{\partial \varphi} \geq 1 - O\left(\left\| \frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi \partial J'} \right\|\right) \geq \frac{1}{2},$$

purché  $\varepsilon_0$  sia sufficientemente piccolo, più precisamente purché  $\varepsilon_0$  sia tale che

$$B_6 C_0 \varepsilon_0 (C_0 E_0) \delta_0^{-n-\tau-1} N_0^{\tau+1} < \frac{1}{2}, \quad (89.23)$$

per qualche costante  $B_6 \geq B_5$ . Possiamo allora applicare il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 7) e invertire la seconda relazione in (89.9) così da ottenere (cfr. anche il §77.3)

$$\varphi = \varphi' + \Delta_1(\varphi', J') \quad (89.24)$$

per un'opportuna funzione  $\Delta_1(\varphi', J')$ . Inserendo la (89.24) nella prima equazione di (89.9) troviamo, per un'opportuna funzione  $\Xi_1$ ,

$$J = J' + \Xi_1(\varphi', J'). \quad (89.25)$$

Confrontando le (89.24) e (89.25) con le (89.9), si vede che

$$\Delta_1(\varphi', J') = -\frac{\partial W_0}{\partial J'}(\varphi, J'), \quad \Xi_1(\varphi', J') = \frac{\partial W_0}{\partial \varphi}(\varphi, J'). \quad (89.26)$$

Fin tanto che  $\varphi'$  è tale che si abbia  $(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,2}$  possiamo quindi stimare  $\Xi_1$  e  $\Delta_1$  tramite la (89.20). Se prendiamo  $(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3} := D(\bar{\rho}_1(1 - 3\delta_0), \xi_0 - 3\delta_0, J_0)$ , si trova

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}} |\Delta_1(\varphi', J')| \leq B_5 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau} E_0 N_0^{\tau+1}. \quad (89.27a)$$

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}} |\Xi_1(\varphi', J')| \leq B_5 \bar{\rho}_1 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau} E_0 N_0^{\tau+1}, \quad (89.27b)$$

con  $B_5$  come in (89.20). Infatti si vede immediatamente che, purché  $\varepsilon_0$  soddisfi la (89.23), si ha

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}} |\Delta_1(\varphi', J')| \leq \delta_0, \quad \max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}} |\Xi_1(\varphi', J')| \leq \bar{\rho}_1 \delta_0,$$

che implica effettivamente  $(\varphi, J') \in \bar{D}_{1,2}$ . Da qui si conclude che le due funzioni  $\Delta_1$  e  $\Xi_1$  sono analitiche nel dominio  $\bar{D}_1 := \bar{D}_{1,4} := D(\bar{\rho}_1(1 - 4\delta_0), \xi_0 - 4\delta_0, J_0)$  e

$$\begin{cases} \varphi = \varphi' + \Delta_1(\varphi', J'), \\ J = J' + \Xi_1(\varphi', J') \end{cases} \quad (89.28)$$

definisce una trasformazione canonica  $\mathcal{C}_1: (\varphi', J') \rightarrow (\varphi, J)$  tale che  $\mathcal{C}_0(\bar{D}_1) \subset D_0$ . L'ulteriore riduzione di  $\delta_0$  del dominio, rispetto a  $\bar{D}_{1,3}$ , è stata effettuata per poter stimare anche le derivate utilizzando il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 8).

### 89.3 Primo passo: stime della nuova hamiltoniana

Nelle nuove variabili l'hamiltoniana acquista la forma

$$\mathcal{H}'(\varphi', J') = \mathcal{H}_1(J') + V_1(\varphi', J'), \quad \mathcal{H}_1(J') := H_0(J') + V_{0,0}(J'), \quad (89.29)$$

mentre

$$\begin{aligned} V_1(\varphi', J') &= \mathcal{H}(\varphi, J) - \mathcal{H}_1(J') \\ &= \mathcal{H}_0(J' + \Xi_1(\varphi', J')) + V_0(\varphi' + \Delta_1(\varphi', J'), J' + \Xi_1(\varphi', J')) - \mathcal{H}_0(J') - V_{0,0}(J'). \end{aligned}$$

Abbreviamo per semplicità  $\Xi_1(\varphi', J') = \Xi_1$  e  $\Delta_1(\varphi', J') = \Delta_1$ . Se scriviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(J' + \Xi_1) &= \mathcal{H}_0(J') + \langle \omega_0(J'), \Xi_1 \rangle + \left[ \mathcal{H}_0(J' + \Xi_1) - \mathcal{H}_0(J') - \langle \omega_0(J'), \Xi_1 \rangle \right], \\ V_0(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1) &= V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1) + V_0^{> N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1), \\ V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1) &= V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J') \\ &\quad + \left[ V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1) - V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J') \right], \end{aligned}$$

e utilizziamo il fatto che, in virtù delle (89.10) e (89.26),

$$\langle \omega_0(J'), \Xi_1 \rangle + V_0^{\leq N_0}(\varphi, J') - V_{0,0}(J') = 0,$$

possiamo riscrivere  $V_1(\varphi', J')$  nella forma

$$V_1(\varphi', J') = a_1(\varphi', J') + b_1(\varphi', J') + c_1(\varphi', J'), \quad (89.30)$$

dove

$$a_1(\varphi', J') := \mathcal{H}_0(J' + \Xi_1) - \mathcal{H}_0(J') - \langle \omega_0(J'), \Xi_1 \rangle, \quad (89.31a)$$

$$b_1(\varphi', J') := V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1) - V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J'), \quad (89.31b)$$

$$c_1(\varphi', J') := V_0^{> N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + \Xi_1). \quad (89.31c)$$

Si ha

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_1} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J'}(J') \right| \leq E_0 + \varepsilon_0. \quad (89.32)$$

Analogamente si trova (cfr. l'esercizio 11)

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_1} \left\| \det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J'^2}(J') \right)^{-1} \right\| \leq \eta_0 \left( 1 + \frac{4n\eta_0\varepsilon_0}{\rho_0} \right). \quad (89.33)$$

Infine, per  $(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}$ , si ha (cfr. l'esercizio 14)

$$|a_1(\varphi', J')| \leq \int_0^1 dt (1-t) \sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial^2}{\partial J'_i \partial J'_k} \mathcal{H}_0(J' + t\Xi_1) \Xi_{1,i} \Xi_{1,k} \right| \leq B_7 \frac{E_0}{\rho_0} |\Xi_1|^2, \quad (89.34a)$$

$$|b_1(\varphi', J')| \leq \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial J'_i} V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + t\Xi_1) \Xi_{1,i} \right| \leq B_7 \frac{\varepsilon_0}{\delta_0^n} |\Xi_1|, \quad (89.34b)$$

$$|c_1(\varphi', J')| \leq \max_{(\varphi, J) \in \bar{D}_{1,2}} \left| V_0^{> N_0}(\varphi, J) \right| \leq B_7 \rho_0 \delta_0 C_0 \varepsilon_0^2. \quad (89.34c)$$

per un'opportuna costante positiva  $B_7$ . Le stime (89.34), introdotte nella (89.30), danno (cfr. l'esercizio 15)

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}} |V_1(\varphi', J')| \leq B_8 \rho_0 C_0^2 \varepsilon_0^2 E_0 \delta_0^{-2\tau-2n}, \quad (89.35)$$

per qualche costante positiva  $B_8$ , da cui segue che

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_1} \left( \left| \frac{\partial V_1}{\partial J'} \right| + \frac{1}{\rho_1} \left| \frac{\partial V_1}{\partial \varphi'} \right| \right) \leq B_0 C_0 \varepsilon_0^2 (C_0 E_0)^2 \delta_0^{-2\tau-2n-1} N_0^{\tau+1}, \quad (89.36)$$

per un'opportuna costante positiva  $B_0$ .

### 89.4 Primo passo: blocco della frequenza

La nuova hamiltoniana imperturbata  $\mathcal{H}_1(J')$  ha frequenza

$$\omega_1(J') := \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J'}(J').$$

Ovviamente in generale si ha  $\omega_1(J_0) \neq \omega_0(J_0)$  e quindi non è detto che  $\omega_1(J_0)$  soddisfi una qualche condizione diofantea.

Vogliamo ora vedere se è possibile fissare un valore  $J_1$  all'interno di  $B_{\bar{\rho}_1/4}(J_0)$  tale che, per  $J' = J_1$ , la nuova hamiltoniana imperturbata abbia frequenza  $\omega_1(J_1) = \omega_0(J_0)$ . Perché questo accada dobbiamo risolvere l'equazione

$$\omega_1(J_1) = \omega_0(J_1) + \frac{\partial V_{0,0}}{\partial J'}(J_1) = \omega_0(J_0), \quad (89.37)$$

dove  $J_0$  e quindi  $\omega_0(J_0)$  sono fissati. Si noti che le funzioni  $\omega_0$  e  $\omega_1$  sono analitiche in  $B_{\rho_0}(J_0)$ ; inoltre, per ogni  $J_1 \in B_{\bar{\rho}_1/4}(J_0)$  si ha  $B_{\bar{\rho}_1/4}(J_1) \subset B_{\bar{\rho}_1/2}(J_0)$  (cfr. la figura 20.2).

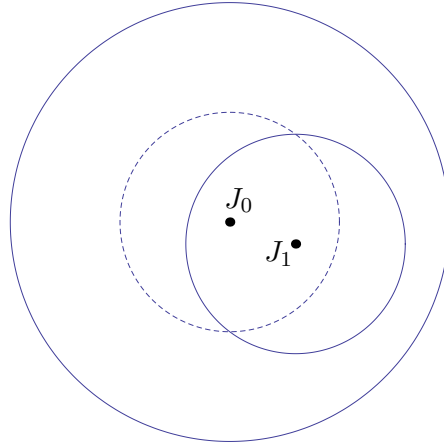


Figura 20.2: Intorni  $B_{\bar{\rho}_1/2}(J_0)$  e  $B_{\bar{\rho}_1/4}(J_1)$ .

Se scriviamo

$$\begin{aligned} \omega_0(J_1) &= \omega_0(J_0) + \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J_0)(J_1 - J_0) \\ &+ \int_0^1 dt (1-t) \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial J_i \partial J_k}(J_0 + t(J_1 - J_0))(J_{1,i} - J_{0,i})(J_{1,k} - J_{0,k}) \end{aligned}$$

e definiamo

$$F_1(J, J_0) := \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial J}(J_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial V_{0,0}}{\partial J'}(J) + \int_0^1 dt (1-t) \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial J_i \partial J_k}(J_0 + t(J - J_0)) (J_i - J_{0,i}) (J_k - J_{0,k}) \right),$$

possiamo riscrivere la (89.37) come  $F(J, J_0) = 0$ , dove

$$F(J, J_0) := J_1 - J_0 + F_1(J_1, J_0). \quad (89.38)$$

Si ha (cfr. l'esercizio 16)

$$|F_1(J, J_0)| \leq \eta_0 \sqrt{n} \left( \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2 + \varepsilon_0 \right) \quad (89.39)$$

e quindi

$$\left\| \frac{\partial F_1}{\partial J}(J, J_0) \right\| \leq \frac{2\eta_0 n}{\rho_0} \left( \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2 + \varepsilon_0 \right)$$

per ogni  $J$  tale che  $|J - J_0| \leq \rho \leq \rho_0/2$ .

Per avere una soluzione  $J_1$  dell'equazione (89.38) con  $|J_1 - J_0| \leq \bar{\rho}_1/4$  occorre che si abbia

$$\eta_0 \sqrt{n} \left( \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2 + \varepsilon_0 \right) \leq \frac{\bar{\rho}_1}{4}, \quad B_9 \frac{2\eta_0 n}{\rho_0} \left( \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2 + \varepsilon_0 \right) < \frac{1}{2}, \quad (89.40)$$

per un'opportuna costante  $B_9$ , in modo da poter applicare il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 17). Se scegliamo

$$\rho := \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{E_0 n}}, \quad (89.41)$$

otteniamo che per ogni  $J$  tale che  $|J - J_0| \leq \rho$  si ha

$$|F_1(J, J_0)| \leq 2\eta_0 \varepsilon_0 \sqrt{n}, \quad \left\| \frac{\partial F_1}{\partial J}(J, J_0) \right\| \leq \frac{4\eta_0 \varepsilon_0 n}{\rho_0}. \quad (89.42)$$

Occorre quindi che si abbia

$$2\eta_0 \varepsilon_0 \sqrt{n} < \frac{\bar{\rho}_1}{4} \implies |J_1 - J_0| \leq \frac{\bar{\rho}_1}{4}, \quad \frac{4B_9 \eta_0 \varepsilon_0 n}{\rho_0} < \frac{1}{2} \implies \det \frac{\partial F}{\partial J} \geq \frac{1}{2}.$$

Riassumendo dobbiamo imporre le condizioni

$$\frac{8B_9 \eta_0 \varepsilon_0 n}{\rho_0} < 1, \quad 2\eta_0 \varepsilon_0 \sqrt{n} < \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{E_0 n}} < \frac{\bar{\rho}_1}{4},$$

che sono ovviamente soddisfatte per  $\varepsilon_0$  sufficientemente piccolo. Possiamo per esempio imporre che  $\varepsilon_0$  soddisfi le condizioni

$$B_{10} \frac{\eta_0 \varepsilon_0}{\rho_0} < 1, \quad B_{10} \left( \frac{\eta_0 E_0}{\rho_0} \right)^2 \frac{\varepsilon_0}{E_0} < 1, \quad B_{10} C_0 \varepsilon_0 (C_0 E_0) N_0^{2(\tau+1)} < 1, \quad (89.43)$$

per un'opportuna costante  $B_{10}$ . Ne concludiamo che se  $\varepsilon_0$  è sufficientemente piccolo esiste una soluzione  $J_1$  dell'equazione (89.37) tale che  $|J_1 - J_0| \leq \bar{\rho}_1/4$ .

### 89.5 Primo passo: dominio di analiticità della nuova hamiltoniana

Consideriamo la trasformazione  $\mathcal{C}_1$  costruita nel §89.2 nel dominio  $D_1 := D(\rho_1, \xi_1, J_1)$  (cfr. l'inizio del §89.1 per le notazioni), dove  $J_1$  è la soluzione dell'equazione (89.37), mentre

$$\xi_1 = \xi_0 - 4\delta_0 = \xi_0 \left( 1 - 4 \left( \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^{-1} \right), \quad (89.44a)$$

$$\rho_1 = \frac{\bar{\rho}_1}{4} = \frac{\rho_0}{16n C_0 E_0 N_0^{\tau+1}} = \frac{\rho_0}{16n C_0 E_0} \left( \frac{A_0}{\xi_0^2} \left( \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right) \right)^{-2(\tau+1)}, \quad (89.44b)$$

dove abbiamo utilizzato le definizioni (89.18) di  $\delta_0$ , (89.19) di  $N_0$  e (89.12) di  $\bar{\rho}_1$ .

Introduciamo la norma  $\|\cdot\|_1$  in accordo con la (89.4). Se definiamo, in analogia con le (89.7),

$$\varepsilon_1 := \|V_1\|_1 = \max_{(\varphi, J) \in D_1} \left( \left| \frac{\partial V_1}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho_1} \left| \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \right| \right), \quad (89.45a)$$

$$E_1 := \|\mathcal{H}_1\|_1 = \max_{J \in B_{\rho_1}(J_1)} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J}(J) \right|, \quad (89.45b)$$

$$\eta_1 := \max_{J \in B_{\rho_1}(J_1)} \left\| \det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J^2}(J) \right)^{-1} \right\|, \quad (89.45c)$$

le stime (89.32), (89.33) e (89.36) danno

$$\varepsilon_1 \leq B_0 C_0 \varepsilon_0^2 (C_0 E_0)^2 \delta_0^{-2\tau-2n-1} N_0^{\tau+1}, \quad (89.46a)$$

$$E_1 \leq E_0 + \varepsilon_0, \quad (89.46b)$$

$$\eta_1 \leq \eta_0 (1 + 4n\eta_0 \rho_0^{-1} \varepsilon_0), \quad (89.46c)$$

dove  $\delta_0$  e  $N_0$  sono dati dalla (89.18) e dalla (89.19), rispettivamente.

**Osservazione 89.7** Il dominio  $D_1 = D(\rho_1, \xi_1, J_1)$  in cui le funzioni  $\mathcal{H}_1$  e  $V_1$  sono definite e analitiche differisce dal dominio  $D_0 = D(\rho_0, \xi_0, J_0)$  in quanto

1.  $\rho_1$  è legato a  $\rho_0$  dalla relazione (89.44b), ed è quindi molto più piccolo di  $\rho_0$ ;
2.  $\xi_1$  è legato a  $\xi_0$  dalla relazione (89.44a), ed è quindi poco più piccolo di  $\xi_0$ ;
3.  $J_1$  è leggermente traslato rispetto a  $J_0$ .

Per semplificare le notazioni possiamo sostituire la (89.46a) con

$$C_0\varepsilon_1 \leq (C_0\varepsilon_0)^{3/2} \quad (89.47)$$

e la (89.44b) con

$$\rho_1 = \rho_0 \left( \log \frac{1}{C_0\varepsilon_0} \right)^{-2(\tau+2)}. \quad (89.48)$$

In conclusione abbiamo le relazioni

$$C_0\varepsilon_1 \leq (C_0\varepsilon_0)^{3/2}, \quad E_1 \leq E_0 + \varepsilon_0, \quad \eta_1 \leq \eta_0 (1 + 4\eta_0 n \rho_0^{-1} \varepsilon_0), \quad (89.49)$$

a cui si aggiungono

$$\xi_1 = \xi_0 \left( 1 - 4 \left( \log \frac{1}{C_0\varepsilon_0} \right)^{-1} \right), \quad \rho_1 = \rho_0 \left( \log \frac{1}{C_0\varepsilon_0} \right)^{-2(\tau+2)}, \quad (89.50)$$

purché  $\varepsilon_0$  piccolo sia abbastanza. Mettendo insieme le stime (89.23) e (89.43) su  $\varepsilon_0$  trovate nei paragrafi precedenti otteniamo le condizioni

$$\bar{B} \frac{\varepsilon_0 \eta_0}{\rho_0} < 1, \quad \bar{B} \frac{\varepsilon_0}{E_0} \left( \frac{\eta_0 E_0}{\rho_0} \right)^2 < 1, \quad \bar{B} C_0 \varepsilon_0 (C_0 E_0) \left( \frac{1}{\xi_0} \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^{4(\tau+1)} < 1, \quad (89.51)$$

dove  $\bar{B}$  è un'opportuna costante positiva; nello scrivere le stime (89.51) si è tenuto conto che  $\tau > n - 1$ .

**Osservazione 89.8** Le due relazioni (89.50) mostrano che dopo il primo passo il dominio di analiticità dell'hamiltoniana si è ristretto: di poco nella variabile angolare, di molto nella variabile d'azione. I valori delle costanti  $\eta_1$  ed  $E_1$  sono peggiorati di poco rispetto ai valori iniziali  $\eta_0$  ed  $E_0$ . D'altra parte il valore di  $\varepsilon_1$  è molto più piccolo del valore iniziale: questo implica che nelle nuove variabili la perturbazione è molto più piccola di quanto non fosse nelle variabili originarie.

## 89.6 Passo generale

Una volta completato il primo passo possiamo iterare la costruzione e definire una trasformazione canonica  $\mathcal{C}_2 : (\varphi'', J'') \rightarrow (\varphi', J')$  che porta il dominio  $D_2 := D(\rho_2, \xi_2, J_2)$ , con  $\rho_2$ ,  $\xi_2$  e  $J_2$  opportuni (cfr. sotto), all'interno del dominio  $D_1$ . Componendo la trasformazione  $\mathcal{C}_2$

con la trasformazione  $\mathcal{C}_1$  costruita al passo precedente, otteniamo una trasformazione canonica  $\bar{\mathcal{C}}_2 := \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$  che porta il dominio  $D_2$  nel dominio originario  $D_0$ .

Per non appesantire le notazioni indichiamo con  $(\varphi', J')$  le variabili a cui porta l'inversa della trasformazione  $\bar{\mathcal{C}}_2$ . Nelle nuove variabili l'hamiltoniana acquista la forma

$$\mathcal{H}_2(J') + V_2(\varphi', J').$$

Se poniamo  $\|V_2\|_2 = \varepsilon_2$ , le costanti  $\xi_2$ ,  $\rho_2$  ed  $\varepsilon_2$  sono legate alle costanti  $\xi_1$ ,  $\rho_1$  ed  $\varepsilon_1$  dalle medesime relazioni (89.49) e (89.50), semplicemente con gli indici 0 e 1 sostituiti dagli indici 1 e 2, rispettivamente. Il valore  $J_2$  è fissato dalla richiesta che  $\omega_2(J_2) = \omega_1(J_1) = \omega_0(J_0)$ , dove  $\omega_2(J) := [\partial\mathcal{H}_2/\partial J](J)$ , ed è tale che  $|J_2 - J_1| \leq \rho_2$ , se  $J_1$  è dato dalla soluzione della (89.37). Infine le costanti  $E_2$  ed  $\eta_2$  sono definite dalle (89.45) e sono legate alle costanti  $E_1$  ed  $\eta_1$  dalle relazioni (89.49), di nuovo con gli indici 0 e 1 sostituiti dagli indici 1 e 2, rispettivamente.

A questo punto possiamo iterare ulteriormente la costruzione e definire una successione di trasformazioni canoniche  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; questo determina, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , una trasformazione canonica  $\bar{C}_n : (\varphi', J') \rightarrow (\varphi, J)$ , con  $\bar{C}_n = C_n \circ C_{n-1} \circ \dots \circ C_1$ , che porta il dominio  $D_n := D(\rho_n, \xi_n, J_n)$  all'interno del dominio  $D_0$  ed è tale che

- nelle nuove variabili l'hamiltoniana acquista la forma

$$\mathcal{H}_n(J') + V_n(\varphi', J'), \quad (89.52)$$

- il valore di  $J_n$  è fissato dalla condizione che, se si definisce  $\omega_n(J) := [\partial\mathcal{H}_n/\partial J](J)$ , si abbia  $\omega_n(J_n) = \omega_0(J_0)$ ,
- si definiscono i nuovi parametri  $\varepsilon_n := \|V_n\|_n$  ed  $E_n = \|H_n\|_n$ , con la norma  $\|\cdot\|_n$  data dalla (89.4) con  $k = n$ , mentre  $\eta_n$  è definito come in (89.45c), con l'indice 1 sostituito dall'indice  $n$ .

I parametri  $\varepsilon_n$ ,  $\xi_n$ ,  $\rho_n$ ,  $\eta_n$  ed  $E_n$  sono legati ai parametri iniziali dalle relazioni

$$C_0\varepsilon_n \leq (C_0\varepsilon_0)^{(3/2)^n}, \quad (89.53a)$$

$$E_n \leq E_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \leq E_0 + C_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (C_0\varepsilon_0)^{(3/2)^k}, \quad (89.53b)$$

$$\eta_n \leq \eta_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{4\eta_k n \varepsilon_k}{\rho_k}\right), \quad (89.53c)$$

$$\xi_n = \xi_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 4 \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_k}\right)^{-1}\right) \geq \xi_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k 4 \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right)^{-1}\right), \quad (89.53d)$$

$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_k}\right)^{-2(\tau+2)} \leq \rho_0 \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right)^{-2n(\tau+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^{n(n-1)(\tau+2)}. \quad (89.53e)$$



Si noti che nella (89.53c) la costante  $n$  che appare in ogni fattore denota il numero di gradi di libertà e non deve essere confuso con l'indice  $n$  del passo iterativo.

Si vede dalla (89.53a) che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

dove la convergenza è esponenziale; questo implica immediatamente (cfr. l'esercizio 18)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \leq 2E_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq \frac{\xi_0}{2}. \quad (89.54)$$

Al contrario la (89.53e) dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0.$$

D'altra parte, confrontando la (89.53a) con la (89.53e), si trova (cfr. l'esercizio 19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\rho_n^a} = 0 \quad (89.55)$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , che mostra che  $\varepsilon_n$  va a zero molto più velocemente di  $\rho_n$ . Ne segue in particolare che (cfr. l'esercizio 20)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n \leq 2\eta_0. \quad (89.56)$$

Ovviamente, come al primo passo abbiamo dovuto richiedere la (89.51) perché la trasformazione fosse ben definita, per ogni  $n$  dobbiamo imporre che  $\varepsilon_n$  sia sufficientemente piccolo da soddisfare

$$\bar{B} \frac{\varepsilon_n \eta_n}{\rho_n} < 1, \quad \bar{B} \frac{\varepsilon_n}{E_n} \left( \frac{\eta_n E_n}{\rho_n} \right)^2 < 1, \quad \bar{B} C_0 \varepsilon_n (C_0 E_n) \left( \frac{1}{\xi_n} \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_n} \right)^{4(\tau+1)} < 1, \quad (89.57)$$

dove  $\bar{B}$  è la stessa costante che appare in (89.51).

**Osservazione 89.9** La (89.55) implica che la (89.57) è verificata definitivamente. Pertanto è sufficiente imporre le condizioni (89.57) per un numero finito di  $n$ . In conclusione si deve imporre che, fissati  $C_0$ ,  $E_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\rho_0$  e  $\xi_0$ , il parametro  $\varepsilon_0$  soddisfi le stime (89.51), possibilmente con una costante  $\bar{B}$  più grande per tener conto dei primi passi.

L'hamiltoniana (89.52) è analitica nel dominio  $D_n$ , quindi nelle variabili angolari il dominio si è ristretto non più della metà per ogni  $n$  (dal momento che  $|\Im(\varphi'_i)| \leq \xi_n \leq \xi_0/2$ ), mentre le variabili d'azione sono definite in un intorno molto più piccolo (di raggio  $\rho_n$  anziché  $\rho_0$ ) intorno al valore  $J_n$  tale che  $\omega_n(J_n) = \omega_0(J_0)$  soddisfa la condizione diofantea (89.8).

Le equazioni di Hamilton corrispondenti alla (89.52) sono date da

$$\dot{\varphi}' = \omega_n(J') + O(\varepsilon_n), \quad \dot{J}' = O(\varepsilon_n \rho_n),$$

dove  $\omega_0(J_0) = \omega_n(J_n)$ . In particolare, la soluzione  $(\varphi'(t), J'(t))$  è tale che le variabili d'azione soddisfano

$$J'(t) = J'(0) + O(\varepsilon_n \rho_n t).$$

Se  $J'(0) = J_n$  si ha  $|J'(t) - J_n| < C\sqrt{\varepsilon_n} \rho_n$  per qualche costante positiva  $C$  – quindi le variabili d'azione rimangono ben all'interno del dominio d'analiticità in cui sono definite – per tempi  $|t| < T_n$ , con  $T_n = O(1/\sqrt{\varepsilon_n})$ . L'equazione che regola l'evoluzione delle variabili angolari, scritta esplicitamente, è

$$\dot{\varphi}' = \omega_n(J') + \frac{\partial V_n}{\partial J'}(J'),$$

dove (cr. l'esercizio 21).

$$|\omega_n(J') - \omega_n(J_n)| \leq \frac{2(E_{n-1} + \varepsilon_{n-1})}{\rho_{n-1}} \sqrt{\varepsilon_n} \rho_n, \quad (89.58a)$$

$$\left| \frac{\partial V_n}{\partial J'}(J') \right| \leq \varepsilon_n, \quad (89.58b)$$

fin tanto che  $|J' - J_n|$  rimane minore di  $\sqrt{\varepsilon_n} \rho_n$ . Integrando si trova

$$\varphi'(t) = \varphi'(0) + \omega_n(J_n) t + O(\sqrt{\varepsilon_n} \rho_n \rho_{n-1}^{-1}) t + O(\varepsilon_n) t,$$

così che, tenendo conto che  $\omega_n(J_n) = \omega_0(J_0)$ , si ha  $\varphi'(t) - \varphi'(0) - \omega_0(J_0) t = O(\rho_n \rho_{n-1}^{-1})$  per  $|t| < T_n$ . Per la (89.53e),  $\rho_n/\rho_{n-1} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Nel limite  $n \rightarrow \infty$ , questo fissa le variabili d'azione a un valore  $J_\infty$  tale che

$$\omega_\infty(J_\infty) = \omega_0(J_0), \quad \omega_\infty(J_\infty) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial J'}(J_n).$$

mentre le variabili angolari evolvono in accordo alla legge  $\varphi'(t) = \varphi'(0) + \omega_0(J_0) t$ . Il limite per  $n \rightarrow \infty$  della composizione di trasformazioni canoniche  $C_1, C_2, \dots, C_n$  definisce una funzione

$$\bar{C}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{C}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \circ C_{n-1} \circ \dots \circ C_2 \circ C_1,$$

tale che  $\bar{C}_\infty : (\varphi', J_\infty) \rightarrow (\varphi, J)$  ha la forma  $\varphi = \varphi' + \Delta_\infty(\varphi', J_\infty)$  e  $J = J_\infty + \Xi_\infty(\varphi', J_\infty)$ . Si noti che  $\bar{C}_\infty$  non definisce una trasformazione di coordinate, dal momento che  $J_\infty$  non varia in un aperto, ma è fissato a un valore ben preciso. Se definiamo  $\beta(\psi) := \Delta_\infty(\psi, J_\infty)$  e  $\alpha(\psi) := J_\infty - J_0 + \Xi_\infty(\psi, J_\infty)$ , il teorema 89.1 è dimostrato.

**Osservazione 89.10** Le condizioni (89.50) (cfr. anche l'osservazione 89.9) mostrano che, fissati tutti gli altri parametri,  $\varepsilon_0$  e  $C_0$  devono essere tali da soddisfare la relazione

$$A_0 C_0^2 \varepsilon_0 \left( \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^{4(\tau+1)} < 1,$$

dove  $A_0$  è una costante che dipende anche dai parametri  $E_0$  e  $\xi_0$ . Perché tale relazione sia soddisfatta occorre che si abbia  $A_1 C_0^2 \varepsilon_0 < 1$ , per qualche costante  $A_1$ , ovvero che  $C_0$  sia tale che  $1/C_0 > \sqrt{A_1 \varepsilon_0}$ . Ne segue che, fissato  $\varepsilon_0$  sufficientemente piccolo, il sistema perturbato ammette tori invarianti le cui frequenze  $\omega$  siano tali da soddisfare la condizione diofantea (84.20), con  $\gamma > \sqrt{A_1 \varepsilon_0}$ . Poiché la misura relativa delle frequenze che non soddisfano tale condizione è proporzionale a  $\gamma$ , concludiamo che la misura delle frequenze dei tori imperturbati che sono distrutti dalla perturbazione è di ordine  $\sqrt{\varepsilon_0}$ .

## §90 Stabilità dei moti quasiperiodici

### §91 Convergenza delle serie di Lindstedt

Il teorema KAM afferma che, in un sistema hamiltoniano quasi-integrabile, sotto opportune ipotesi di non degenerazione dell'hamiltoniana imperturbata, i tori con frequenze che soddisfino una condizione diofantea persistono, leggermente deformati, purché la perturbazione sia sufficientemente piccola. Questo implica l'esistenza di soluzioni della forma (87.2), analitiche in  $\psi = \varphi_0 + \omega_0 t$ . Ovviamente, dal fatto che esistano soluzioni quasiperiodiche non segue direttamente la convergenza delle serie di Lindstedt, dal momento che questo presuppone che le funzioni  $h$  e  $H$  dipendano analiticamente anche dal parametro perturbativo  $\varepsilon$ , oltre che dalla variabile  $\psi$ .

Vogliamo ora far vedere che uno studio più accurato della rappresentazione grafica delle serie di Lindstedt descritta nel §88 permette di dimostrarne la convergenza.

#### 91.1 Analisi multiscala

Per prima cosa modifichiamo gli alberi introdotti nel §88 associando un'ulteriore etichetta ai rami nel modo seguente. Sia  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una funzione  $C^\infty$  a supporto compatto tale che (cfr. la figura 20.3)

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ 1, & |x| \leq 1, \end{cases} \quad (91.1)$$

e la sua derivata verifica la condizione  $\chi'(x) \leq 0$  per  $x \geq 0$ ; si può costruire esplicitamente una funzione che abbia tali proprietà (cfr. l'esercizio 22).

Definiamo anche (cfr. la figura 20.4)

$$\chi_n(x) := \chi(2^{n-1}x) - \chi(2^n x), \quad n \geq 1, \quad \chi_0(x) = 1 - \chi(x), \quad (91.2)$$