

dove A_0 è una costante che dipende anche dai parametri E_0 e ξ_0 . Perché tale relazione sia soddisfatta occorre che si abbia $A_1 C_0^2 \varepsilon_0 < 1$, per qualche costante A_1 , ovvero che C_0 sia tale che $1/C_0 > \sqrt{A_1 \varepsilon_0}$. Ne segue che, fissato ε_0 sufficientemente piccolo, il sistema perturbato ammette tori invarianti le cui frequenze ω siano tali da soddisfare la condizione diofantea (84.20), con $\gamma > \sqrt{A_1 \varepsilon_0}$. Poiché la misura relativa delle frequenze che non soddisfano tale condizione è proporzionale a γ , concludiamo che la misura delle frequenze dei tori imperturbati che sono distrutti dalla perturbazione è di ordine $\sqrt{\varepsilon_0}$.

§90 Stabilità dei moti quasiperiodici

§91 Convergenza delle serie di Lindstedt

Il teorema KAM afferma che, in un sistema hamiltoniano quasi-integrabile, sotto opportune ipotesi di non degenerazione dell'hamiltoniana imperturbata, i tori con frequenze che soddisfino una condizione diofantea persistono, leggermente deformati, purché la perturbazione sia sufficientemente piccola. Questo implica l'esistenza di soluzioni della forma (87.2), analitiche in $\psi = \varphi_0 + \omega_0 t$. Ovviamente, dal fatto che esistano soluzioni quasiperiodiche non segue direttamente la convergenza delle serie di Lindstedt, dal momento che questo presuppone che le funzioni h e H dipendano analiticamente anche dal parametro perturbativo ε , oltre che dalla variabile ψ .

Vogliamo ora far vedere che uno studio più accurato della rappresentazione grafica delle serie di Lindstedt descritta nel §88 permette di dimostrarne la convergenza.

91.1 Analisi multiscala

Per prima cosa modifichiamo gli alberi introdotti nel §88 associando un'ulteriore etichetta ai rami nel modo seguente. Sia $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funzione C^∞ a supporto compatto tale che (cfr. la figura 20.3)

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ 1, & |x| \leq 1, \end{cases} \quad (91.1)$$

e la sua derivata verifica la condizione $\chi'(x) \leq 0$ per $x \geq 0$; si può costruire esplicitamente una funzione che abbia tali proprietà (cfr. l'esercizio 22).

Definiamo anche (cfr. la figura 20.4)

$$\chi_n(x) := \chi(2^{n-1}x) - \chi(2^n x), \quad n \geq 1, \quad \chi_0(x) = 1 - \chi(x), \quad (91.2)$$

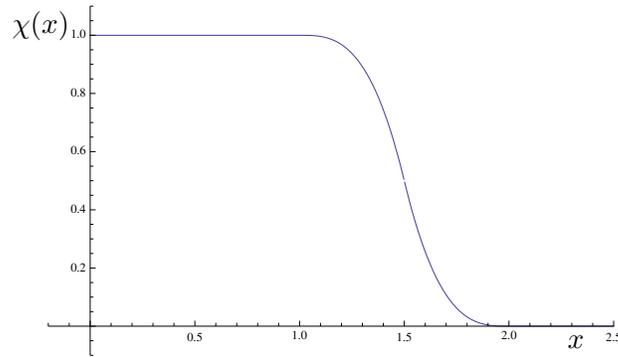


Figura 20.3: Una possibile funzione $\chi(x)$ per $x \geq 0$.

Si vede facilmente, a partire dalla definizione, che per ogni $x \neq 0$ le funzioni $\{\chi_n\}$ realizzano una *partizione dell'unità* (cfr. l'esercizio 23):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = 1. \quad (91.3)$$

Osservazione 91.1 Per ogni $x \neq 0$ si ha $\chi_n(x) \neq 0$ al più solo per due valori successivi dell'indice n (cfr. di nuovo l'esercizio 23).

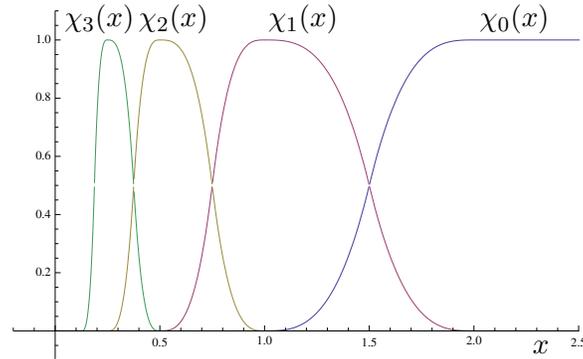


Figura 20.4: Le funzioni $\chi_n(x)$ per $x \geq 0$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

Assumiamo che il vettore ω_0 soddisfi la condizione diofantea (84.20), con $\tau > n - 1$, per qualche costante $\gamma > 0$ e definiamo $\bar{\omega}_0 := \omega_0/\gamma$, così che

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle| > \frac{1}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Dato un albero θ , sia g_ℓ il propagatore di un ramo $\ell \in L(\theta)$. Se $\nu_\ell \neq 0$, scriviamo

$$\frac{1}{\langle i\omega_0, \nu_\ell \rangle^{R_\ell}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle)}{\langle i\omega_0, \nu_\ell \rangle^{R_\ell}}.$$

Associamo allora a ogni ramo ℓ con $\nu_\ell \neq 0$ una nuova etichetta $n_\ell \in \mathbb{N}$, che chiamiamo *scala*, e cambiamo la definizione del propagatore ponendo

$$g_\ell = \gamma^{-R_\ell} \bar{g}_\ell, \quad \bar{g}_\ell = \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle) := \frac{\chi_{n_\ell}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle)}{\langle i\omega_0, \nu_\ell \rangle^{R_\ell}}. \quad (91.4)$$

Assegniamo una scala anche ai rami ℓ con $\nu_\ell = 0$ ponendo $n_\ell = -1$.

Continuiamo a indicare con $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$ l'insieme di tutti gli alberi etichettati non equivalenti di ordine k tali che $\nu_{\ell_0} = \nu$ e $\zeta_{\ell_0}^1 = \zeta$, se ℓ_0 è il ramo della radice, ma, da questo momento in poi, includiamo tra le etichette le scale dei rami. In virtù della proprietà (91.3), i coefficienti delle serie di Lindstedt sono ancora rappresentati dalle (88.10), con l'unica differenza che ora la somma sugli alberi comporta anche la somma sulle scale dei rami. Il fatto che, per ogni ramo ℓ , la scala n_ℓ assuma infiniti valori non costituisce un problema, dal momento che, per ogni fissato valore del momento ν_ℓ , solo per due valori di n_ℓ il propagatore g_ℓ non è nullo (cfr. l'osservazione 91.1).

Osservazione 91.2 Se un ramo ha momento $\nu_\ell \neq 0$ e scala $n_\ell = n$, allora $g_\ell \neq 0$ implica necessariamente

$$\begin{aligned} 2^{(n-2)R_\ell} \leq |\bar{g}_\ell| \leq 2^{nR_\ell}, & \quad n \geq 1, \\ |\bar{g}_\ell| \geq 1, & \quad n = 0, \end{aligned}$$

poiché $\chi_n(\langle i\bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle) \neq 0$ implica $2^{-n} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2^{-n+2}$ se $n \geq 1$ e $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq 1$ se $n = 0$.

Per definizione si ha $0 \leq \chi(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$K_1 := \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x \chi(x)|, \quad K_2 := \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^2 \chi(x)|, \quad K := \max\{1, K_1, K_2\}. \quad (91.5)$$

Si noti che, poiché la funzione χ ha supporto compatto, i massimi in (91.5) esistono. Si ha allora

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \bar{g}_\ell^{(n)}(x) \right| \leq K_0 |x|^{-R_\ell - p} \chi_n(x) \leq K_0 2^{n(R_\ell + p)}, \quad p = 1, 2, \quad (91.6)$$

per un'opportuna costante $K_0 \geq 1$ (cfr. l'esercizio 24).

Definizione 91.3 (AMMASSO) Dato un albero θ , si definisce ammasso su scala n un sottoinsieme connesso massimale T di θ costituito da nodi e rami che li connettono tali che le scale dei rami sono tutte minori o uguali a n e almeno una di esse è uguale a n .

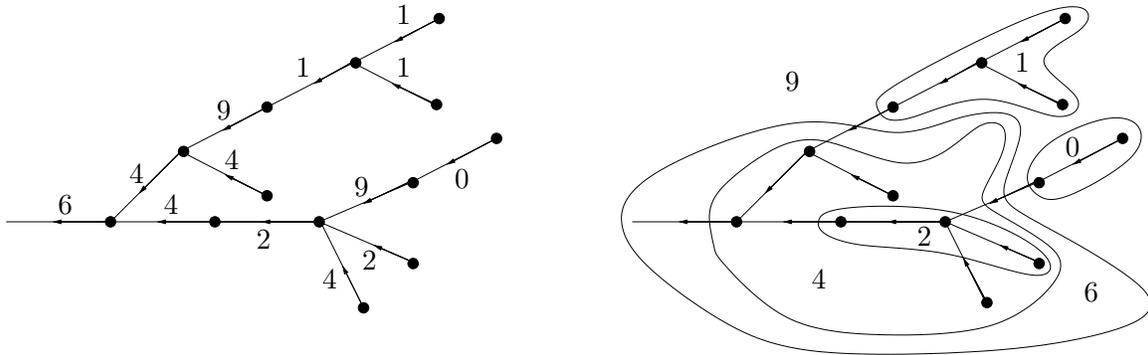


Figura 20.5: Esempio di albero con scale (a sinistra) e ammassi corrispondenti (a destra).

L'assegnazione delle scale ai rami di un albero individua un insieme di ammassi tra cui sussiste una relazione di inclusione che determina un ordinamento parziale (cfr. la figura 20.5 per un esempio).

Dato un ammasso T in un albero θ , indichiamo con $V(T)$ e $L(T)$ gli insiemi dei nodi e dei rami di θ , rispettivamente, contenuti in T . I rami $\ell \in L(T)$ saranno chiamati i *rami interni* di T , mentre chiameremo *rami esterni* di T i rami $\ell \in L(\theta)$ che connettono un nodo $v \in V(T)$ a un nodo $w \notin V(T)$. Diremo che un ramo esterno di T entra in T se il ramo è orientato verso il nodo che appartiene a $V(T)$ e che esce da T in caso contrario. Per costruzione un ammasso ha al più un ramo esterno uscente; più precisamente non ha rami esterni uscenti se contiene il ramo della radice e ne ha esattamente uno altrimenti. Per esempio, nella figura 20.5, l'ammasso su scala più grande (9 in questo caso) è l'intero albero e non ha quindi rami esterni; l'ammasso su scala 4 ha un ramo uscente e due rami entranti; l'ammasso su scala 6 ha due rami entranti e nessun ramo uscente; l'ammasso su scala 1 ha un ramo uscente e nessun ramo entrante; l'ammasso su scala 0 ha un ramo uscente e nessun ramo entrante; infine l'ammasso su scala 2 ha due rami entranti e un ramo uscente.

Osservazione 91.4 Per costruzione, i rami uscenti da un ammasso T su scala n hanno scale maggiori strettamente di n ; altrimenti T non sarebbe un insieme connesso massimale di nodi e rami che li connettono su scala $\leq n$. Infatti, se un ramo esterno ℓ di T avesse scala $n_\ell < n$, basterebbe aggiungere ℓ a $L(T)$ e l'estremo di ℓ non contenuto in T a $V(T)$ per costruire un insieme $T' \supset T$ più grande con le stesse proprietà.

Introduciamo qualche altra notazione. Per $n \geq 0$, indichiamo con $N_n(\theta)$ il numero di rami $\ell \in L(\theta)$ con scala n , con $N_n^p(\theta)$ il numero di rami $\ell \in L(\theta)$ con $n_\ell = n$ e $R_\ell = p$. Analogamente, dato un ammasso T , denotiamo con $N_n(T)$ il numero di rami $\ell \in L(T)$ con $n_\ell = n$ e con $N_n^p(T)$ il numero di rami $\ell \in L(T)$ con $n_\ell = n$ e $R_\ell = p$. Infine poniamo

$$M(\theta) := \sum_{v \in V(\theta)} |\nu_v|, \quad M(T) := \sum_{v \in V(T)} |\nu_v|,$$

Sia T un ammasso che abbia un ramo uscente ℓ_T^1 e un solo ramo entrante ℓ_T^2 . Se v_1 è il nodo da cui esce il ramo ℓ_T^1 e v_2 è in nodo in cui entra il ramo ℓ_T^2 , seguendo le notazioni introdotte a pag. 396, indichiamo con $\mathcal{P}_T := \mathcal{P}(v_1, v_2)$ il cammino che connette i due nodi v_1 e v_2 . Diremo in tal caso anche che \mathcal{P}_T connette i due rami esterni di T .

Definizione 91.5 (RISONANZA) *Si definisce risonanza (o ammasso risonante) un ammasso T tale che*

1. T ha un ramo uscente ℓ_T^1 e un solo ramo entrante ℓ_T^2 ,
2. il ramo uscente e il ramo entrante di T hanno lo stesso momento (i.e. $\nu_{\ell_T^1} = \nu_{\ell_T^2}$),
3. si ha $\nu_\ell \neq \nu_{\ell_T^2} \quad \forall \ell \in L(\mathcal{P}_T)$,
4. $M(T) \leq 2^{(n_T-3)/\tau}$, dove $n_T = \min\{n_{\ell_T^1}, n_{\ell_T^2}\}$ e τ è l'esponente diofanteo di ω_0 .

Data una risonanza T , indichiamo con $d(T)$ e $k(T)$ il numero dei nodi contenuti in T e la somma degli ordini dei nodi in T , rispettivamente. In formule

$$d(T) = |V(T)|, \quad k(T) = \sum_{v \in V(T)} k_v.$$

Chiamiamo $d(T)$ e $k(T)$ il *grado* e l'*ordine* della risonanza, rispettivamente. Chiamiamo inoltre ℓ_T^1 il *ramo risonante* di T e n_T la *scala risonante* di T . Si noti che $n_T \geq n_\ell + 1 \quad \forall \ell \in L(T)$, per la definizione 91.3 di ammasso. Per qualche esempio di risonanza di grado 2 si veda la figura 20.6, dove la scala del ramo $\ell \in L(T)$ è più piccola della scala dei rami esterni.

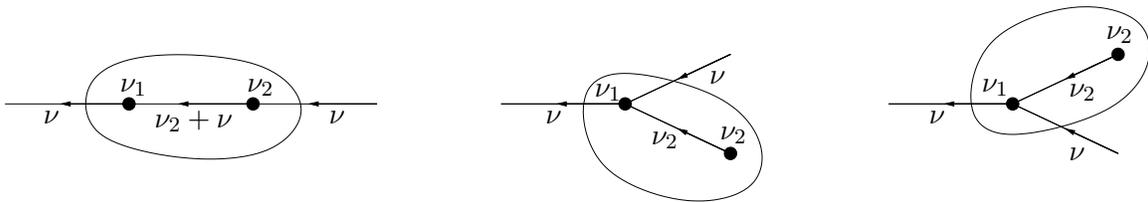


Figura 20.6: Esempi di risonanze di grado 2. I due nodi hanno modi ν_1 e ν_2 tali che $\nu_1 + \nu_2 = 0$.

Osservazione 91.6 Il motivo per cui introduciamo la nozione di risonanza è che è proprio la presenza delle risonanze a provocare l'accumularsi di piccoli divisori. Si pensi infatti all'esempio discusso nell'osservazione 88.36. Indichiamo con n_0 e n le scale dei rami con momento ν_0 e ν , rispettivamente. In linea di principio ogni ramo può avere due possibili scale, ma stiamo supponendo per semplicità che la scala sia la stessa per tutti i rami che abbiano lo stesso momento. Poiché $|\langle \omega_0, \nu_0 \rangle| \gg |\langle \omega_0, \nu \rangle|$, si ha $n_0 \ll n$. Quindi l'albero θ della figura 19.18, una volta che abbiamo assegnato le scale ai rami, ha p risonanze che hanno scala n_0 (come ammassi) e scala risonante n (cfr. la figura 20.7).

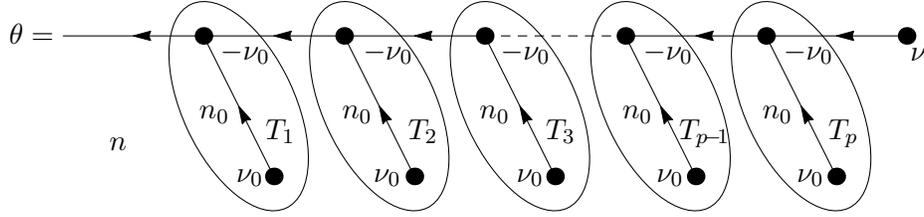


Figura 20.7: Risonanze nell'albero θ considerato nell'osservazione 88.36.

Osservazione 91.7 La condizione 3 nella definizione 91.5 evita di contare troppe volte un ramo risonante. Si consideri di nuovo l'esempio dell'osservazione 88.36 e si immagini che i rami esterni delle p risonanze su scala n_0 abbiano alternativamente scale n e $n + 1$, entrambe compatibili con il momento ν (i.e. tali che $\chi_n(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) \neq 0$ e $\chi_{n+1}(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) \neq 0$). Per esempio il ramo uscente da T_1 ha scala $n + 1$, il ramo uscente da T_2 ha scala n , il ramo uscente da T_3 ha scala $n + 1$, e così via. Senza la condizione 3 anche l'insieme costituito da T_1, T_2 e dal ramo $\ell_{T_1}^2 = \ell_{T_2}^1$ (i.e. dal ramo che esce da T_2 ed entra in T_1) costituirebbe una risonanza T' su scala n e con rami esterni $\ell_{T_1}^1$ e $\ell_{T_2}^2$. Ne seguirebbe in particolare che il ramo $\ell_{T_1}^1$ sarebbe il ramo uscente di due risonanze: T_1 e T' (analoghe considerazioni varrebbero per le risonanze successive). D'altra parte, come vedremo più avanti, per stimare il prodotto dei propagatori sarà necessario mostrare che per ogni ramo risonante si ottiene un opportuno fattore di guadagno (cfr. il §91.3). In particolare basterà ottenere un fattore di guadagno per le risonanze T_1 e T_2 , ma non per T' . In altre parole vorremo non considerare T' una risonanza. Questo giustifica la condizione 3.

Osservazione 91.8 Dalla definizione 91.5 segue che, se T è una risonanza, si ha

$$\sum_{v \in V(T)} \nu_v = 0,$$

dal momento che $\nu_{\ell_T^1}$ è dato dalla somma di $\nu_{\ell_T^2}$ e dei modi di tutti i nodi $v \in V(T)$.

Sia \mathcal{P}_T il cammino che connette i due rami esterni di una risonanza T . Per ogni ramo $\ell \in L(T)$, se v è in nodo da cui ℓ esce (i.e. $\ell = \ell_v$), definiamo

$$\nu_\ell^0 := \sum_{\substack{w \in V(T) \\ w \preceq v}} \nu_w, \tag{91.7}$$

così che, indicando con ν il momento del ramo entrante di T (i.e. $\nu = \nu_{\ell_T^2}$), si ha $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu$ se $\ell \in L(\mathcal{P}_T)$ e $\nu_\ell = \nu_\ell^0$ altrimenti. Più in generale, dato un ammasso T – non necessariamente risonante – che abbia un ramo uscente e un solo ramo entrante, se un ramo $\ell \in L(T)$ si trova

lungo il cammino che connette il ramo uscente e il ramo entrante, possiamo scrivere $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu$, dove ν_ℓ^0 è definito dalla (91.7) essendo v il nodo da cui esce il ramo ℓ , e ν è il momento del ramo entrante di T .

Lemma 91.9 *Sia T una risonanza e sia \mathcal{P}_T il cammino che connette i rami esterni di T . Si ha $\nu_\ell \neq 0 \forall \ell \in L(\mathcal{P}_T)$.*

Dimostrazione. Se ν è il momento del ramo entrante di T , in accordo con la (91.7), possiamo scrivere $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu \forall \ell \in L(\mathcal{P}_T)$. Indichiamo con n la scala del ramo entrante. Si ha $n_\ell \leq n-1$ per definizione di ammasso. Supponiamo per assurdo che esista un ramo $\ell \in L(\mathcal{P}_T)$ tale che $\nu_\ell = 0$. Si avrebbe allora $\nu_\ell^0 = -\nu$ e quindi, per la condizione diofantea (cfr. l'osservazione 91.2)

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| = |\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle| \leq 2^{-n} \implies |\nu_\ell^0| > 2^{n/\tau},$$

così che $M(T) \geq |\nu_\ell^0| > 2^{n/\tau}$. Quindi T non soddisferebbe la condizione 4 della definizione 91.5 e quindi non potrebbe essere una risonanza. ■

Vogliamo ora mostrare che, se non ci fossero risonanze, allora saremmo in grado di stimare il prodotto dei propagatori in maniera tale da ottenere sommabilità sull'ordine k . Il passo successivo sarà trovare un modo per controllare i propagatori dei rami risonanti. Indichiamo con $N_n^*(\theta)$ il numero di rami non risonanti $\ell \in L(\theta)$ con scala n .

Lemma 91.10 (LEMMA DI SIEGEL-BRJUNO) *In qualsiasi albero θ si ha*

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau},$$

dove τ è l'esponente diofanteo di ω_0 .

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$N_n^*(\theta) = 0, \quad \text{se } M(\theta) < 2^{(n-3)/\tau}, \quad (91.8a)$$

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1, \quad \text{se } M(\theta) \geq 2^{(n-3)/\tau}, \quad (91.8b)$$

Innanzitutto si noti che si può avere $N_n(\theta) \neq 0$ solo se $M(\theta) \geq 2^{(n-3)/\tau}$. Infatti, in caso contrario, si avrebbe $|\nu_\ell| \leq M(T) < 2^{(n-3)/\tau}$ per ogni $\ell \in L(\theta)$ e quindi

$$2^{-n_\ell+2} \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| > \frac{1}{|\nu_\ell|^\tau} > 2^{-(n-3)} \implies n_\ell < n, \quad (91.9)$$

ovvero non potrebbero esserci rami su scala n in θ . Questo dimostra la (91.8a). Per dimostrare la (91.8b) procediamo per induzione sull'ordine k dell'albero θ .

- Se $k = 1$ l'albero θ ha un solo nodo v_0 e un solo ramo ℓ_0 , quindi $N_n^*(\theta) = N_n(\theta)$. Inoltre si ha $M(\theta) = |\nu_{\ell_0}| = |\nu_{v_0}|$ e $N_n(\theta)$ vale o 0 o 1. Si può avere $N_n(\theta) = 1$ solo se $M(\theta) \geq 2^{(n-3)/\tau}$. In tal caso risulta $2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1 \geq 1 = N_n^*(\theta)$.

- Assumendo la stima (91.8b) per $k < k_0$ consideriamo un albero θ di ordine k_0 . Sia ν_0 l'ultimo nodo di θ e sia ℓ_0 il ramo della radice. Siano ℓ_1, \dots, ℓ_m i rami più vicini a ℓ_0 che siano su scala $\geq n$ (i.e. tali che tutti i rami lungo i cammini che connettono tali rami a ℓ_0 siano su scala $< n$). Se non esistono rami con tale proprietà scriveremo $m = 0$. Infine, se $m > 0$, siano $\theta_1, \dots, \theta_m$ i sottoalberi che hanno ℓ_1, \dots, ℓ_m , rispettivamente, come rami della radice.
- Se $n_{\ell_0} \neq n$, si ha $N_n(\theta) = 0$ se $m = 0$, mentre, se $m \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} N_n^*(\theta) &= \sum_{i=1}^m N_n^*(\theta_i) \leq \sum_{i=1}^m \left(2M(\theta_i) 2^{-(n-3)/\tau} - 1 \right) \\ &\leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - m \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1, \end{aligned}$$

dove si sono usate l'ipotesi induttiva e il fatto che $M(\theta) \leq M(\theta_1) + \dots + M(\theta_m)$.

- Se $n_{\ell_0} = n$ e ℓ_0 è risonante, si ragiona allo stesso modo, poiché anche in questo caso ℓ_0 non contribuisce a $N_n^*(\theta)$, così che di nuovo si trova $N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1$.
- Se $n_{\ell_0} = n$ e ℓ_0 non è risonante, se $m = 0$ si ha $N_n^*(\theta) = 1 \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1$ poiché $M(\theta) \geq 2^{(n-3)/\tau}$ per la (91.8a). Se invece $m \geq 1$ si ha

$$N_n^*(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^m N_n^*(\theta_i) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - (m - 1),$$

così che se $m \geq 2$ la stima segue ancora dall'ipotesi induttiva. Se $m = 1$ si consideri il sottoinsieme T di θ costituito da tutti i nodi $w \in V(\theta)$ che non sono contenuti nel sottoalbero θ_1 e da tutti i rami che connettono tali nodi. Per costruzione T è un ammasso, poiché i suoi rami hanno tutti scale $\leq n$, mentre i rami esterni ℓ_0 e ℓ_1 hanno scale n e $n_{\ell_1} \geq n$, rispettivamente. Poiché T non può essere una risonanza per ipotesi, si hanno due possibilità:

1. se $\nu_{\ell_0} = \nu_{\ell_1}$ allora, poiché i rami $\ell \in L(T)$ hanno scale $n_\ell < n$, si deve avere $M(T) \geq 2^{(n-3)/\tau}$,
2. altrimenti $\nu_{\ell_0} \neq \nu_{\ell_1}$.

Nel primo caso, poiché $M(\theta_1) = M(\theta) - M(T)$, si ottiene

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta_1) 2^{-(n-3)/\tau} = 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 2M(T) 2^{-(n-3)/\tau} \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1,$$

che comporta la stima voluta. Nel secondo caso si ha, usando la condizione diofantea,

$$\frac{1}{|\nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_0}|^\tau} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_0} \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} \rangle| + |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_0} \rangle| \leq 2^{-n+2} + 2^{-n+2} = 2^{-n+3},$$

da cui segue che $|\nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_0}| \geq 2^{(n-3)/\tau}$. Poiché

$$|\nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_0}| \leq \sum_{v \in V(T)} |\nu_v| = M(T),$$

si ha $M(T) \geq 2^{(n-3)/\tau}$ e quindi

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta_1) 2^{-(n-3)/\tau} = 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 2M(T) 2^{-(n-3)/\tau} \leq 2M(\theta) 2^{-(n-3)/\tau} - 1$$

anche in questo caso.

Questo completa la dimostrazione del lemma. ■

Osservazione 91.11 L'esempio discusso nell'osservazione 91.6 chiarisce anche il significato delle condizioni 1, 2 e 4 che compaiono nella definizione di risonanza (per la condizione 3 cfr. l'osservazione 91.7). Infatti l'accumulo di piccoli divisori è dovuto al ripetersi di rami che hanno un propagatore grande (quelli con momento ν nell'esempio). Questo è dovuto alla presenza di ammassi che hanno un ramo uscente e un solo ramo entrante con lo stesso momento (condizioni 1 e 2). Tuttavia, come fa vedere la dimostrazione del lemma 91.10, un ammasso T di questo tipo è davvero fonte di problemi solo quando $M(T)$ è più piccolo di $2^{nT/\tau}$: questo giustifica la condizione aggiuntiva 4.

Il prodotto dei propagatori che compaiono nella definizione del valore di un albero (cfr. la definizione 88.20) si può stimare in termini delle scale (cfr. la (91.4) per la definizione di \bar{g}_ℓ)

$$\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell = \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} \gamma^{-R_\ell} \right) \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} \bar{g}_\ell \right) \implies \prod_{\ell \in L(\theta)} |\bar{g}_\ell| \leq \prod_{n=0}^{\infty} 2^{nN_n^1(\theta) + 2nN_n^2(\theta)}, \quad (91.10)$$

dove abbiamo tenuto conto dell'osservazione 91.2 e del fatto che $R_\ell \leq 2 \forall \ell \in L(\theta)$. Se indichiamo con $L_R(\theta)$ l'insieme dei rami risonanti di θ e con $L_N(\theta) := L(\theta) \setminus L_R(\theta)$ l'insieme dei rami non risonanti di θ , possiamo riscrivere in (91.10)

$$\prod_{\ell \in L(\theta)} \bar{g}_\ell = \left(\prod_{\ell \in L_N(\theta)} \bar{g}_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in L_R(\theta)} \bar{g}_\ell \right), \quad \prod_{\ell \in L_N(\theta)} |\bar{g}_\ell| \leq \prod_{n=0}^{\infty} 2^{2nN_n^*(\theta)}, \quad (91.11)$$

dove l'ultimo prodotto può essere facilmente stimato utilizzando il lemma 91.10.

Lemma 91.12 *Esiste una costante B_0 tale che per ogni albero θ di ordine k si ha*

$$\prod_{\ell \in L_N(\theta)} |\bar{g}_\ell| \leq B_0^k e^{\xi M(\theta)/4}.$$

Dimostrazione. Tenendo conto della (91.11) possiamo scrivere, per $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario,

$$\prod_{\ell \in L_N(\theta)} |\bar{g}_\ell| \leq \prod_{n=0}^{\infty} 2^{2nN_n^*(\theta)} = \left(\prod_{n=0}^{n_0} 2^{2nN_n^*(\theta)} \right) \left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nN_n^*(\theta)} \right),$$

dove

$$\prod_{n=0}^{n_0} 2^{2nN_n^*(\theta)} \leq 2^{4n_0k},$$

avendo stimato ogni singolo propagatore su scala $n \leq n_0$ con 2^{2n_0} e tenuto conto che il numero di propagatori su scala $n \leq n_0$ è non maggiore del numero totale di propagatori, che è a sua volta uguale al numero di rami dell'albero – e quindi minore di $2k$ per il lemma 88.13.

Il prodotto sulle scale $n \geq n_0 + 1$ può essere stimato usando il lemma 91.10:

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nN_n^*(\theta)} = \exp \left(2 \log 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} nN_n^*(\theta) \right) = \exp \left(4M(\theta) \log 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n 2^{-(n-3)/\tau} \right),$$

Si può scegliere allora $n_0 = n_0(\xi)$ tale che si abbia

$$4 \log 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n 2^{-(n-3)/\tau} \leq \frac{\xi}{4} \implies \prod_{n=0}^{\infty} 2^{2nN_n^*(\theta)} \leq 2^{4n_0k} e^{\xi M(\theta)/4}$$

da cui segue l'asserto, con $B_0 = 2^{4n_0}$. ■

Nella dimostrazione del lemma 91.10 abbiamo usato il fatto che se un ramo ℓ è su scala $n \geq 0$ allora $2^{-n} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2^{2-n}$, come notato nell'osservazione 91.2. In realtà, come vedremo, per poter controllare i propagatori dei rami risonanti, avremo bisogno di considerare anche alberi in cui i momenti siano leggermente diversi da quelli determinati dalla legge di conservazione (88.2). Più precisamente considereremo anche alberi in cui, se n è la scala di un suo ramo ℓ , allora $g_\ell \neq 0$ richiede solo

$$2^{-n-1} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2^{3-n}. \quad (91.12)$$

Questo motiva la seguente definizione.

Definizione 91.13 (PROPRIETÀ DI SUPPORTO DEL PROPAGATORE) *Diremo che il propagatore di un ramo ℓ con scala $n \geq 0$ verifica la proprietà di supporto se il momento ν_ℓ soddisfa la (91.12).*

Non è difficile allora dimostrare che vale la seguente estensione del lemma 91.10.

Lemma 91.14 *Si assuma che i propagatori dell'albero θ verifichino la proprietà di supporto. Si ha allora*

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau},$$

dove τ è l'esponente diofanteo di ω_0 .

Dimostrazione. Seguendo la stessa strategia seguita per il lemma 91.10, si dimostra

$$N_n^*(\theta) = 0, \quad \text{se } M(\theta) < 2^{(n-4)/\tau}, \quad (91.13a)$$

$$N_n^*(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau} - 1, \quad \text{se } M(\theta) \geq 2^{(n-4)/\tau}. \quad (91.13b)$$

La dimostrazione procede come per il lemma 91.10, con modifiche minime:

- la (91.9) va sostituita con

$$2^{-n_\ell+3} \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| > \frac{1}{|\nu_\ell|^\tau} > 2^{-(n-4)} \quad \implies \quad n_\ell < n,$$

che permette di concludere che $N_n^*(\theta) = 0$ se $M(\theta) < 2^{(n-4)/\tau}$;

- si usa il fatto che $2M(\theta)2^{-(n-4)/\tau} \geq 2$ se $M(\theta) \geq 2^{(n-4)/\tau}$;
- nel caso ℓ_0 non risonante su scala $n_{\ell_0} = n$ e $m = 1$ con $\nu_{\ell_1} = \nu_{\ell_0}$, la condizione diofantea dà $1/|\nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_0}|^\tau \leq 2^{-n+4}$, così che $M(T) \geq 2^{(n-4)/\tau}$.

Per il resto si ragiona esattamente come nel lemma precedente. ■

Dato un albero θ , indichiamo con $P_n(\theta)$ il numero di ammassi di scala n . Nel seguito ci sarà utile anche il seguente risultato.

Lemma 91.15 *Si assuma che i propagatori dell'albero θ verifichino la proprietà di supporto. Per ogni $n \geq 0$ si ha*

$$P_n(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau},$$

dove τ è l'esponente diofanteo di ω_0 .

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$P_n(\theta) = 0, \quad \text{se } M(\theta) < 2^{(n-4)/\tau}, \quad (91.14a)$$

$$P_n(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau} - 1, \quad \text{se } M(\theta) \geq 2^{(n-4)/\tau}, \quad (91.14b)$$

Ovviamente si può avere $P_n(\theta) \neq 0$ solo se $N_n^*(\theta) \neq 0$, quindi la (91.14a) segue direttamente dalla (91.13a). Per dimostrare la (91.14b) si procede per induzione sull'ordine k dell'albero θ .

- Se $k = 1$ basta notare che in tal caso l'albero ha una sola linea ℓ_0 , la quale può avere scala n solo se $M(\theta) = |\nu_{\ell_0}| \geq 2^{(n-4)/\tau}$, così che $2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau} \geq 2$.

- Assumendo la stima (91.14b) per $k < k_0$ consideriamo un albero θ di ordine k_0 e ragioniamo come fatto nella dimostrazione del lemma 91.10. Sia ℓ_0 il ramo della radice e siano (se esistono) ℓ_1, \dots, ℓ_m i rami su scala $\geq n$ più vicini a ℓ_0 e $\theta_1, \dots, \theta_m$ i sottoalberi che hanno ℓ_1, \dots, ℓ_m , rispettivamente, come rami della radice. Se tali rami non esistono si ha $P_n(\theta) = 0$ a meno che ℓ_0 non abbia scala $n_{\ell_0} = n$, ma in tal caso si ha $P_n(\theta) = 1$ e $M(\theta) \geq 2^{(n-4)/\tau}$, così che la stima (91.14b) è soddisfatta. Consideriamo quindi nel seguito il caso $m \geq 1$.
- Se ℓ_0 non esce da un ammasso su scala n , si ha, per l'ipotesi induttiva,

$$P_n(\theta) = \sum_{i=1}^m P_n(\theta_i) \leq \sum_{i=1}^m \left(2M(\theta_i) 2^{-(n-4)/\tau} - 1 \right) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau} - 1,$$

dove si è usato il fatto che $M(\theta) \leq M(\theta_1) + \dots + M(\theta_m)$ e si è tenuto conto che gli ammassi su scala n in θ devono necessariamente appartenere a qualcuno degli alberi $\theta_1, \dots, \theta_m$, perché altrimenti ci sarebbero rami su scala n più vicini a ℓ_0 dei rami ℓ_1, \dots, ℓ_m .

- Se ℓ_0 esce da un ammasso T su scala n , si ha

$$P_n(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^m P_n(\theta_i) \leq 1 + \sum_{i=1}^m \left(2M(\theta_i) 2^{-(n-4)/\tau} - 1 \right),$$

così che, se $m \geq 2$ oppure se $m = 1$ e $M(\theta) - M(\theta_1) \geq 2^{(4-n)/\tau}$ allora anche l'albero θ soddisfa la stima (91.14b), di nuovo come conseguenza dell'ipotesi induttiva. D'altra parte, se $m = 1$, non si può avere $M(\theta) - M(\theta_1) < 2^{(4-n)/\tau}$, come mostra il seguente argomento.

- Se $m = 1$, il ramo ℓ_1 è il ramo entrante ℓ_T^2 di T oppure si trova lungo il cammino che connette ℓ_T^2 a ℓ_0 (altrimenti anche ℓ_T^2 sarebbe uno dei rami più vicini a ℓ su scala $\geq n$). Mostriamo, ragionando per assurdo, che entrambi i casi non sono possibili.
- Se $\ell_1 = \ell_T^2$, allora T deve contenere un ramo ℓ su scala n . Se ℓ è lungo il cammino \mathcal{P} che connette ℓ_1 a ℓ_0 si ha $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu_{\ell_1}$ (cfr. la (91.7) per le notazioni). D'altra parte

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} \rangle| \leq 2^{3-n}, \quad |\nu_\ell^0| \leq M(T) < 2^{(n-4)/\tau} \implies |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| > 2^{4-n},$$

così che

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| - |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} \rangle| > 2^{4-n} - 2^{3-n} \geq 2^{n-3},$$

in contraddizione con l'ipotesi che ℓ abbia scala n . Se ℓ non è lungo il cammino \mathcal{P} , a maggior ragione si ha

$$|\nu_\ell| \leq M(T) < 2^{(n-4)/\tau} \implies |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| > 2^{4-n},$$

e quindi si trova di nuovo un assurdo.

- Se $\ell_1 \in L(\mathcal{P})$, allora ℓ_1 avrebbe scala $n_{\ell_1} \geq n$ (poiché apparterebbe a un ammasso di scala n), mentre ℓ_T^2 avrebbe scala $n_{\ell_T^2} \geq n_{\ell_1} + 1 \geq n + 1$ (poiché entrerebbe in tale ammasso). Si avrebbe quindi

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} \rangle| \leq 2^{3-n}, \quad |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle| \leq 2^{2-n} \implies |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_T^2} \rangle| < 2^{4-n}.$$

D'altra parte si avrebbe anche

$$|\nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_T^2}| \leq M(T) \leq 2^{(4-n)/\tau} \implies |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_1} - \nu_{\ell_T^2} \rangle| > 2^{4-n},$$

arrivando a una contraddizione anche in questo caso.

Questo completa la dimostrazione del lemma. ■

Dal lemma 91.15 discende immediatamente il seguente corollario.

Corollario 91.16 *Sia $R_n(\theta)$ il numero di risonanze su scala n contenute nell'albero θ . Si assuma che i propagatori dell'albero θ verifichino la proprietà di supporto. Per ogni $n \geq 0$ si ha*

$$R_n(\theta) \leq 2M(\theta) 2^{-(n-4)/\tau},$$

dove τ è l'esponente diofanteo di ω_0 .

Dimostrazione. Basta notare che $R_n(\theta) \leq P_n(\theta)$ per ogni $n \geq 0$. ■

91.2 Cancellazioni

L'analisi del paragrafo precedente mostra che, se non ci fossero risonanze, si potrebbe stimare senza problemi il prodotto dei propagatori; infatti, come vedremo esplicitamente più avanti, se la stima fornita dal lemma 91.10 valesse per tutti gli alberi, allora il valore di ogni albero di ordine k ammetterebbe una stima proporzionale a C^k , per qualche costante $C > 0$, il che assicurerebbe la sommabilità delle serie perturbative per ε sufficientemente piccolo. Tuttavia, come visto nel §88.5, a causa della presenza di risonanze, esistono alberi di ordine k i cui valori crescono come $k!^a$, per qualche costante $a > 0$: tali stime non sono sufficienti a garantire la sommabilità delle serie perturbative. Vogliamo far vedere che, per quanto i valori dei singoli alberi possano essere stimati con fattoriali, tuttavia, quando sommiamo insieme tutti i valori che contribuiscono allo stesso coefficiente, si hanno cancellazioni notevoli tra i vari addendi, e la loro somma cresce al più come una potenza. Nel presente paragrafo descriveremo il meccanismo delle cancellazioni, nel §91.3 mostreremo come utilizzare le cancellazioni per riscrivere le somme dei valori degli alberi in modo più conveniente come somma di valori "rinormalizzati", infine nel §91.4 discuteremo come ottenere stime sommabili a partire dai valori rinormalizzati.

Definizione 91.17 (VALORE DI UNA RISONANZA) *Dato un albero etichettato θ e una risonanza T contenuta in θ , la matrice*

$$\mathcal{V}_T := \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell \right)$$

è il valore della risonanza T .

Osservazione 91.18 Il valore di una risonanza T dipende dai fattori dei nodi $v \in V(T)$ e dai propagatori dei rami $\ell \in L(T)$. La dipendenza dal resto dell'albero, i.e. dai nodi e rami di θ che non sono contenuti in T , si manifesta solo attraverso il momento $\nu = \nu_{\ell_T^2}$ del ramo entrante ℓ_T^2 . La dipendenza del valore della risonanza da ν avviene esclusivamente attraverso i propagatori dei rami che si trovano lungo il cammino \mathcal{P} che connette i rami esterni della risonanza. Infatti, se definiamo ν_ℓ^0 come in 91.7, per ogni ramo $\ell \in L(T) \setminus L(\mathcal{P})$ si ha $\nu_\ell = \nu_\ell^0$, mentre ogni ramo $\ell \in L(\mathcal{P})$ ha momento $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu$, così che, se $n_\ell \geq 0$ è la sua scala, il propagatore corrispondente g_ℓ è tale che (cfr. la (91.4))

$$\bar{g}_\ell = \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle + \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \frac{\chi_{n_\ell}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle + \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)}{(\langle i\bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle + \langle i\bar{\omega}_0, \nu \rangle)^{R_\ell}},$$

e quindi dipende da ν attraverso la quantità $\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle$. Per questo motivo scriveremo il valore della risonanza come $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$, quando vorremo sottolinearne la dipendenza da ν .

Osservazione 91.19 Data una risonanza T si consideri l'albero θ_T tale che $L(\theta_T) = L(T) \cup \ell_T^1$ e $V(\theta_T) = V(T)$. Quindi ℓ_T^1 è il ramo della radice di θ_T . In T il ramo esterno ℓ_T^2 entra in un nodo v_2 , quindi in θ_T il nodo v_2 ha gli stessi rami entranti che ha in T , tranne il ramo ℓ_T^2 . In particolare, se in θ_T il fattore associato al nodo v_2 è

$$F_{v_2} = D_{v_2} (i\nu_{v_2})^{p_{v_2}} \partial_J^{q_{v_2}} \left(V_{\nu_{v_2}}(J_0) \delta_{v_2,1} + \mathcal{H}_0(J_0) \delta_{v_2,0} \right),$$

allora il fattore associato allo stesso nodo v_2 in T sarà

$$F'_{v_2} = D_{v_2} (i\nu_{v_2})^{p_{v_2}+1} \partial_J^{q_{v_2}} \left(V_{\nu_{v_2}}(J_0) \delta_{v_2,1} + \mathcal{H}_0(J_0) \delta_{v_2,0} \right),$$

se $\zeta_{\ell_T^2}^1 = h$, e

$$F''_{v_2} = D_{v_2} (i\nu_{v_2})^{p_{v_2}} \partial_J^{q_{v_2}+1} \left(V_{\nu_{v_2}}(J_0) \delta_{v_2,1} + \mathcal{H}_0(J_0) \delta_{v_2,0} \right),$$

se $\zeta_{\ell_T^2}^1 = H$. Ovviamente anche il fattore combinatorio sarà diverso: se tale fattore è $1/m_{v_2}!$ in θ , si avrà $1/(m_{v_2}+1)!$ in T , a causa della presenza di un ramo entrante in più. Inoltre, in T , per ogni ramo ℓ lungo il cammino che connette i rami esterni, si ha $\nu_\ell = \nu_\ell^0 + \nu_{\ell_T^2}$ (cfr. l'osservazione

91.18), mentre in θ_T lo stesso ramo ha momento ν_ℓ^0 . Ne segue che se confrontiamo il valore dell'albero θ_T e il valore della risonanza T si ha, per $\nu = 0$,

$$\mathcal{V}_T(0) = \frac{m_{v_2}!}{(m_{v_2} + 1)!} i\nu_{v_2} \text{Val}(\theta_T) \quad (91.15)$$

se T è di tipo $\zeta\zeta'$ con $\zeta' = h$, e

$$\mathcal{V}_T(0) = \frac{m_{v_2}!}{(m_{v_2} + 1)!} \partial_{J_{v_2}} \text{Val}(\theta_T) \quad (91.16)$$

se T è di tipo $\zeta\zeta'$ con $\zeta' = H$. Al solito $\partial_{J_{v_2}}$ va interpretato come spiegato dopo la definizione 88.15. Se consideriamo invece $\mathcal{V}_T(\langle \omega_0, \nu \rangle)$, dove ν è il momento del ramo entrante di T , c'è l'ulteriore differenza che i propagatori dei rami ℓ lungo il cammino $\mathcal{P}(v_0, v_1)$ hanno momento $\nu_\ell^0 + \nu$ invece di ν_ℓ^0 .

Definizione 91.20 (ALBERO ASSOCIATO A UNA RISONANZA) *Data una risonanza T , chiameremo albero associato alla risonanza T l'albero θ_T introdotto nell'osservazione 91.19.*

Osservazione 91.21 Se θ_T è l'albero associato alla risonanza T , per costruzione si ha $\theta_T \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$, con $k = k(T)$, $\nu = 0$ e $\zeta = \zeta_{\ell_T}^2$.

Definizione 91.22 (TIPO DI UNA RISONANZA) *Data una risonanza T , siano v_1 il nodo da cui esce il ramo uscente ℓ_T^1 di T e v_2 il nodo in cui entra il ramo entrante ℓ_T^2 di T ; sia v_2' il nodo unico tale che $v_2 = \pi(v_2')$. La risonanza è di tipo*

1. hh se $\zeta_{v_1}^2 = h$ e $\zeta_{v_2'}^1 = h$;
2. hH se $\zeta_{v_1}^2 = h$ e $\zeta_{v_2'}^1 = H$;
3. Hh se $\zeta_{v_1}^2 = H$ e $\zeta_{v_2'}^1 = h$;
4. HH se $\zeta_{v_1}^2 = H$ e $\zeta_{v_2'}^1 = H$.

Data una risonanza T , sia v_1 il nodo da cui esce il ramo uscente ℓ_T^1 (cfr. la definizione 91.22 per le notazioni). Poniamo

$$W(T) := \{v \in V(T) : \nu_\ell \neq 0 \quad \forall \ell \in L(\mathcal{P}(v_1, v))\}. \quad (91.17)$$

Si noti che per il lemma 91.9 tutti i nodi $w \in \mathcal{P}(v_1, v_2)$ appartengono all'insieme $W(T)$. Per la definizione seguente, si ricordi la definizione dell'operatore \mathcal{G}_v data a pag. 415.

Definizione 91.23 (FAMIGLIA DI UNA RISONANZA) *Sia T una risonanza e siano v_1 e v_2 come nella definizione 91.22. Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}^R(T)$ costituito dalle risonanze T' ottenute da T attraverso le seguenti operazioni:*

1. se T è di tipo hh o hH , stacciamo il ramo uscente ℓ_T^1 dal nodo v_1 e lo riattacciamo a un qualsiasi altro nodo $v \in W(T)$ tale che $\delta_v = 1$;
2. se T è di tipo hh o Hh , stacciamo il ramo entrante ℓ_T^2 dal nodo v_2 e lo riattacciamo a un qualsiasi altro nodo $v \in W(T)$ tale che $\delta_v = 1$;
3. applichiamo \mathcal{G}_v a ogni nodo $v \in W(T)$.

Chiamiamo $\mathcal{F}^R(T)$ la famiglia della risonanza T . Indichiamo inoltre con $\mathcal{F}_1^R(T)$ l'insieme delle risonanze ottenute da T attraverso le sole operazioni 1 e 3 e, analogamente, con $\mathcal{F}_2^R(T)$ l'insieme delle risonanze ottenute da T attraverso le sole operazioni 2 e 3.

Se $g_\ell = \gamma^{-R_\ell} \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \omega_0, \nu_\ell \rangle)$ denota il propagatore del ramo ℓ , introduciamo la notazione

$$\partial^p g_\ell = \gamma^{-R_\ell} \partial^p \bar{g}_\ell = \gamma^{-R_\ell} \partial^p \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle) := \gamma^{-R_\ell} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(x) \Big|_{x=\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (91.18)$$

per indicare le sue derivate rispetto all'argomento. Analogamente, data una risonanza T , indichiamo con $\partial \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$ la derivata di $\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$ rispetto al suo argomento; si ha

$$\partial \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \sum_{\ell \in L(\mathcal{P}_T)} \partial g_\ell \left(\prod_{\substack{\ell' \in L(T) \\ \ell' \neq \ell}} g_{\ell'} \right) \left(\prod_{v \in V(T)} F_v \right),$$

dove abbiamo tenuto conto che \mathcal{V}_T dipende da $\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle$ solo attraverso i propagatori dei rami che si trovano lungo il cammino \mathcal{P}_T .

Definizione 91.24 (OPERATORE DI LOCALIZZAZIONE) *Data una risonanza T sia \mathcal{V}_T il suo valore. Si definisce operatore di localizzazione l'operatore \mathcal{L} la cui azione su \mathcal{V}_T è data da*

$$\mathcal{L}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \begin{cases} \mathcal{V}_T(0) + \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle \partial \mathcal{V}_T(0), & T \text{ è di tipo } hh, \\ \mathcal{V}_T(0), & T \text{ è di tipo } hH, \\ \mathcal{V}_T(0), & T \text{ è di tipo } Hh, \\ 0, & T \text{ è di tipo } HH. \end{cases}$$

Il valore $\mathcal{L}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$ prende il nome di valore localizzato della risonanza T .

Definizione 91.25 (OPERATORE DI REGOLARIZZAZIONE) *Data una risonanza T sia \mathcal{V}_T il suo valore. Si definisce operatore di regolarizzazione l'operatore \mathcal{R} la cui azione su \mathcal{V}_T è data*

da $\mathcal{R} = \mathbb{1} - \mathcal{L}$ (dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità), i.e.

$$\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \begin{cases} \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle^2 \int_0^1 dt_T \partial^2 \mathcal{V}_T(t_T \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle), & T \text{ è di tipo } hh, \\ \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle \int_0^1 dt_T \partial \mathcal{V}_T(t_T \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle), & T \text{ è di tipo } hH, \\ \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle \int_0^1 dt_T \partial \mathcal{V}_T(t_T \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle), & T \text{ è di tipo } Hh, \\ \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle), & T \text{ è di tipo } HH. \end{cases}$$

Il valore $\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$ prende il nome di valore regolarizzato della risonanza T , mentre il parametro $t_T \in [0, 1]$ è chiamato parametro di interpolazione della risonanza T .

Osservazione 91.26 Nello scrivere il valore regolarizzato di una risonanza abbiamo tenuto conto della forma integrale del resto di Taylor (cfr. l'esercizio 12).

Osservazione 91.27 Nelle formule che definiscono $\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle)$, abbiamo

$$\partial \mathcal{V}_T(t_T \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \sum_{\ell_1 \in L(\mathcal{P}_T)} \int_0^1 dt_T \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell^* \right), \quad (91.19)$$

dove abbiamo definito

$$g_\ell^* = \gamma^{-R_\ell} \bar{g}_\ell := \begin{cases} \partial g_\ell, & \ell = \ell_1, \\ g_\ell, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (91.20)$$

e, analogamente,

$$\partial^2 \mathcal{V}_T(t_T \langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = \sum_{\ell_1, \ell_2 \in L(\mathcal{P}_T)} \int_0^1 dt_T (1 - t_T) \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell^* \right), \quad (91.21)$$

dove (cfr. la (91.18))

$$g_\ell^* = \gamma^{-R_\ell} \bar{g}_\ell := \begin{cases} \partial^2 g_\ell, & \ell = \ell_1 = \ell_2, \\ \partial g_\ell, & \ell = \ell_1 \text{ oppure } \ell = \ell_2, \text{ con } \ell_1 \neq \ell_2, \\ g_\ell, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (91.22)$$

In (91.19) e (91.21), ogni propagatore g_ℓ^* , dato dalla (91.20) e (91.22), rispettivamente, ha argomento $\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(t_T) \rangle$, dove

$$\nu_\ell(t_T) := \begin{cases} \nu_\ell^0 + t_T \nu_{\ell_T}^2, & \ell \in L(\mathcal{P}_T), \\ \nu_\ell^0, & \ell \notin L(\mathcal{P}_T), \end{cases} \quad (91.23)$$

indipendentemente dal fatto che sia derivato o no. Chiamiamo t_T *parametro di interpolazione per il momento* e $\nu_\ell(t_T)$ *momento interpolato*.

Lemma 91.28 *Sia T una risonanza. Si ha*

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}^R(T)} \mathcal{V}_{T'}(0) = 0.$$

Dimostrazione. Se T è di tipo hh o di tipo hH (così che $\zeta_{\ell_T}^2 = h$) si può ragionare come nella dimostrazione della (88.18). Infatti, se θ_T è l'albero associato alla risonanza T (cfr. l'osservazione 91.19 e la definizione 91.20), $\mathcal{V}_T(0)$ e il valore di θ_T sono legati dalle relazioni (91.15) o (91.16), a seconda del valore di $\zeta_{\ell_T}^1$. Quindi, ragionando come nella dimostrazione del lemma 88.28, si vede che, sommando sulle risonanze $T' \in \mathcal{F}^R(T)$ i valori $\mathcal{V}_{T'}(0)$, si ottiene 0. Infatti, la somma sulle risonanze $T' \in \mathcal{F}^R(T)$ può essere scritta nel modo seguente: si somma sui nodi v_2 a cui viene attaccato il ramo entrante e, fissato il nodo v_2 , si somma sulle risonanze che si ottengono attraverso le operazioni 1 e 3 della definizione 91.23. A v_2 fissato, si trova

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}_1^R(T)} \mathcal{V}_{T'}(0) = \frac{m_{v_2}!}{(m_{v_2} + 1)!} C_{v_2} \sum_{\theta' \in \mathcal{F}(\theta_T)} \text{Val}(\theta') = 0, \quad C_{v_2} = \begin{cases} i\nu_{v_2}, & \zeta_{\ell_T}^1 = h, \\ \partial_{J_{v_2}}, & \zeta_{\ell_T}^1 = H, \end{cases}$$

esattamente per lo stesso argomento che porta alla (88.18).

Se invece T è una risonanza di tipo Hh , il suo valore $\mathcal{V}_T(0)$ è dato dalla (91.15). Spostando il ramo entrante della risonanza e applicando le operazioni \mathcal{G}_v ai nodi $v \in V(T)$, in accordo con la definizione 91.23, si trova (cfr. pag. 415 per la definizione di $G(\theta_T)$)

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}_2(T)} \mathcal{V}_{T'}(0) = \sum_{v_2 \in W(T)} \frac{m_{v_2}!}{(m_{v_2} + 1)!} i\nu_{v_2} \sum_{\theta' \in G(\theta_T)} \text{Val}(\theta').$$

Tenendo conto che il sottoalbero che ha ℓ_T^2 come ramo delle radice non può essere equivalente ad alcuno dei sottoalberi contenuti in T che hanno v_2 come radice,

$$\mathcal{C}(\theta_T) := \frac{m_{v_2}!}{(m_{v_2} + 1)!} \sum_{\theta' \in G(\theta_T)} \text{Val}(\theta')$$

costituisce un fattore che non dipende dal nodo v_2 a cui è attaccato il ramo ℓ_T^2 . Quindi si ottiene

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}_2(T)} \mathcal{V}_{T'}(0) = \mathcal{C}(\theta_T) \sum_{v_2 \in W(T)} i\nu_{v_2} = 0.$$

Infine, se T è di tipo HH non c'è nulla da dimostrare. ■

Osservazione 91.29 La dimostrazione del lemma 91.28 mostra che l'operazione 2 è influente ai fini della cancellazione nel caso delle risonanze di tipo hh o hH , così come lo è l'operazione 1 nel caso delle risonanze di tipo Hh . Ci si convince facilmente che, per le risonanze di tipo hh , la cancellazione si può vedere anche ragionando come nel caso delle risonanze di tipo Hh , i.e. spostando il ramo entrante anziché il ramo uscente della risonanza.

Lemma 91.30 *Sia T una risonanza di tipo hh . Si ha*

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}(T)} \partial \mathcal{V}_{T'}(0) = 0.$$

Dimostrazione. Sia T una risonanza di tipo hh . Poiché $\zeta_{v_2}^1 = \zeta_{v_1}^2 = h$, il fattore F_{v_2} del nodo v_2 contiene un fattore $i\nu_{v_2}$, mentre il fattore F_{v_1} del nodo v_1 contiene un fattore $-i\mathcal{M}\nu_{v_1}$, dove $\mathcal{M} = \mathbf{1}$ se ℓ_T^1 è di tipo hh e $\mathcal{M} = T(J_0)$ se ℓ_T^1 è di tipo Hh (cfr. la definizione 88.17). Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = (-i\mathcal{M}\nu_{v_1})(i\nu_{v_2})\mathcal{W}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle),$$

che definisce implicitamente la quantità \mathcal{W}_T .

In virtù della (91.19) si ha

$$\partial \mathcal{V}_T(0) = \sum_{\ell \in L(\mathcal{P}_T)} \gamma^{-R_\ell} \partial \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle) \left(\prod_{\substack{\ell' \in L(T) \\ \ell' \neq \ell}} \gamma^{-R_{\ell'}} \bar{g}_{\ell'}^{(n_{\ell'})}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell'}^0 \rangle) \right) \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right),$$

così che, se scriviamo

$$\partial \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle) = \bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle) \mathcal{O}_\ell(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle), \quad \mathcal{O}_\ell(x) := \left(\frac{\partial_x \chi_{n_\ell}(x)}{\chi_{n_\ell}(x)} - \frac{R_\ell}{ix} \right),$$

dove la funzione $\bar{g}_\ell^{(n_\ell)}(x) \partial_x \chi_{n_\ell}(x) / \chi_{n_\ell}(x)$ va interpretata come 0 per i valori di x tali che $\chi_{n_\ell}(x) = 0$, otteniamo

$$\partial \mathcal{V}_T(0) = \sum_{\ell \in L(\mathcal{P}_T)} \mathcal{O}_\ell(\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle) \left(\prod_{\ell' \in L(T)} \gamma^{-R_{\ell'}} \bar{g}_{\ell'}^{(n_{\ell'})}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell'}^0 \rangle) \right) \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right).$$

Il ramo ℓ divide la risonanza in due grafi disgiunti T_1 e T_2 (cfr. la figura 20.8). Se v_ℓ^1 è il nodo in cui il ramo ℓ entra e v_ℓ^2 è il nodo da cui ℓ esce, definiamo

$$V_\ell^2(T) := \{v \in V(T) : \ell \in L(\mathcal{P}(v_\ell^1, v))\}, \quad V_\ell^1(T) := V(T) \setminus V_\ell^2(T).$$

Indichiamo con $L_\ell^1(T)$ e $L_\ell^2(T)$ gli insiemi dei rami che connettono nodi che sono entrambi in V_ℓ^1 e, rispettivamente, entrambi in V_ℓ^2 . Indichiamo allora con T_1 il grafo tale che $V(T_1) = V_\ell^1(T)$

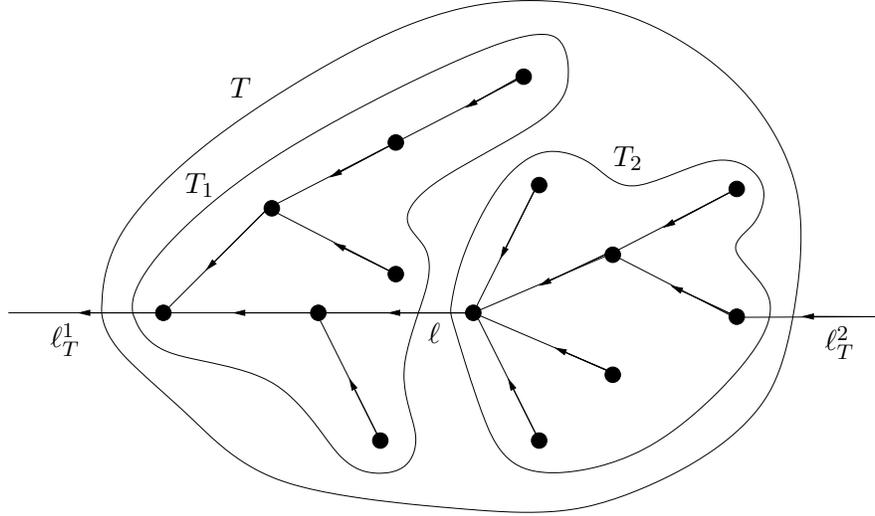


Figura 20.8: Insiemi T_1 e T_2 in cui è divisa la risonanza T dal ramo ℓ .

e $L(T_1) = L_\ell^1(T)$ e con T_2 il grafo tale che $V(T_2) = V_\ell^2(T)$ e $L(T_2) = L_\ell^2(T)$. In altre parole, T_1 è l'insieme dei nodi e dei rami di T che non precedono ℓ , mentre T_2 è l'insieme dei nodi e dei rami di T che precedono ℓ . In analogia con la (91.17), definiamo $W(T_1) = V(T_1) \cap W(T)$ e $W(T_2) = V(T_2) \cap W(T)$.

All'interno della famiglia $\mathcal{F}^R(T)$ consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{F}_{12}^R(T)$ delle risonanze che si ottengono a partire da T nel modo seguente:

- stacciamo il ramo uscente e lo riattacciamo a un qualsiasi altro nodo $v \in W(T_1)$ con $\delta_v = 1$,
- stacciamo il ramo entrante e lo riattacciamo a un qualsiasi altro nodo $v \in W(T_2)$ con $\delta_v = 1$,
- a ogni nodo $v \in V(T)$ applichiamo l'operazione \mathcal{G}_v .

Se procediamo come nella dimostrazione del lemma 88.28, quando sommiamo insieme i valori di tali risonanze, troviamo

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}_{12}^R(T)} \partial \mathcal{V}_{T'}(0) = \mathcal{A}(\theta_T) \mathcal{B}(\theta_T) \sum_{\ell \in L(\mathcal{P}_T)} \mathcal{O}_\ell \sum_{v_1 \in V(T_1)} (-i\mathcal{M}\nu_{v_1}) \sum_{v_2 \in V(T_1)} (i\nu_{v_2}). \quad (91.24)$$

Analogamente, definiamo $\mathcal{F}_{21}^R(T)$ come il sottoinsieme di $\mathcal{F}^R(T)$ ottenuto come segue:

- stacciamo il ramo uscente e lo riattacciamo a un qualsiasi nodo $v \in W(T_2)$ con $\delta_v = 1$,
- stacciamo il ramo entrante e lo riattacciamo a un qualsiasi nodo $v \in W(T_1)$ con $\delta_v = 1$,

- a ogni nodo $v \in V(T)$ applichiamo l'operazione \mathcal{G}_v .

Ragionando come prima troviamo

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}_{21}^R(T)} \partial \mathcal{V}_{T'}(0) = -\mathcal{A}(\theta_T) \mathcal{B}(\theta_T) \sum_{\ell \in L(\mathcal{P}_T)} \mathcal{O}_\ell \sum_{v_1 \in V(T_2)} (-i\mathcal{M}\nu_{v_1}) \sum_{v_2 \in V(T_1)} (i\nu_{v_2}), \quad (91.25)$$

dove il segno $-$ è dovuto al fatto che nelle risonanze $T' \in \mathcal{F}_{21}^R$, rispetto a quelle in \mathcal{F}_{12}^R , il momento del ramo ℓ ha segno opposto (poiché la freccia è diretta da verso T_2 anziché verso T_1) e la quantità \mathcal{O}_ℓ è dispari nel suo argomento.

Se confrontiamo la (91.24) con la (91.25), tenendo conto che

$$\sum_{v \in V(T_1)} \nu_v + \sum_{v \in V(T_2)} \nu_v = \sum_{v \in W(T)} \nu_v = 0,$$

concludiamo che la loro somma dà zero. ■

Corollario 91.31 *Per ogni risonanza T si ha*

$$\sum_{T' \in \mathcal{F}^R(T)} \mathcal{L}\mathcal{V}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu \rangle) = 0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di valore localizzato di una risonanza e dai lemmi 91.28 e 91.30. ■

91.3 Rinormalizzazione

Nel presente paragrafo mostreremo come, utilizzando le cancellazioni descritte nel §91.2, si possano riscrivere le somme dei valori degli alberi come somma di nuove quantità, in cui si tiene conto esplicitamente che i valori localizzati di ogni risonanza danno un contributo totale nullo. Alle nuove quantità daremo il nome di “valori rinormalizzati”, perché il procedimento iterativo seguito per costruirle ricorda il metodo di *gruppo di rinormalizzazione*, usato tipicamente in problemi di meccanica statistica e teoria dei campi.

Definizione 91.32 (RISONANZA MASSIMALE) *Sia T una risonanza contenuta nell'albero θ . Diremo che T è massimale in θ se non esistono in θ risonanze che contengano T al loro interno. Analogamente, una risonanza T' contenuta in T si dice massimale in T se non esistono risonanze all'interno di T che contengano T' al loro interno.*

Per esempio, nel caso della figura 20.9, assumendo che gli ammassi T_1, \dots, T_8 siano tutti risonanze, avremo che T_1, T_2 e T_3 sono massimali in T ; T_4 è massimale in T_2 ; T_5 è massimale in T_3 ; T_6 e T_7 sono massimali in T_5 ; T_8 è massimale in T_7 .

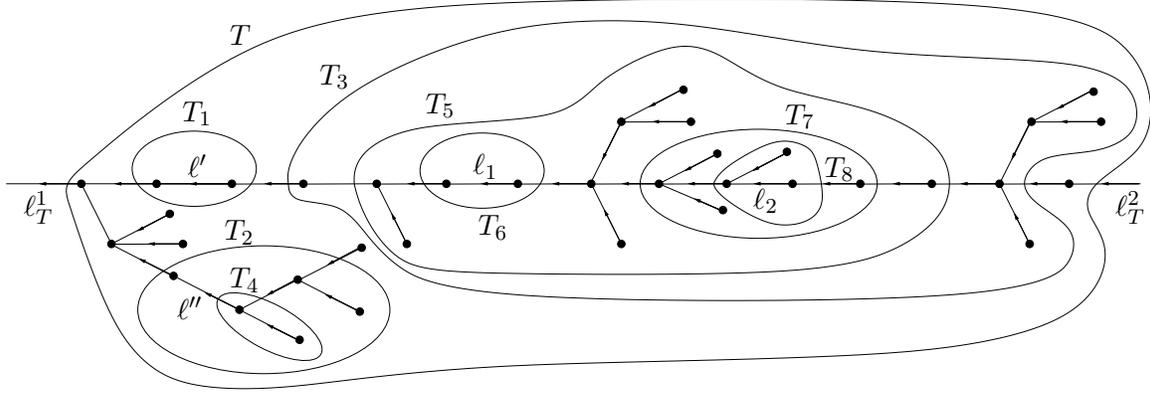


Figura 20.9: Risonanze contenute all'interno di altre risonanze.

Dato un albero $\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$, sia $\mathfrak{T}(\theta)$ l'insieme di tutte le risonanze dell'albero θ e sia $\mathfrak{T}_1(\theta)$ l'insieme delle risonanze massimali in θ . Denotiamo con $\mathfrak{T}(T)$ l'insieme delle risonanze contenute in T , e con $\mathfrak{T}_1(T)$ l'insieme delle risonanze massimali in T . Indichiamo infine con $\dot{\theta}$ l'insieme dei nodi e rami di θ che sono esterni a tutte le risonanze massimali di θ , con $V(\dot{\theta})$ e $L(\dot{\theta})$ l'insieme dei nodi e dei rami, rispettivamente, di $\dot{\theta}$, e definiamo

$$\text{Val}(\dot{\theta}) := \left(\prod_{v \in V(\dot{\theta})} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(\dot{\theta})} g_\ell \right)$$

il *valore potato* di θ , in modo tale che possiamo scrivere

$$\text{Val}(\theta) = \text{Val}(\dot{\theta}) \prod_{T \in \mathfrak{T}_1(\theta)} \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle). \quad (91.26)$$

Se, per qualche $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$, in (91.26) sostituiamo a $\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle)$ il suo valore localizzato $\mathcal{L}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle)$, in generale otteniamo un valore diverso da zero. Tuttavia, vale la seguente proprietà. Consideriamo tutti gli alberi $\theta' \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$ che differiscano da θ solo per la struttura delle risonanze $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$ (i.e. tali che $\dot{\theta}' = \dot{\theta}$); per ciascuno di essi sostituiamo al valore di T il suo valore localizzato; sommiamo tutti i valori così ottenuti; otteniamo allora un valore nullo, come conseguenza del corollario 91.31. Questo vuol dire che, invece del valore dell'albero (91.26), possiamo limitarci a considerare la quantità

$$\overline{\text{Val}}(\theta) = \text{Val}(\dot{\theta}) \prod_{T \in \mathfrak{T}_1(\theta)} \mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle), \quad (91.27)$$

dal momento che la differenza tra la (91.26) e la (91.27) somma a zero, quando si tiene conto di tutti gli alberi che appartengono all'insieme $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$.

Per ogni risonanza T , possiamo scrivere il suo valore regolarizzato in accordo con la definizione 91.25. Se T è di tipo hh , si ha (cfr. la definizione 91.25 e la (91.21))

$$\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle) = \sum_{\ell_1, \ell_2 \in L(\mathcal{P}_T)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle^2 \int_0^1 dt_T (1 - t_T) \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell^* \right), \quad (91.28)$$

dove ricordiamo che l'argomento di ogni propagatore \bar{g}_ℓ non è $\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle$, ma $\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(t_T) \rangle$, con $\nu_\ell(t_T)$ dato dalla (91.23). Analogamente, se T è di tipo hH o Hh , allora si ha (cfr. la definizione 91.25 e la (91.19))

$$\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle) = \sum_{\ell_1 \in L(\mathcal{P}_T)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle \int_0^1 dt_T \left(\prod_{v \in V(T)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell^* \right). \quad (91.29)$$

Infine, se T è di tipo HH , si ha banalmente

$$\mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle) = \mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle). \quad (91.30)$$

Sia \mathring{T} l'insieme dei nodi e dei rami di T che sono all'esterno delle risonanze $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$; denotiamo con $V(\mathring{T})$ e $L(\mathring{T})$ l'insieme dei nodi e dei rami, rispettivamente, contenuti in \mathring{T} . Per esempio, nel caso della risonanza T della figura 20.9, si ha $\mathfrak{T}_1(T) = \{T_1, T_2, T_3\}$, così che \mathring{T} è costituito dai nodi $v \in V(T)$ e dai rami $\ell \in L(T)$ che non sono contenuti all'interno delle risonanze T_1, T_2 e T_3 .

Per ogni risonanza $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$ ridefiniamo il suo valore come

$$\bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(t_T) \rangle) := \left(\prod_{v \in V(T')} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(T')} g_\ell^* \right). \quad (91.31)$$

Analogamente definiamo

$$\bar{\mathcal{V}}_{\mathring{T}}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(t_T) \rangle) := \left(\prod_{v \in V(\mathring{T})} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(\mathring{T})} g_\ell^* \right). \quad (91.32)$$

Possiamo allora riscrivere la (91.28) come

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}\mathcal{V}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle) \\ &= \sum_{\ell_1, \ell_2 \in L(\mathcal{P}_T)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle^2 \int_0^1 dt_T (1 - t_T) \bar{\mathcal{V}}_{\mathring{T}}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(t_T) \rangle) \prod_{T' \in \mathfrak{T}_1(T)} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(t_T) \rangle) \end{aligned} \quad (91.33)$$

e la (91.29) come

$$\begin{aligned} \mathcal{RV}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle) & \quad (91.34) \\ &= \sum_{\ell_1 \in L(\mathcal{P}_T)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle \int_0^1 dt_T (1 - t_T) \bar{\mathcal{V}}_{\bar{F}}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(t_T) \rangle) \prod_{T' \in \mathfrak{T}_1(T)} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(t_T) \rangle). \end{aligned}$$

In conclusione, il valore regolarizzato di T è espresso dalla (91.33) se T è di tipo hh e dalla (91.34) se T è di tipo hH o di tipo Hh .

Per procedere modifichiamo la definizione di operatore di localizzazione \mathcal{L} (e di conseguenza quella dell'operatore di regolarizzazione, poiché $\mathcal{R} = \mathbb{1} - \mathcal{L}$). A tal fine, per semplificare le notazioni, introduciamo una nuova etichetta da associare alle risonanze $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$ e alle risonanze massimali in ciascuna di esse.

A ogni risonanza massimale $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$ associamo un'etichetta η_T , ponendo

$$\eta_T = \begin{cases} 2, & \text{è di tipo } hh, \\ 1, & \text{è di tipo } hH \text{ o } Hh, \\ 0, & \text{è di tipo } HH. \end{cases} \quad (91.35)$$

Anche alle risonanze T' che sono contenute all'interno di T e sono massimali in T associamo un'etichetta $\eta_{T'}$ nel modo seguente (cfr. l'osservazione 91.41 più avanti).

- Consideriamo prima il caso che T sia di tipo hh . Se T' è anch'essa di tipo hh , poniamo

$$\eta_{T'} := \begin{cases} 0, & T' \text{ contiene entrambi i rami } \ell_1 \text{ e } \ell_2, \\ 1, & T' \text{ contiene un solo ramo tra } \ell_1 \text{ e } \ell_2, \\ 2, & T' \text{ non contiene né } \ell_1 \text{ né } \ell_2, \end{cases}$$

mentre, se T' è di tipo hH o Hh , poniamo

$$\eta_{T'} := \begin{cases} 0, & T' \text{ contiene almeno uno dei rami } \ell_1 \text{ e } \ell_2, \\ 1, & T' \text{ non contiene né } \ell_1 \text{ né } \ell_2, \end{cases}$$

Infine, se T' è di tipo HH , allora si ha $\eta_{T'} = 0$.

- Nel caso invece che T sia di tipo hH o Hh , se T' è di tipo hh poniamo

$$\eta_{T'} := \begin{cases} 1, & T' \text{ contiene } \ell_1, \\ 2, & T' \text{ non contiene } \ell_1, \end{cases}$$

se T' è di tipo hH o Hh poniamo

$$\eta_{T'} := \begin{cases} 0, & T' \text{ contiene } \ell_1, \\ 1, & T' \text{ non contiene } \ell_1, \end{cases}$$

se infine T' è di tipo HH poniamo $\eta_{T'} = 0$.

Osservazione 91.33 Per costruzione, le risonanze T' con $\eta_{T'} = 0$, se sono di tipo hh contengono due rami i cui propagatori sono derivati, e se sono di tipo hH o Hh contengono almeno un ramo il cui propagatore è derivato. Viceversa, se $\eta_{T'} \geq 1$, se T' è di tipo hh contiene al più un ramo il cui propagatore è derivato, mentre se è di tipo hH o Hh non ne contiene nessuno.

Osservazione 91.34 Data una risonanza $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$, se $\eta_{T'} = 2$ si ha $g_\ell^* = g_\ell$ per ogni ramo $\ell \in L(T')$. Se invece $\eta_{T'} = 1$ bisogna distinguere due casi: se T' è di tipo hh , allora esiste un ramo $\ell_1 \in L(T') \cap L(\mathcal{P}_T)$ tale che $g_{\ell_1}^* = \partial g_{\ell_1}$, mentre $g_\ell^* = g_\ell \forall \ell \in L(T') \setminus \{\ell_1\}$; se invece T' è di tipo hH o Hh , allora si ha $g_\ell^* = g_\ell \forall \ell \in L(T')$.

Definizione 91.35 (OPERATORE DI LOCALIZZAZIONE ITERATIVA) *Data una risonanza $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$ sia $\bar{\mathcal{V}}_{T'}$ il suo valore (91.31). Si definisce operatore di localizzazione iterativa l'operatore \mathcal{L} la cui azione su $\bar{\mathcal{V}}_{T'}$ è data da*

$$\mathcal{L}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = \begin{cases} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(0) + x \partial \bar{\mathcal{V}}_{T'}(0), & \eta_{T'} = 2, \\ \bar{\mathcal{V}}_{T'}(0), & \eta_{T'} = 1, \\ 0, & \eta_{T'} = 0, \end{cases}$$

se T' è di tipo hh , da

$$\mathcal{L}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = \begin{cases} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(0), & \eta_{T'} = 1, \\ 0, & \eta_{T'} = 0, \end{cases}$$

se T' è di tipo hH o di tipo Hh , e da

$$\mathcal{L}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = 0$$

se T' è di tipo HH .

Definizione 91.36 (OPERATORE DI REGOLARIZZAZIONE ITERATIVA) *Data una risonanza $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$ sia $\bar{\mathcal{V}}_{T'}$ il suo valore (91.31). Si definisce operatore di regolarizzazione iterativa l'operatore \mathcal{R} la cui azione su $\bar{\mathcal{V}}_{T'}$ è data da $\mathcal{R} = \mathbf{1} - \mathcal{L}$, i.e.*

$$\mathcal{R}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = \begin{cases} x^2 \int_0^1 dt_{T'} \partial^2 \bar{\mathcal{V}}_{T'}(t_{T'}x), & \eta_{T'} = 2, \\ x \int_0^1 dt_{T'} \partial \bar{\mathcal{V}}_{T'}(t_{T'}x), & \eta_{T'} = 1, \\ \bar{\mathcal{V}}_{T'}(x), & \eta_{T'} = 0, \end{cases}$$

se T' è di tipo hh ,

$$\mathcal{R}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = \begin{cases} x \int_0^1 dt_{T'} \partial \bar{\mathcal{V}}_{T'}(t_{T'}x), & \eta_{T'} = 1, \\ \bar{\mathcal{V}}_{T'}(x), & \eta_{T'} = 0, \end{cases}$$

se T' è di tipo hH o di tipo Hh , e, infine,

$$\mathcal{R}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(x) = \bar{\mathcal{V}}_{T'}(x)$$

se T' è di tipo HH .

Osservazione 91.37 Il nome degli operatori appena introdotti è dovuto al fatto che la definizione non dipende solo dal tipo della risonanza T' , ma anche dall'etichetta $\eta_{T'}$ associata alla risonanza: possiamo definire l'operatore di localizzazione iterativa di una risonanza $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$ solo dopo aver definito l'operatore di regolarizzazione di T e scelto i rami $\ell_1, \ell_2 \in L(\mathcal{P}_T)$ in (91.33) o il ramo $\ell_1 \in L(\mathcal{P}_T)$ in (91.34).

Se in (91.33) o in (91.34) scriviamo

$$\bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T) \rangle) = \mathcal{L}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T) \rangle) + \mathcal{R}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T) \rangle), \quad (91.36)$$

con \mathcal{L} e \mathcal{R} in accordo con le definizioni 91.35 e 91.36, rispettivamente, tutti i contributi con $\mathcal{L}\bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T) \rangle)$ si cancellano quando sommiamo su tutte le risonanze, come conseguenza del corollario 91.31 (cfr. l'esercizio 25). Ne segue che possiamo ridefinire il valore di θ come

$$\begin{aligned} \overline{\text{Val}}(\theta) = \text{Val}(\dot{\theta}) & \prod_{T \in \mathfrak{T}_1(\theta)} \sum_T^{\eta_T} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T}^2 \rangle^{\eta_T} \int_0^1 \mu_T(t_T) dt_T \bar{\mathcal{V}}_T(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T}^2(t_T) \rangle) \\ & \prod_{T' \in \mathfrak{T}_1(T)} \sum_{T'}^{\eta_{T'}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2 \rangle^{\eta_{T'}} \int_0^1 \mu_{T'}(t_{T'}) dt_{T'} \partial^{\eta_{T'}} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T, t_{T'}) \rangle), \end{aligned} \quad (91.37)$$

dove abbiamo definito

$$\sum_T^{\eta_T} = \begin{cases} \sum_{\ell_{T,1}, \ell_{T,2} \in L(\mathcal{P}_T)} & , \quad \eta_T = 2, \\ \sum_{\ell_{T,1} \in L(\mathcal{P}_T)} & , \quad \eta_T = 1, \\ 1, & \eta_T = 0, \end{cases} \quad (91.38a)$$

$$\nu_\ell(t_T, t_{T'}) = \begin{cases} \nu_\ell^0 + t_{T'} \nu_{\ell_{T'}}^2(t_T), & \ell \in L(\mathcal{P}_{T'}), \\ \nu_\ell^0, & \ell \notin L(\mathcal{P}_{T'}), \end{cases} \quad (91.38b)$$

$$\mu_T(t) = \begin{cases} (1-t), & \eta_T = 2, \\ 1, & \eta_T = 1, \\ \delta(t-1), & \eta_T = 0, \end{cases} \quad (91.38c)$$

se $\delta(t)$ è la *delta di Dirac*, i.e. la distribuzione definita dalle condizioni (cfr. l'esercizio 27)

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) = 1. \quad (91.39)$$

Osservazione 91.38 A titolo di esempio per il calcolo dei momenti, si consideri la figura 20.9, il ramo ℓ' appartiene sia al cammino \mathcal{P}_{T_1} che al cammino \mathcal{P}_T , così che

$$\nu_{\ell'} = \nu_{\ell'}^0 + t_{T_1}(\nu_{\ell_{T_1}^2}^0 + t_T \nu_{\ell_T^2}),$$

dove $\nu_{\ell'}^0$ è il contributo a $\nu_{\ell'}$ dovuto ai nodi contenuti in T_1 (uno solo nel caso della figura) e $\nu_{\ell_{T_1}^2}^0$ è il contributo a $\nu_{\ell_{T_1}^2}$ dovuto ai nodi all'interno di T (il contributo di quelli contenuti in T_3 è nullo dal momento che la somma dei loro modi è zero). Per il ramo ℓ'' si ha invece

$$\nu_{\ell''} = \nu_{\ell''}^0 + t_{T_2} \nu_{\ell_{T_2}^2},$$

poiché ℓ'' si trova lungo il cammino \mathcal{P}_{T_2} , ma non appartiene al cammino \mathcal{P}_T .

Osservazione 91.39 La misura d'integrazione $\mu_T(t_T)$ per $\eta_T = 0$ in termini della delta di Dirac significa, in pratica, che se $\eta_T = 0$ allora si ha semplicemente $t_T = 1$ e non c'è alcuna integrazione da effettuare sul parametro d'interpolazione t_T .

Osservazione 91.40 In (91.38a), abbiamo aggiunto un indice T ai rami su cui si somma, per tener traccia della risonanza T a cui tali rami si riferiscono. Infatti, come vedremo, iterando il procedimento, per ogni risonanza T si genera una somma che, se non è vuota (i.e. se $\eta_T \neq 0$), si estende sui rami (se $\eta_T = 1$) o sulle coppie di rami (se $\eta_T = 2$) lungo il cammino \mathcal{P}_T .

Osservazione 91.41 Ogni risonanza massimale $T \in \mathfrak{X}_1(\theta)$ con $\eta_T \neq 0$ contiene un ramo $\ell_{T,1} \in L(\mathcal{P}_T)$ o due rami – eventualmente coincidenti – $\ell_{T,1}, \ell_{T,2} \in L(\mathcal{P}_T)$ il cui propagatore è derivato, a seconda che si abbia $\eta_T = 1$ o $\eta_T = 2$, rispettivamente; di conseguenza il propagatore di ogni ramo $\ell \in L(\dot{T})$ è derivato al massimo due volte. Indichiamo con $\mathfrak{L}(T)$ l'insieme dei rami $\ell \in L(T)$ che hanno il propagatore derivato. I rami $\ell \in \mathfrak{L}(T)$ possono trovarsi all'interno di risonanze $T' \in \mathfrak{X}_1(T)$; le etichette $\eta_{T'}$ sono definite in modo tale che i propagatori dei rami $\ell \in L(T')$ sono anch'esse derivati al più due volte per ogni $T' \in \mathfrak{X}_1(T)$. Per esempio, se T' è di tipo hh ci sono varie possibilità: se $\mathfrak{L}(T)$ è costituito da due rami e T' li contiene entrambi, allora si ha $\eta_{T'} = 0$ e quindi non ci sono ulteriori rami con propagatore derivato associati alla risonanza T' ; se invece T' contiene solo un ramo $\bar{\ell} \in \mathfrak{L}(T)$, allora $\eta_{T'} = 1$ e c'è quindi un secondo ramo $\ell_{T',1}$ associato a T' (eventualmente coincidente con $\bar{\ell}$) il cui propagatore è derivato; se T' non contiene rami $\ell \in \mathfrak{L}(T)$, allora $\eta_{T'} = 2$, così che in (91.37) dobbiamo sommare su due rami $\ell_{T',1}, \ell_{T',2} \in L(\mathcal{P}_{T'})$ e quindi T' contiene o un propagatore derivato due volte o due propagatori derivati una volta ciascuno; in tutti e tre i casi i propagatori dei rami $\ell \in L(T')$ sono derivati al più due volte. Similmente, se T' è di tipo hH o Hh , se T' contiene almeno un ramo di $\mathfrak{L}(T)$, allora $\eta_{T'} = 0$, così che non ci sono ulteriori derivate che agiscono sui propagatori dei rami $\ell \in L(T')$; se invece T' non contiene rami di $\mathfrak{L}(T)$, allora $\eta_{T'} = 1$ e quindi esiste un ramo $\ell_{T',1}$ il cui propagatore è derivato; in conclusione, in tal caso, T' non può contenere più di un ramo il cui propagatore sia derivato

una volta o o più di due rami i cui propagatori siano derivati una volta ciascuno. Infine, se T' è di tipo HH , allora T' non contiene altri rami con propagatore derivato oltre eventualmente a quelli che appartengono a $\mathfrak{L}(T)$.

In (91.37) possiamo scrivere $\partial^{n_{T'}} \bar{\mathcal{V}}_{T'}(\langle \omega_0, \nu_{\ell_{T'}}(t_T, t_{T'}) \rangle)$ come in (91.19) o in (91.21), a seconda che si abbia $\eta_{T'} = 1$ o $\eta_{T'} = 2$. Possiamo perciò pensare di iterare la costruzione, scrivendo il valore di ogni risonanza massimale in T' come somma del suo valore localizzato e del suo valore regolarizzato, adattando le definizioni 91.35 e 91.36 alle risonanze $T'' \in \mathfrak{T}_1(T')$. Per far questo abbiamo però bisogno di associare un'etichetta $\eta_{T''}$ alle risonanze massimali $T'' \in \mathfrak{T}_1(T')$, dal momento che gli operatori di localizzazione e di regolarizzazione iterativa sono stati definiti in termini dei valori di tale etichetta. Successivamente, passeremo alle risonanze massimali in T'' , e così via, fino a raggiungere risonanze che non contengano altre risonanze al loro interno; a questo punto la costruzione si ferma.

Ci proponiamo quindi di estendere la definizione dell'etichetta η_T a ogni risonanza $T \in \mathfrak{T}(\theta)$, in maniera tale che ogni propagatore $\ell \in L(\theta)$ sia derivato al massimo due volte e che per ogni risonanza T non più di due derivate agiscano sui propagatori dei rami $\ell \in L(\dot{T})$.

Definizione 91.42 (NUVOLA DI UNA RISONANZA) *Se $T \in \mathfrak{T}(\theta)$ non è massimale in θ , allora esistono $p \geq 1$ risonanze T_1, \dots, T_p tali che*

- $T_1 \in \mathfrak{T}_1(\theta)$,
- $T_{i+1} \in \mathfrak{T}_1(T_i)$ per $i = 1, \dots, p-1$, se $p \geq 2$,
- $T \in \mathfrak{T}_1(T_p)$.

Chiamiamo $\mathfrak{C}(T) := \{T_1, \dots, T_p\}$ la nuvola della risonanza T e p la profondità di T .

Iniziamo ad associare a ogni risonanza T un'etichetta $\eta_T \in \{0, 1, 2\}$, per il momento senza ulteriori condizioni. Per ogni risonanza T fissiamo due rami $\ell_{T,1}, \ell_{T,2} \in L(\mathcal{P}_T)$ se $\eta_T = 2$ e un ramo $\ell_{T,1} \in L(\mathcal{P}_T)$ se $\eta_T = 1$, e scriviamo

$$\mathfrak{L}(T) := \begin{cases} \{\ell_{T,1}, \ell_{T,2}\}, & \eta_T = 2, \\ \{\ell_{T,1}\}, & \eta_T = 1, \\ \emptyset, & \eta_T = 0. \end{cases} \quad (91.40)$$

Definiamo $\mathfrak{L}_0(T) = \emptyset$ se T è massimale in θ , e

$$\mathfrak{L}_0(T) := \bigcup_{T' \in \mathfrak{C}(T)} \mathfrak{L}(T') \quad (91.41)$$

altrimenti. Si noti che $\mathfrak{L}(T) \notin \mathfrak{L}_0(T)$.

Definizione 91.43 (GUADAGNO DI UNA RISONANZA) *Sia θ un albero. Associamo a ogni $T \in \mathfrak{T}(\theta)$ un'etichetta di guadagno η_T , definita ricorsivamente come segue:*

1. se T è di tipo hh si ha

$$\eta_T = \begin{cases} 2, & T \text{ non contiene alcun ramo } \ell \in \mathfrak{L}_0(T), \\ 1, & T \text{ contiene uno e un solo ramo } \ell \in \mathfrak{L}_0(T), \\ 0, & T \text{ contiene due rami } \ell \in \mathfrak{L}_0(T); \end{cases}$$

2. se T è di tipo hH o Hh si ha

$$\eta_T = \begin{cases} 1, & T \text{ non contiene alcun ramo } \ell \in \mathfrak{L}_0(T), \\ 0, & T \text{ contiene uno o due rami } \ell \in \mathfrak{L}_0(T); \end{cases}$$

3. se T è di tipo HH si ha $\eta_T = 0$.

Osservazione 91.44 La definizione 91.43 è consistente con la definizione data a pag. 502 nel caso sia di risonanze massimali in θ , i.e. per risonanze $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$, che di risonanze massimali in risonanze che siano a loro volta massimali in θ , i.e. per risonanze $T' \in \mathfrak{T}_1(T)$ per qualche $T \in \mathfrak{T}_1(\theta)$.

Apparentemente la definizione 91.43 non considera la possibilità che T contenga più di due rami di $\mathfrak{L}_0(T)$. In realtà, per costruzione, tale possibilità non si può presentare, come mostra il seguente risultato (da cui segue anche che la definizione 91.43 è ben posta).

Lemma 91.45 *Ogni risonanza T può contenere al più due rami appartenenti a $\mathfrak{L}_0(T)$.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sulla profondità p della risonanza. Se T ha profondità $p = 1$, se T_1 è la risonanza che ne costituisce la nuvola, i.e. tale che $T \in \mathfrak{T}_1(T_1)$, si ha $\mathfrak{L}_0(T) = \mathfrak{L}(T_1)$, quindi $\mathfrak{L}_0(T)$ contiene al più due rami. Supponiamo ora che η_T sia definito in accordo con la definizione 91.43 per risonanze T che abbiano profondità $< p$ e consideriamo una risonanza T di profondità p . Sia T_p la risonanza di profondità $p - 1$ che contiene T , i.e. tale che $T \in \mathfrak{T}_1(T_p)$. Si ha $\mathfrak{L}_0(T) = \mathfrak{L}_0(T_p) \cup \mathfrak{L}(T_p)$. Per l'ipotesi induttiva, al più due rami $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}_0(T_p)$ sono contenuti all'interno di T_p :

1. se sono entrambi contenuti in T , allora $\eta_T = 0$ e quindi $\mathfrak{L}(T) = \emptyset$;
2. se un solo ramo è contenuto in T , allora si ha $\eta_T = 1$ e quindi $\mathfrak{L}(T)$ è costituito da un solo ramo $\ell_{T,1}$ nel caso in cui T sia di tipo hh , altrimenti si ha $\eta_T = 0$;
3. se nessun ramo è contenuto in T , allora $\eta_T = 2$ e quindi $\mathfrak{L}(T)$ è costituito da due rami $\ell_{T,1}$ ed $\ell_{T,2}$ nel caso in cui T sia di tipo hh , $\eta_T = 1$ e quindi $\mathfrak{L}(T)$ è costituito da un ramo $\ell_{T,1}$ nel caso in cui T sia di tipo hH o Hh , ed $\eta_T = 0$ se T è di tipo HH .

In tutti e tre i casi sopra considerati, il numero di rami dell'insieme $\mathfrak{L}_0(T)$ che sono contenuti all'interno di T non è superiore a 2. ■

A questo punto, possiamo effettivamente iterare la costruzione che ha portato alla (91.37). Le definizioni generali degli operatori di localizzazione e di regolarizzazione iterativa sono analoghe alle definizioni 91.35 e 91.36 date nel caso in cui la nuvola della risonanza consista in una risonanza massimale: semplicemente ora T' è una risonanza di profondità qualsiasi e il valore $\bar{V}_{T'}$ è dato dalla (91.31) dopo che abbiamo applicato l'operatore di regolarizzazione a tutte le risonanze della nuvola $\mathfrak{C}(T')$. Alla fine, trascurando tutti i contributi che contengono valori localizzati di qualche risonanza, poiché sommano a zero (cfr. l'esercizio 29), possiamo ridefinire il valore dell'albero θ come (cfr. l'esercizio 30)

$$\bar{\text{Val}}(\theta) = \text{Val}(\dot{\theta}) \prod_{T \in \mathfrak{T}(\theta)} \sum_T^{\eta_T} \int_0^1 \mu(t_T) dt_T \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \left(\prod_{v \in V(\dot{T})} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(\dot{T})} g_\ell^* \right), \quad (91.42)$$

dove si sono usate le notazioni in (91.38a) e (91.38c), mentre il momento di ogni propagatore g_ℓ^* è dato da $\nu_\ell(\underline{t})$, dove $\underline{t} := \{t_T\}_{T \in \mathfrak{T}(\theta)}$ e $\nu_\ell(\underline{t})$ è definito ricorsivamente come

$$\nu_\ell(\underline{t}) = \begin{cases} \nu_\ell^0 + t_T \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}), & \text{se } \ell_T \in L(\mathcal{P}_T), \\ \nu_\ell^0, & \text{se } \ell_T \notin L(\mathcal{P}_T). \end{cases} \quad (91.43)$$

Chiameremo $\nu_\ell(\underline{t})$ *momento interpolato* per distinguerlo dal momento originario ν_ℓ .

Ricordiamo che i coefficienti $h_\nu^{(k)}$, $H_\nu^{(k)}$ e $\mu^{(k)}$ sono definiti in accordo con il lemma 88.22. L'analisi compiuta nel presente paragrafo mostra che possiamo riscrivere, per ogni $k \geq 1$ e per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$,

$$h_\nu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,h}} \bar{\text{Val}}(\theta), \quad H_\nu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,H}} \bar{\text{Val}}(\theta), \quad \mu^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,0,\mu}} \bar{\text{Val}}(\theta), \quad (91.44)$$

dove $\bar{\text{Val}}(\theta)$ è dato dalla (91.42) e prende il nome di *valore rinormalizzato* dell'albero θ .

Osservazione 91.46 Di fatto, come implica la definizione (91.42), $\nu_\ell(\underline{t})$ dipende solo dai parametri di interpolazione t_T associati alle risonanze che contengono il ramo ℓ .

Per ogni risonanza T , la somma $\sum_T^{\eta_T}$ indica una somma su 2, 1 o 0 rami – a seconda del valore di η_T – lungo il cammino \mathcal{P}_T . La (91.42) costituisce una somma di vari addendi ognuno dei quali è identificato da una scelta ben precisa dei rami su cui si somma: due rami $\ell_1, \ell_2 \in L(\mathcal{P}_T)$ se $\eta_T = 2$ e un ramo $\ell_1 \in L(\mathcal{P}_T)$ se $\eta_T = 1$. Sia

$$\mathfrak{L}(\theta) := \bigcup_{T \in \mathfrak{T}(\theta)} \mathfrak{L}(T)$$

l'insieme di tali rami. In (91.42), per ogni ramo ℓ , si ha $g_\ell^* = g_\ell$ se $\ell \notin \mathfrak{L}(\theta)$, si ha $g_\ell^* = \partial g_\ell$ se $\ell = \ell_1$ per un solo ramo $\ell_1 \in \mathfrak{L}(\theta)$, e si ha $g_\ell^* = \partial^2 g_\ell$ se $\ell = \ell_1 = \ell_2$ per due rami (eventualmente coincidenti) $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}(\theta)$. In altre parole il propagatore di ogni ramo $\ell \in L(\theta)$ è derivato se e solo se appartiene a $\mathfrak{L}(\theta)$, e, se lo è, è derivato tante volte quante ℓ compare in $\mathfrak{L}(\theta)$.

Osservazione 91.47 Si noti che alcuni rami possono comparire due volte, ma non più di due, all'interno di $\mathfrak{L}(\theta)$, dal momento che, per costruzione, ogni propagatore è derivato al più due volte. Infatti, se un ramo fosse derivato almeno tre volte, $\mathfrak{L}(\theta)$ dovrebbe contenere tre rami $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, e quindi esisterebbe una risonanza T con $\mathfrak{L}_0(T)$ contenente i tre rami ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , in contraddizione con il lemma 91.45.

Definizione 91.48 (FATTORE DI GUADAGNO DI UNA RISONANZA) *Si chiama* fattore di guadagno della risonanza T *il fattore* $\langle \omega_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T}$ *che compare in* (91.42).

91.4 Stime

Nel presente paragrafo mostreremo come i valori rinormalizzati degli alberi, in termini dei quali abbiamo riscritto i coefficienti delle funzioni h e H , si possano stimare in modo da assicurare la convergenza delle serie perturbative.

Definizione 91.49 (CATENA DI RISONANZE) *Si definisce* catena di risonanze *un insieme di risonanze* $\mathfrak{K} = \{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ *tali che* $\ell_{T_i}^2 = \ell_{T_{i+1}}^1$ *per* $i = 1, \dots, p-1$. *Diremo che* \mathfrak{K} *ha lunghezza* p .

Osservazione 91.50 Per definizione di ramo risonante (cfr. pag. 483), in una catena $\mathfrak{K} = \{T_1, \dots, T_p\}$, tutti i rami esterni sono risonanti, tranne il ramo $\ell_{T_p}^2$, perché non esce da alcuna risonanza. Chiameremo quindi $\ell_{T_p}^2$ il ramo non risonante della catena \mathfrak{K} .

Definizione 91.51 (TIPO DI UNA CATENA DI RISONANZE) *Data una catena di risonanze* $\mathfrak{K} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, *siano* v_0 *il nodo da cui esce il ramo uscente* $\ell_{T_1}^1$ *di* T_1 *e* v_2 *il nodo in cui entra il ramo entrante* $\ell_{T_n}^2$ *di* T_n ; *sia infine* v_2' *il nodo unico tale che* $v_2 = \pi(v_2')$. *La catena di risonanze è di tipo*

1. $h \leftarrow h$ se $\zeta_{v_1}^2 = h$ e $\zeta_{v_2'}^1 = h$;
2. $h \leftarrow H$ se $\zeta_{v_1}^2 = h$ e $\zeta_{v_2'}^1 = H$;
3. $H \leftarrow h$ se $\zeta_{v_1}^2 = H$ e $\zeta_{v_2'}^1 = h$;
4. $H \leftarrow H$ se $\zeta_{v_1}^2 = H$ e $\zeta_{v_2'}^1 = H$.

Lemma 91.52 *Sia \mathfrak{K} una catena di risonanze. Si assuma che né propagatori dei rami interni né quelli dei rami esterni delle risonanze $T \in \mathfrak{K}$ siano derivati. Si ha*

$$\left| \bar{g}_{\ell_{T_1}^1} \prod_{T \in \mathfrak{K}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_T^2} \right| \leq \begin{cases} \left| \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^1}(\underline{t}) \rangle \right|^{-2}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ \left| \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^1}(\underline{t}) \rangle \right|^{-1}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow H \text{ o } H \leftarrow h, \\ 1, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } H \leftarrow H, \end{cases}$$

dove η_T è l'etichetta introdotta nella definizione 91.43.

Dimostrazione. Si procede per induzione sulla lunghezza p della catena.

- Se $p = 1$, la catena \mathfrak{K} è costituita da un'unica risonanza T . Scriviamo $\ell_1 = \ell_T^1$ e $\ell_2 = \ell_T^2$, per semplicità, e poniamo $x := |\langle \bar{\omega}_0, \nu(\underline{t}) \rangle|$, dove $\nu(\underline{t}) = \nu_{\ell_1} = \nu_{\ell_2}$. Poiché né g_{ℓ_1} né g_{ℓ_2} sono derivati, si ha

$$|\bar{g}_{\ell_1}| \leq \begin{cases} x^{-2}, & \text{se } \ell_1 \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ x^{-1}, & \text{se } \ell_1 \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ x^{-1}, & \text{se } \ell_1 \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \end{cases} \quad (91.45a)$$

$$|\bar{g}_{\ell_2}| \leq \begin{cases} x^{-2}, & \text{se } \ell_2 \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ x^{-1}, & \text{se } \ell_2 \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ x^{-1}, & \text{se } \ell_2 \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \end{cases} \quad (91.45b)$$

e, similmente, tenuto conto che per ipotesi nessuna risonanza T della catena contiene rami $\ell \in \mathfrak{L}_0(T)$,

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu(\underline{t}) \rangle^{\eta_T}| \leq \begin{cases} x^2, & \text{se } T \text{ è di tipo } hh, \\ x, & \text{se } T \text{ è di tipo } hH, \\ x, & \text{se } T \text{ è di tipo } Hh, \\ 1, & \text{se } T \text{ è di tipo } HH, \end{cases} \quad (91.46)$$

così che, considerando tutte le varie possibilità, si verifica facilmente che

$$|\bar{g}_{\ell_1} \langle \bar{\omega}_0, \nu(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_2}| \leq \begin{cases} x^{-2}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ x^{-1}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow H, \\ x^{-1}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } H \leftarrow h, \\ 1, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } H \leftarrow H. \end{cases} \quad (91.47)$$

- Se $p > 1$, sia $\mathfrak{K}' = \{T_2, \dots, T_p\}$ la catena di lunghezza $p - 1$ costituita dalle risonanze T_2, \dots, T_p della catena \mathfrak{K} . Possiamo scrivere

$$\bar{g}_{\ell_{T_1}^1} \prod_{T \in \mathfrak{K}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_T^2} = \bar{g}_{\ell_{T_1}^1} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^1}(\underline{t}) \rangle \left(\bar{g}_{\ell_{T_1}^2} \prod_{T \in \mathfrak{K}'} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_T^2} \right),$$

dove, per l'ipotesi induttiva (e per l'ipotesi che i propagatori sono tutti non derivati), si ha

$$\bar{g}_{\ell_{T_1}^2} \left| \prod_{T \in \mathfrak{K}'} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_T^2} \right| \leq \begin{cases} x^{-2}, & \text{se } \mathfrak{K}' \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ x^{-1}, & \text{se } \mathfrak{K}' \text{ è di tipo } h \leftarrow H \text{ o } H \leftarrow h, \\ 1, & \text{se } \mathfrak{K}' \text{ è di tipo } H \leftarrow H, \end{cases} \quad (91.48)$$

dove abbiamo posto $x := |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^1}(\underline{t}) \rangle|$, mentre $\bar{g}_{\ell_{T_1}^1}$ e $\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T}$ sono stimati in accordo con la (91.45a) e con la (91.46), rispettivamente. Si può quindi ragionare come nel caso $p = 1$, utilizzando la stima (91.48) in luogo della stima in (91.45b) per \bar{g}_{ℓ_2} .

Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione 91.53 Il lemma 91.52 mostra che se \mathfrak{K} è una catena di risonanze di tipo $\zeta\zeta'$, con $\zeta, \zeta' \in \{h, H\}$, allora il prodotto

$$g_{\ell_{T_1}^1} \prod_{T \in \mathfrak{K}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} g_{\ell_T^2}$$

ammette la stessa stima del propagatore g_ℓ di un ramo ℓ con $\zeta_\ell^1 = \zeta$ e $\zeta_\ell^2 = \zeta'$.

Fin tanto che si ignorino i propagatori derivati, il lemma 91.52 mostra che le catene di risonanze non producono accumulo di piccoli divisori. Infatti, per ogni risonanza T della catena, il meccanismo di cancellazione discusso nel §91.2 assicura un fattore di guadagno $\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T}$.

Ovviamente occorre tener conto del fatto che alcuni propagatori sono derivati. Tuttavia il lemma 91.45 mostra che ci sono al massimo due derivate che agiscono sul prodotto dei propagatori dei rami che uniscono le risonanze di una catena. Come vedremo, questo comporterà che, a causa delle derivate, si perde qualcosa del guadagno dovuto alle cancellazioni, ma non troppo.

Definizione 91.54 (PERDITA DI GUADAGNO DI UNA RISONANZA) *Dato un albero θ , a ogni risonanza $T \in \mathfrak{T}(\theta)$ associamo un'etichetta $\tilde{\eta}_T$, ponendo*

$$\tilde{\eta}_T = \begin{cases} 2 - \eta_T, & T \text{ è di tipo } hh, \\ 1 - \eta_T, & T \text{ è di tipo } hH \text{ o } Hh, \\ 0, & T \text{ è di tipo } HH. \end{cases}$$

L'etichetta $\tilde{\eta}_T$ prende il nome di perdita di guadagno della risonanza T .

Osservazione 91.55 L'etichetta $\tilde{\eta}_T$ è in un certo senso complementare all'etichetta η_T , in quanto si ha $\eta_T + \tilde{\eta}_T = 2$ se T è di tipo hh , $\eta_T + \tilde{\eta}_T = 1$ se T è di tipo hH o di tipo Hh , e $\eta_T + \tilde{\eta}_T = 0$ se T è di tipo HH .

Per ogni ramo $\ell \in \mathfrak{L}_0(\theta)$, sia T_ℓ la risonanza minimale che contiene ℓ , i.e. la risonanza tale che $\ell \in L(\dot{T}_\ell)$. Possiamo scrivere.....

Il lemma 91.52 può allora essere generalizzato nel modo seguente.

Lemma 91.56 *Sia \mathfrak{K} una catena di risonanze. Si ha*

$$\left| \bar{g}_{\ell_{T_1}}^* \prod_{T \in \mathfrak{K}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \bar{g}_{\ell_T^2}^* \right| \leq \begin{cases} K_0 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^2}(\underline{t}) \rangle|^{-4}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow h, \\ K_0 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^2}(\underline{t}) \rangle|^{-3}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } h \leftarrow H \text{ o } H \leftarrow h, \\ K_0 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^2}(\underline{t}) \rangle|^{-2}, & \text{se } \mathfrak{K} \text{ è di tipo } H \leftarrow H, \end{cases}$$

dove η_T è l'etichetta di guadagno introdotta nella definizione 91.43.

Dimostrazione. Se $\mathfrak{K} = \{T_1, \dots, T_p\}$, si considerino i $p + 1$ rami esterni delle risonanze T_1, \dots, T_p . O tali rami non sono contenuti in alcuna risonanza o esiste una risonanza T tale che tutti i rami sono contenuti in \dot{T} . Nella seconda eventualità, per il lemma 91.45 sono possibili i seguenti casi:

1. i propagatori corrispondenti sono tutti non derivati,
2. uno solo di tali propagatori è derivato ed è derivato una volta sola,
3. uno solo di tali propagatori è derivato ed è derivato due volte,
4. soltanto due propagatori sono derivati e sono derivati una volta sola ciascuno.

Nel caso 1, i rami $\ell \in \mathfrak{L}_0(T)$ che sono contenuti all'interno di T possono essere interni alle risonanze della catena. Poiché tali rami sono al più due (per il lemma 91.45), occorre distinguere tre sottocasi: o una risonanza $T' \in \mathfrak{K}$ ha $\tilde{\eta}_{T'} = 2$, e quindi $\eta_{T'} = 0$, mentre tutte le altre risonanze $T'' \in \mathfrak{K} \setminus \{T'\}$ hanno $\tilde{\eta}_{T''} = 0$ o una risonanza $T' \in \mathfrak{K}$ ha $\tilde{\eta}_{T'} = 1$ e tutte le altre risonanze $T'' \in \mathfrak{K} \setminus \{T'\}$ hanno $\tilde{\eta}_{T''} = 0$ o si ha $\tilde{\eta}_{T'} = \tilde{\eta}_{T''} = 1$ per due risonanze $T', T'' \in \mathfrak{K}$ e $\tilde{\eta}_{T'''} = 0$ per le altre risonanze $T''' \in \mathfrak{K} \setminus \{T', T''\}$. Quindi, in tutti e tre i sottocasi, si ha $\tilde{\eta}_{T_1} + \dots + \tilde{\eta}_{T_p} \leq 2$, e, rispetto alla stima del lemma 91.52, si perde al più un fattore di guadagno complessivo x^2 dovuto alla perdita di guadagno delle risonanze T' con $\tilde{\eta}_{T'} \neq 0$.

Nel caso 2, solo un ramo $\ell \in \mathfrak{L}_0(T)$ può cadere dentro una risonanza T' della catena \mathfrak{K} ; per tale risonanza si ha $\tilde{\eta}_{T'} = 1$, mentre $\tilde{\eta}_{T''} = 0 \forall T'' \in \mathfrak{K} \setminus \{T'\}$; quindi si ha $\tilde{\eta}_{T_1} + \dots + \tilde{\eta}_{T_p} \leq 1$, quindi si perde al più un fattore di guadagno x dovuto alla perdita di guadagno della risonanza T' della catena, mentre un altro fattore x si perde a causa del ramo esterno della catena il cui propagatore è derivato (si tenga conto della stima (91.6) sulla derivata prima del propagatore).

Infine, nei casi restanti 3 e 4, non si perde alcun fattore di guadagno delle risonanze della catena (poiché $\tilde{\eta}_{T'} = 0 \forall T' \in \mathfrak{K}$), ma si perde un fattore x^2 a causa delle due derivate che agiscono sui rami esterni della catena (di nuovo si tenga conto della stima (91.6) sulle derivate prime e seconde del propagatore). ■

In ogni addendo di (91.42), le funzioni a supporto compatto in termini delle quali sono definiti i propagatori assicurano che, per ogni ramo ℓ , se $n \geq 1$ è la scala ad esso associata, si ha (cfr. l'osservazione 91.2)

$$2^{-n+2} \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \geq 2^{-n}. \quad (91.49)$$

D'altra parte le stime dei lemmi 91.14 e 91.15 coinvolgono i momenti originari, i.e. i momenti associati ai rami prima che applicassimo gli operatori di regolarizzazione, quindi, per poter applicare le stime abbiamo bisogno che, per ogni ramo $\ell \in L(\theta)$, il momento ν_ℓ verifichi le proprietà di supporto (91.12):

$$2^{-n+3} \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq 2^{-n-1}. \quad (91.50)$$

Per poter utilizzare quindi i risultati del §91.1, dobbiamo mostrare che la (91.49) implica la proprietà di supporto (91.50).

Lemma 91.57 *In (91.42), se $\text{Val}(\theta) \neq 0$, per ogni ramo $\ell \in L(\theta)$ la cui scala sia $n_\ell \geq 1$ si ha $2^{-n_\ell+3} \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq 2^{-n_\ell-1}$.*

Dimostrazione. Diciamo che un ramo $\ell \in L(\theta)$ ha profondità 0 se non è contenuta in alcuna risonanza $T \in \mathfrak{T}(\theta)$, i.e. se $\ell \in L(\hat{\theta})$, e profondità $p \geq 1$ se $\ell \in L(\hat{T})$ per qualche risonanza T di profondità p (cfr. la definizione 91.43); in tal caso si ha $\nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell^0$ se $\ell \notin L(\mathcal{P}_T)$ e $\nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell^0 + t_T \nu_{\ell_T^2}(\underline{t})$ se $\ell \in L(\mathcal{P}_T)$.

Vogliamo dimostrare la stima per induzione sulla profondità dei rami.

- Se ℓ ha profondità 0 si ha $\nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell$ e la stima vale banalmente.
- Se ℓ ha profondità 1, sia T la risonanza che contiene ℓ . Se $\nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell^0$, di nuovo non c'è nulla da dimostrare, così che dobbiamo considerare esplicitamente solo il caso $\nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell^0 + t \nu_{\ell_T^2}$. Sia n la scala del ramo ℓ_T^2 . Per definizione di risonanza si ha $|\nu_\ell^0| \leq M(T) \leq 2^{(n-3)/\tau}$ (cfr. la condizione 4 nella definizione 91.5), da cui segue che $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| > 2^{-n+3}$. Inoltre si ha $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle| \leq 2^{-n} \leq 2^3 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|$, così che

$$\frac{1}{2} |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| - |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| + |\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle| \leq 2 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|,$$

D'altra parte, se n_ℓ è la scala del ramo ℓ , si ha $2^{-n_\ell} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \leq 2^{-n_\ell+2}$. La quantità $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle|$ è compresa tra $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|$ e $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle|$. Se $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| < |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle|$, e quindi

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle|,$$

si ha

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \geq 2^{-n_\ell} > 2^{-n_\ell-1},$$

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| \leq 2 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \leq 2^{-n_\ell+3},$$

mentre se $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| > |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle|$, e quindi

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|,$$

si ha

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \geq 2^{-1} |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| \geq 2^{-1} |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \geq 2^{-n_\ell-1},$$

$$|\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell(\underline{t}) \rangle| \leq 2^{-n_\ell+2} < 2^{-n_\ell+3}.$$

Perciò in entrambi i casi si ha $2^{-n_\ell-1} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2^{-n_\ell+3}$.

- Assumiamo ora che le stime valgano per tutti i rami di profondità $\leq p$ e mostriamo che allora valgono anche per rami di profondità $p+1$. Sia dunque ℓ un ramo di profondità $p+1$ e sia T la risonanza di profondità p che contiene ℓ . Il solo caso da discutere è quello in cui si abbia $\nu_\ell = \nu_\ell(\underline{t}) = \nu_\ell^0 + t_T \nu_{\ell_T^2}(\underline{t})$. Possiamo ragionare come per i rami di profondità 1. Per l'ipotesi induttiva, se n è la scala del ramo ℓ_T^2 , si ha $|\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2} \rangle| \leq 2^{-n+1} \leq 2^2 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|$, dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $|\nu_\ell^0| \leq 2^{(n-3)/\tau}$, di nuovo per definizione di risonanza, così che le disuguaglianze

$$\frac{1}{2} |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle| \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2 |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell^0 \rangle|$$

continuano a essere valide anche per il ramo ℓ e lo stesso argomento usato nel caso di profondità 1 si applica anche in questo caso.

In conclusione si ha $2^{-n_\ell-1} \leq |\langle \bar{\omega}_0, \nu_\ell \rangle| \leq 2^{-n_\ell+3}$ per ogni ramo $\ell \in L(\theta)$. ■

Lemma 91.58 *In ogni addendo della somma (91.42), si ha, per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$,*

$$\left| \left(\prod_{\ell \in L(\dot{\theta})} \bar{g}_\ell \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* \right) \right| \leq (2^{16n_0+1} K_0)^{2k} \exp \left(64 \log 2 M(\theta) \sum_{n=n_0}^{\infty} n 2^{-n/\tau} \right),$$

dove K_0 è la costante in (91.6).

Dimostrazione. Ricordiamo che, per definizione, i rami risonanti di un albero sono i rami che escono da una risonanza (cfr. pag. 483). Indichiamo con $L^*(\theta)$ l'insieme dei rami non risonanti in un albero θ , con $L_R^*(\theta)$ il sottoinsieme di $L^*(\theta)$ costituito dai rami non risonanti delle catene di risonanze (cfr. l'osservazione 91.50), e con $\mathcal{K}(\dot{T})$ l'insieme delle catene di risonanze unite da rami che appartengono a $L(\dot{T})$, con la convenzione che $\mathcal{K}(\dot{T}) = \emptyset$ se T non contiene altre risonanze. Infine poniamo $L_N^*(\theta) := L^*(\theta) \setminus L_R^*(\theta)$ e indichiamo con $N_N^*(\theta)$ il numero degli elementi in $L_N^*(\theta)$.

In (91.42) possiamo scrivere

$$\left(\prod_{\ell \in L(\dot{\theta})} \bar{g}_\ell \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* \right) = \left(\prod_{\ell \in L^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \prod_{\mathfrak{R} \in \mathcal{K}(\dot{T})} \prod_{T' \in \mathfrak{R}} \bar{g}_{\ell_{T'}^*}^* \right), \quad (91.51)$$

dove il secondo prodotto tiene conto di tutti i rami risonanti.

Poiché per ogni risonanza T c'è un fattore di guadagno $\langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T}$, utilizzando la (91.51) abbiamo

$$\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* = \left(\prod_{\ell \in L^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \prod_{\mathfrak{R} \in \mathcal{K}(\dot{T})} \prod_{T' \in \mathfrak{R}} \bar{g}_{\ell_{T'}^*}^* \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_{T'}} \right). \quad (91.52)$$

In (91.52) possiamo dividere il primo prodotto in

$$\prod_{\ell \in L^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* = \left(\prod_{\ell \in L_N^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right) \left(\prod_{\ell \in L_R^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right),$$

così da stimare

$$\begin{aligned} & \left| \left(\prod_{\ell \in L_R^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \prod_{\mathfrak{R} \in \mathcal{K}(\dot{T})} \prod_{T' \in \mathfrak{R}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_{T'}} \bar{g}_{\ell_{T'}^*}^* \right) \right| \\ & \leq \prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \prod_{\mathfrak{R} \in \mathcal{K}(\dot{T})} K_0 \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{-4} \\ & \leq K_0^{2k - N_N^*(\theta)} \left(\prod_{n=0}^{\infty} 2^{2(n+1)R_n(\theta)} \right) \left(\prod_{\ell \in L_R^*(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell}(\underline{t}) \rangle^{-2} \right), \end{aligned} \quad (91.53)$$

dove si è tenuto conto che, per ogni catena $\mathfrak{R} \in \mathcal{K}(\dot{T})$, scrivendo $\mathfrak{R} = \{T_1, \dots, T_p\}$, si ha

$$\bar{g}_{\ell_{T_1}^*}^* \prod_{T' \in \mathfrak{R}} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T'}^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_{T'}} \bar{g}_{\ell_{T'}^*}^* \leq K_0 \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_{T_1}^2}(\underline{t}) \rangle^{-4}$$

per il lemma 91.56.

Successivamente, stimiamo

$$\begin{aligned} & \left| \left(\prod_{\ell \in L_N^*(\theta)} \bar{g}_\ell^* \right) \left(\prod_{\ell \in L_R^*(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell}(\underline{t}) \rangle^{-2} \right) \right| \leq K_0^{N_N^*(\theta)} \prod_{\ell \in L^*(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell}(\underline{t}) \rangle^{-2} \\ & \leq K_0^{N_N^*(\theta)} 2^{16n_0 k} \prod_{n=n_0}^{\infty} 2^{4(n+1)nN_n^*(\theta)} \end{aligned} \quad (91.54)$$

dove si è tenuto conto che ogni propagatore è derivato al più due volte (cfr. l'osservazione 91.47 e la stima (91.6) sulle derivate dei propagatori) e abbiamo stimato con 2^{n_0} tutti i propagatori con scala $n < n_0$.

In conclusione, unendo le stime (91.53) e (91.54), troviamo, per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{\ell \in L(\dot{\theta})} \bar{g}_\ell \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* \right) \right| &\leq (2K_0)^{2k} 2^{16n_0 k} \prod_{n=n_0}^{\infty} 2^{4nN_n^*(\theta) + 4nR_n(\theta)} \\ &\leq (2K_0 2^{16n_0})^{2k} \exp \left(64 \log 2 M(\theta) \sum_{n=n_0}^{\infty} n 2^{-n/\tau} \right), \end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le stime del lemma 91.14 e del corollario 91.16. \blacksquare

Lemma 91.59 *Sia $\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$ e sia $\overline{\text{Val}}(\theta)$ definito come in (91.42). In ogni addendo della somma (91.42), si ha*

$$\left| \left(\prod_{v \in V(\theta)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in L(\dot{\theta})} \bar{g}_\ell \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* \right) \right| \leq A_2^k e^{-\xi|\nu|/2} e^{-\xi M(\theta)/4}$$

per un'opportuna costante positiva A_2 .

Dimostrazione. In virtù del lemma 88.19, con $\xi_3 = \xi/8$, possiamo stimare

$$\left| \prod_{v \in V(\theta)} \frac{1}{m_v!} F_v \right| \leq \left(\frac{16\beta_0 E n}{\rho_0 \xi} \right)^{2k} e^{-\xi|\nu|/2} \prod_{v \in V(\theta)} e^{-\xi|\nu_v|/8}, \quad (91.55)$$

dove si è tenuto conto che $(m+1)!/m! = (m+1) \leq 2^m$ per ogni $m \geq 0$ e che

$$\sum_{v \in V(\theta)} m_v \leq 2k,$$

per i lemmi 88.5 e 88.13. Dalla stima (91.55) e dal lemma 91.58 ricaviamo

$$\left| \left(\prod_{v \in V(\theta)} \frac{1}{m_v!} F_v \right) \left(\prod_{T \in \mathcal{T}(\theta)} \langle \bar{\omega}_0, \nu_{\ell_T^2}(\underline{t}) \rangle^{\eta_T} \prod_{\ell \in L(\dot{T})} \bar{g}_\ell^* \right) \right| \leq \left(\frac{32K_0\beta_0 E n 2^{16n_0}}{\rho_0 \xi} \right)^{2k} e^{-\xi|\nu|/2} e^{-\xi M(\theta)/4},$$

purché n_0 sia scelto in modo che risulti

$$64 \log 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n 2^{-n/\tau} \leq \frac{\xi}{8}.$$

Segue l'asserto con $A_2 = 32K_0\beta_0 E n 2^{16n_0} \rho_0^{-1} \xi^{-1}$. \blacksquare

Lemma 91.60 Per ogni albero $\theta \in \mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$, sia $\overline{\text{Val}}(\theta)$ definito come in (91.42). Si ha

$$|\overline{\text{Val}}(\theta)| \leq A_1^k e^{-\xi|\nu|/2} e^{-\xi M(\theta)/4} \prod_{v \in V(\theta)} \gamma^{-R_\ell}$$

per un'opportuna costante A_1 .

Dimostrazione. Ogni addendo della somma (91.42) è stimato in accordo con il lemma 91.59. Dal momento che gli integrali sono stimati banalmente da 1, resta da contare il numero degli addendi. Per ogni risonanza T possiamo scegliere due rami lungo il cammino \mathcal{P}_T . Essendo il numero di risonanza minore di $2k$ (i.e. del numero totale di rami dell'albero), concludiamo che ci sono al più 2^{2k} addendi. L'asserto segue quindi con $A_1 = 4A_0$, se A_0 è la costante che compare nel lemma 91.59. ■

Lemma 91.61 Per ogni albero θ di ordine k si ha

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell \leq 2k.$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell \leq \begin{cases} 2k(\theta), & \zeta_{\ell_0}^1 = h, \\ 2k(\theta) - 1, & \zeta_{\ell_0}^1 = H, \\ 2k(\theta) - 2, & \zeta_{\ell_0}^1 = \mu, \end{cases} \quad (91.56)$$

dove ℓ_0 è il ramo della radice di θ e $k(\theta)$ è l'ordine di θ . Il caso $k(\theta) = 1$ è verificato immediatamente. Se $k(\theta) = k > 1$, assumiamo che le stime (91.56) siano soddisfatte per $k(\theta) < k$. Sia v_0 il nodo da cui esce ℓ_0 , e siano $\theta_1, \dots, \theta_{m_{v_0}}$ sono i sottoalberi che hanno come rami della radice i rami che entrano nel nodo v_0 .

- Se $\zeta_{\ell_0}^1 = h$, si può avere $\delta_{v_0} = 0$ oppure $\delta_{v_0} = 1$. Se $\delta_{v_0} = 0$ si ha $q_{v_0} = 0$ e $m_{v_0} = p_{v_0} \geq 2$ (cfr. la definizione 88.12); inoltre ℓ_0 è di tipo $h \leftarrow H$ e il corrispondente propagatore è tale che $R_{\ell_0} = 1$ (cfr. la definizione 88.15), così che

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell = R_{\ell_0} + \sum_{i=2}^{p_{v_0}} \sum_{\ell \in L(\theta_i)} R_\ell \leq 1 + \sum_{i=2}^{p_{v_0}} (2k(\theta_i) - 1) \leq 1 + 2k(\theta) - p_{v_0} \leq 2k(\theta) - 1,$$

poiché $k(\theta_1) + \dots + k(\theta_{p_{v_0}}) = k(\theta)$. Se invece $\delta_{v_0} = 1$, si ha $R_{\ell_0} = 1$ o $R_{\ell_0} = 2$ a seconda che ℓ_0 sia di tipo $h \leftarrow H$ o $h \leftarrow h$, così che

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell = R_{\ell_0} + \sum_{i=1}^{m_{v_0}} \sum_{\ell \in L(\theta_i)} R_\ell \leq 2 + \sum_{i=1}^{m_{v_0}} 2k(\theta_i) \leq 2 + 2(k(\theta) - 1) \leq 2k(\theta),$$

poiché $k(\theta_1) + \dots + k(\theta_{m_{v_0}}) = k(\theta) - 1$.

- Se $\zeta_{\ell_0}^1 = H$, si ha $R_{\ell_0} = 1$ e $\delta_{v_0} = 1$, così che

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell = R_{\ell_0} + \sum_{i=1}^{m_{v_0}} \sum_{\ell \in L(\theta_i)} R_\ell \leq 1 + \sum_{i=1}^{m_{v_0}} 2k(\theta_i) \leq 1 + 2(k(\theta) - 1) \leq 2k(\theta) - 1,$$

poiché $k(\theta_1) + \dots + k(\theta_{m_{v_0}}) = k(\theta) - 1$.

- Se $\zeta_{\ell_0}^1 = \mu$, si ha $R_{\ell_0} = 0$; se $\delta_{v_0} = 0$ si ha $q_{v_0} = 0$ e $m_{v_0} = p_{v_0} \geq 2$, così che

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell = R_{\ell_0} + \sum_{i=2}^{p_{v_0}} \sum_{\ell \in L(\theta_i)} R_\ell \leq \sum_{i=2}^{p_{v_0}} (2k(\theta_i) - 1) \leq 2k(\theta) - 2,$$

poiché $k(\theta_1) + \dots + k(\theta_{p_{v_0}}) = k(\theta)$, mentre se $\delta_{v_0} = 1$ si ha

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} R_\ell = R_{\ell_0} + \sum_{i=1}^{m_{v_0}} \sum_{\ell \in L(\theta_i)} R_\ell \leq \sum_{i=1}^{m_{v_0}} 2k(\theta_i) \leq 2(k(\theta) - 1),$$

poiché $k(\theta_1) + \dots + k(\theta_{m_{v_0}}) = k(\theta) - 1$.

In conclusione le setime (91.56) valgono anche per $k(\theta) = k$. ■

Lemma 91.62 *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n$, i coefficienti $h_\nu^{(k)}$, $H_\nu^{(k)}$ e $\mu^{(k)}$ ammettono la seguente stima:*

$$\left| h_\nu^{(k)} \right| \leq A_0^k \gamma^{-2k} e^{-\xi|\nu|/2}, \quad \left| H_\nu^{(k)} \right| \leq A_0^k \gamma^{-2k} e^{-\xi|\nu|/2}, \quad \left| \mu^{(k)} \right| \leq A_0^k \gamma^{-2k},$$

per un'opportuna costante A_0 .

Dimostrazione. Si ragiona come per i lemmi 88.33 e 88.34 per effettuare le somme su tutti gli alberi degli insiemi $\mathcal{T}_{k,\nu,\zeta}$. ■

Il lemma 91.62 mostra che le soluzioni (87.8) delle equazioni del moto sono analitiche sia in ψ , per $|\Im \psi_i| \leq \xi/2$, che in ε , per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, purché ε_0 sia sufficientemente piccolo. Inoltre il raggio di analiticità in ε è proporzionale a γ^2 . Di conseguenza, per ε fissato (sufficientemente piccolo), sopravvivono quei tori invarianti del sistema imperturbato le cui frequenze soddisfino la condizione diofantea (84.20) con $\gamma = 0(\sqrt{\varepsilon})$. Nell'insieme delle frequenze del sistema imperturbato, quelle che corrispondono a tori che sono distrutti dalla perturbazione ha quindi misura relativa di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ (cfr. anche l'osservazione 89.10).

§92 Conclusioni

Per quanto il teorema KAM rappresenti uno dei risultati fondamentali del '900 nell'ambito dei sistemi dinamici, non è altrettanto ovvio quale sia la sua rilevanza in sistemi concreti, quali per esempio il modello di Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou discusso all'inizio del §89 o il sistema solare, anche solo nell'approssimazione considerata nell'esempio 84.2.

Riguardo al modello Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, abbiamo già accenato a pag. 462 che non rendono immediata l'applicazione del teorema. Innanzitutto, il sistema imperturbato non soddisfa la condizione di non degenerazione di Kolmogorov. Tale condizione in realtà si può indebolire, ma non al punto da includere i sistemi isocroni. Tuttavia, nel caso di sistemi isocroni perturbati, si può effettuare una prima trasformazione canonica che modifichi l'hamiltoniana libera di ordine ε e sposti la perturbazione a ordine più alto (cfr. la teoria perturbativa al primo ordine discussa nel §84). Può allora succedere che le correzioni del primo ordine rimuovano l'isocronia del sistema e la nuova hamiltoniana imperturbata soddisfi una condizione della forma 89.7c con η_0 di ordine ε . Poiché ora la perturbazione è di ordine più alto, la costruzione iterativa utilizzata per la dimostrazione del teorema nel §84 può ancora funzionare. Il problema diventa quindi quello tecnico (ma non per questo banale) di accertarsi che la nuova hamiltoniana imperturbata sia non degenera. Questo è stato fatto esplicitamente nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam (cfr. la nota bibliografica).

Più serio è il problema legato ai valori del parametro perturbativo per i quali si possa applicare il teorema KAM. Tenuto conto che l'esponente diofanteo τ dipende dalla dal numero di gradi di libertà n (si deve avere $\tau > n - 1$), un'analisi delle stime discusse nel §84 mostra che $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$: in particolare più grande è il numero N di oscillatori accoppiati, più piccoli devono essere i valori dei parametri α e β per poter applicare il teorema KAM. Il valore di N utilizzato nell'esperimento numerico originario del 1953, pur non essendo particolarmente elevato, rende improbabile, o se non altro problematica, una banale applicazione del teorema senza ulteriori argomenti, tanto più che, in lavori successivi, anche molto recenti, in cui, potendo contare su computer molto più efficienti e veloci, sono state effettuate simulazioni per valori di N molto più grandi, si è visto che risultati analoghi si trovano indipendentemente dal valore di N .

Una possibile spiegazione potrebbe quindi essere che, nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam, il valore di ε per cui si ha la sopravvivenza della maggior parte dei tori non va a zero con la dimensione del sistema, per esempio a causa del fatto che l'interazione è solo a primi vicini. Tuttavia come rendere costruttivo un argomento di questo tipo non è semplice. Si è anche cercato di dimostrare, più o meno rigorosamente, che il modello di Fermi-Pasta-Ulam rappresenta una perturbazione di un diverso sistema integrabile, ottenuto dal modello stesso nel limite $N \rightarrow \infty$; si ottiene in questo modo un'equazione alle derivate parziali, che, sotto ulteriori approssimazioni, si riduce alla cosiddetta *equazione di Korteweg-de Vries* (o *KdV*), che costituisce appunto un sistema integrabile a infiniti gradi di libertà. Rimangono

comunque problemi aperti, legati essenzialmente al fatto che il sistema infinito ottenuto come limite descrive solo approssimativamente il sistema finito.

Un'altra possibile spiegazione nasce dalla considerazione che, come mostra il teorema di Nechorošev (cfr. il teorema 85.2, anche se il sistema perturbato non è più integrabile, i moti comunque appaiono quasi-periodici su tempi esponenzialmente lunghi. Quindi, solo apparentemente, i moti sono regolari e tali appaiono semplicemente perché i tempi di osservazione non sono sufficientemente lunghi da vedere manifestarsi gli effetti della non linearità. Si viene quindi a creare uno *stato metastabile*, ovvero uno stato di non equilibrio su scale di tempi intermedie in cui i moti sono regolari, mentre su scale di tempi più lunghi, il sistema evolve verso la termalizzazione. La scala dei tempi di metastabilità, sulla base di simulazioni numeriche, risulta legata al valore dell'energia media per oscillatore.

In ultima analisi, una risposta al paradosso di Fermi-Pasta-Ulam deve tener conto di entrambi gli aspetti: probabilmente quello che si osserva negli esperimenti numerici è uno stato metastabile di un sistema che si sta muovendo molto lentamente verso la termalizzazione, e la lentezza con cui viene raggiunta l'equidistribuzione dell'energia è legata alla particolare struttura dell'hamiltoniana, che rende la teoria perturbativa efficace su tempi molto più lunghi di quelli tipici della teoria KAM. In ogni caso, una soluzione definitiva del problema è ancora lontana e il modello di Fermi-Pasta-Ulam continua a essere largamente studiato sia analiticamente che numericamente.

Anche nel caso del sistema solare, non è facile valutare il teorema KAM permette di concludere che i moti sono quasi-periodici e quindi stabili. In primo luogo il sistema hamiltoniano introdotto nell'esempio 84.2 costituisce una forte approssimazione della realtà: oltre al fatto che i pianeti sono descritti da corpi puntiformi, prescindendo dalla loro struttura interna, si trascurano inoltre i satelliti, gli asteroidi e qualsiasi altro corpo celeste. Inoltre, anche l'hamiltoniana imperturbata (84.12a), come nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam, non soddisfa la condizione di non degenerazione di Kolmogorov. Di nuovo, con alcune ulteriori ipotesi semplificatrici sul sistema, si riesce a dimostrare che un primo passo di teoria perturbativa rimuove la degenerazione, però, anche qui di nuovo, il principale ostacolo che si incontra nell'applicare il teorema KAM risiede nel valore del parametro perturbativo: il valore di ε dato dai parametri fisici è all'interno dell'intervallo di valori per cui vale il teorema?

Una serie di esperimenti numerici condotti da Laskar, a partire dal 1989 fino ai più recenti nel 2004-2009, suggeriscono che il sistema solare sia caotico. Anche in questo caso, quindi, la regolarità dei moti è solo apparente, dovuta essenzialmente alla durata relativamente breve dei tempi di osservazione, mentre, su archi temporali più lunghi, i primi effetti di caoticità iniziano a manifestarsi. Per esempio, l'integrazione numerica delle equazioni del moto mostra che un errore sulla posizione della Terra di poco più di una decina di metri rende impossibile prevedere la sua posizione dopo qualche centinaia di milioni di anni; analogamente, una differenza di qualche metro nella posizione iniziale di Mercurio può avere effetti catastrofici nella sua evoluzione, fino ad arrivare a una collisione con l'orbita di Venere o alla caduta sul

Sole. Ovviamente, a causa della complessità computazionale e dei tempi molto lunghi delle integrazioni numeriche, di fatto, le simulazioni sono effettuate con equazioni mediate, e quindi con ulteriori approssimazioni; ci si aspetta in ogni caso che, essendo il sistema di equazioni originario più complicato, gli effetti caotici dovrebbero essere accentuati e non ridotti se si rimuovessero tutte le approssimazioni e si studiasse le equazioni del moto complete.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito [Gallavotti-2] per il §89. La discussione della convergenza della serie di Lindstedt segue [Gentile & Mastropietro, Gentile]. Per il problema di Siegel menzionato a pag. 462 si veda per esempio [Siegel]. Per un'introduzione al contesto storico e alle problematiche in cui si inserisce il teorema KAM, si veda [Scott-Dumas].

La dimostrazione che l'hamiltoniana del modello di Fermi-Pasta-Ulam può essere portata in una forma in cui sia soddisfatta la condizione di non-degenerazione di Kolmogorov può essere trovata in [Rink]; per il legame del modello di Fermi-Pasta-Ulam e dell'equazione Korteweg-De Vries (KdV) si vedano [Zabusky & Kruskal] e, per risultati più recenti, [Bambusi & Ponno]; più in generale, per un lavoro di rassegna sul modello di fermi-Pasta-Ulam, rimandiamo a [Gallavotti-3].

Per la discussione della stabilità del sistema solare e il suo legame con il teorema KAM, si veda per esempio [Laskar & Gastineau] e i lavori precedenti ivi citati.

Esercizi

Esercizio 1 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$q_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i \sin\left(\frac{ik\pi}{N}\right), \quad p_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sin\left(\frac{ik\pi}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N-1,$$

diagonalizza la (89.1) portandola nella forma (89.2) e si trovi l'espressione esplicita delle frequenze proprie $\omega_1, \dots, \omega_N$. [*Suggerimento.* Per verifica diretta. Si trova $\omega_k = 2 \sin(k\pi/2N)$.]

Esercizio 2 Si dimostri la stima (89.11). [*Soluzione.* Sia $A_{ij} := [\partial\omega_{0i}/\partial J_j](J) = [\partial^2\mathcal{H}_0/\partial J_i\partial J_j](J)$. Si ha, tenendo conto anche dell'esercizio 4 del capitolo 19),

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{|x|=1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right)^2 \leq \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2 \leq \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2 \\ &\leq \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n^2 |x|^2 \leq n^2 \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2, \end{aligned}$$

dove possiamo stimare, utilizzando il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 19),

$$\max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}| = \max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial\omega_{0i}}{\partial J_j}(J) \right| \leq \frac{E_0}{\rho_0/2},$$

purché $\rho \leq \rho_0/2$.]

Esercizio 3 Si dimostri la stima (89.14). [*Suggerimento.* Si stimano le derivate di $V^{>N_0}$ rispetto a φ e J come in (89.13) tenendo conto che per il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 19) ogni derivata comporta un ulteriore fattore $1/\delta$.]

Esercizio 4 Si dimostri la stima (89.15). [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 3, tenendo conto che, rispetto a $V^{>N_0}$, quando stimiamo il massimo della funzione $V^{\leq N_0}$ non otteniamo il fattore di decadimento esponenziale $e^{-\delta_0 N_0/2}$.]

Esercizio 5 Si dimostri che la stima (89.19) implica la stima (89.16). [*Soluzione.* Se δ_0 è fissato in accordo con la (89.18), la (89.16) diventa

$$N_0 \geq \frac{2}{\xi_0} \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right) \log \left(\frac{2B_2}{C_0 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{\xi_0} \log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0} \right)^n \right).$$

Se scriviamo $x = 1/C_0 \varepsilon_0$, se x è sufficientemente grande possiamo maggiorare

$$\log \left(2B_2 x \left(\frac{\log x}{\xi_0} \right)^n \right) \leq \log (2\bar{B}_2 \xi_0^{-n} b_1 x^2) \leq \frac{b_2}{\xi_0} \log x,$$

per opportune costanti positive b_1 e b_2 , e scegliere quindi N_0 in modo da soddisfare la disuguaglianza

$$N_0 \geq \frac{b_2}{\xi_0^2} (\log x)^2,$$

da cui segue la (89.16) con $B_0 = \bar{b}_2$.]

Esercizio 6 Si dimostrino le stime (89.20) e (89.21). [*Suggerimento.* Si ragiona in modo analogo a quanto fatto nell'esercizio 3, utilizzando la stima (89.20) sulla funzione $W_0(\varphi, J')$ nel dominio $\bar{D}_{1,1}$ e il teorema di Cauchy sia per le derivate prime che per le derivate seconde.]

Esercizio 7 Si dimostri che l'equazione (89.22) si può risolvere applicando il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Si riscriva la (89.22) nella forma $\bar{G}(\varphi, \mu) = 0$, con

$$\bar{G}(\varphi, \mu) := \varphi - \varphi' + \mu \frac{\partial W_0}{\partial J'}(\varphi, J'),$$

dove $\mu = 1$ e (φ', J') sono visti come parametri fissati. Si ha $\bar{G}(\varphi', 0) = 0$ e

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \varphi}(\varphi, \mu) := \mathbb{1} + \mu \frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi \partial J'}(\varphi, \mu).$$

Possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che per ogni μ vicino a zero esiste $\varphi = \bar{\varphi}(\mu)$ tale che $\bar{G}(\bar{\varphi}(\mu), \mu) = 0$. Poiché W_0 è di ordine ε_0 , per ε_0 sufficientemente piccolo, si può fissare $\mu = 1$, e si trova quindi $\varphi = \bar{\varphi}(1)$ dato dalla (89.24).]

Esercizio 8 Si stimino le derivate delle funzioni Δ_1 e Ξ_1 in (89.28) nel dominio \bar{D}_1 . [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 2. Si trova

$$\max_{(\varphi', J') \in \bar{D}_1} \left| \frac{\partial^r \partial^s}{\partial J_1^{r_1} \dots \partial J_n^{r_n} \partial \varphi_1^{s_1} \dots \partial \varphi_n^{s_n}} \Delta_1 \right| \leq B_6 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau-r-s} \bar{\rho}_1^{-r} E_0 N_0^{\tau+1},$$

dove $r = r_1 + \dots + r_n$ e $s = s_1 + \dots + s_n$. Stime analoghe valgono per le derivate di Ξ_1 , con un fattore $\bar{\rho}_1$ in più (cfr. le (89.27)).]

Esercizio 9 Sia A una matrice simmetrica invertibile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e autovettori v_1, \dots, v_n . Si dimostri che la sua inversa A^{-1} ha autovalori $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ e autovettori v_1, \dots, v_n . [Soluzione. Si ha $Av_i = \lambda_i v_i$ per $i = 1, \dots, n$; moltiplicando a sinistra per A ambo i membri, si ottiene

$$v_i = A^{-1}Av_i = A^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_i A^{-1}v_i \implies A^{-1}v_i = \lambda_i^{-1}v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

da cui si evince che gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A e che, per ogni $i = 1, \dots, n$, il vettore v_i è l'autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda_i$.]

Esercizio 10 Sia A una matrice simmetrica tale che $\|A\| \leq 1$. Si dimostri che $\mathbb{1} + A$ è invertibile e che $\|(\mathbb{1} + A)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|A\|)$. [Soluzione. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A e v_1, \dots, v_n i corrispondenti autovettori normalizzati. Poiché A è simmetrica, gli autovalori sono reali e gli autovettori sono ortogonali (cfr. gli esercizi 39 e 41 del capitolo 1); per ogni vettore x si ha $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, con $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard. Si ha

$$Av = A \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n x_i Av_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i,$$

così che (cfr. la definizione 3.1 di norma uniforme)

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} \sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2} \leq \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|.$$

Poiché inoltre $|Av_i| = |\lambda_i v_i| = |\lambda_i|$, concludiamo che si ha $\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$. Si verifica immediatamente che la matrice simmetrica $\mathbb{1} + A$ ha autovalori $1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n$ e gli stessi autovettori v_1, \dots, v_n di A . Si ha

$$\det(\mathbb{1} + A) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq (1 - \|A\|)^n,$$

quindi, poiché $\|A\| < 1$ per ipotesi, la matrice $\mathbb{1} + A$ è invertibile. La matrice inversa $(\mathbb{1} + A)^{-1}$ è ancora una matrice simmetrica (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 4), i cui autovettori sono sempre v_1, \dots, v_n , mentre gli autovalori associati sono $(1 + \lambda_1)^{-1}, \dots, (1 + \lambda_n)^{-1}$ (cfr. l'esercizio 9). Ragionando come prime si trova

$$\|(\mathbb{1} + A)^{-1}\| = \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{1 + \lambda_i} \leq \frac{1}{1 - \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|} \leq \frac{1}{1 - \|A\|},$$

che completa la dimostrazione dell'asserto.]

Esercizio 11 Si dimostri la stima (89.33). [Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J'^2} \right)^{-1} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial J'^2} (\mathcal{H}_0 + V_{0,0}) \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \left(\mathbb{1} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbb{1} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

dove si può stimare

$$\left\| \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right\| \leq \frac{2\varepsilon_0 n}{\rho_0},$$

utilizzando la (89.7a) e il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 2). Quindi si ottiene

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J'^2} \right)^{-1} \right\| \leq \left(1 - \eta_0 \frac{2\varepsilon_0 n}{\rho_0} \right)^{-1} \eta_0 \leq \left(1 + \frac{4n\varepsilon_0 \eta_0}{\rho_0} \right) \eta_0,$$

dove si è usato l'esercizio 10 e il fatto che $1/(1-x) \leq 1+2x$ per $x \in [0, 1/2]$.

Esercizio 12 Sia $P_k(z)$ il polinomio di Taylor di ordine k di una funzione $f(z)$ in un intorno di z_0 (cfr. l'esercizio 29 del capitolo 1). Si dimostri la *forma integrale del resto di Taylor*:

$$R_k(z) := f(z) - P_k(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k!} \int_0^1 dt (1-t)^k f^{(k+1)}(z_0 + t(z - z_0)),$$

dove $f^{(k+1)}$ è la derivata di ordine $k+1$ di f . [Soluzione. Operiamo il cambiamento di variabili $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$; dobbiamo dimostrare che

$$R_k(z) = \frac{1}{k!} \int_{z_0}^z d\zeta (z - \zeta)^k f^{(k+1)}(\zeta).$$

La dimostrazione si può fare per induzione. La formula è soddisfatta per $k=0$ poiché

$$R_0(z) = f(z) - P_0(z) = f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z d\zeta f'(\zeta).$$

Assumiamo che si abbia

$$R_{k-1}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^z d\zeta (z - \zeta)^{k-1} f^{(k)}(\zeta)$$

e dimostriamo che la formula è allora valida anche per k . Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \int_{z_0}^z d\zeta (z - \zeta)^k f^{(k+1)}(\zeta) &= \frac{1}{k!} (z - \zeta)^k f^{(k)}(\zeta) \Big|_{z_0}^z + \frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^z d\zeta (z - \zeta)^{k-1} f^{(k)}(\zeta) \\ &= -\frac{1}{k!} (z - z_0)^k f^{(k)}(z_0) + R_{k-1}(z) \\ &= -\frac{1}{k!} (z - z_0)^k f^{(k)}(z_0) + f(z) - P_{k-1}(z) \\ &= f(z) - \left(P_{k-1}(z) + \frac{1}{k!} (z - z_0)^k f^{(k)}(z_0) \right) \\ &= f(z) - P_k(z) = R_k(z), \end{aligned}$$

dove si è usata l'ipotesi induttiva per $R_{k-1}(z)$.

Esercizio 13 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+1} ; si scriva $f(x) = P_k(x) + R_n(x)$, dove $P_n(x)$ e $R_k(x)$ sono il polinomio di Taylor di ordine k e di centro x_0 e il resto di Taylor ordine k , rispettivamente (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3). Si dimostri che vale la seguente formula per il resto

di Taylor (*forma integrale del resto di Taylor*):

$$\begin{aligned}
 R_k(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{1}{k!} \int_0^1 dt (1-t)^k \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}} (x_0 + t(x-x_0)) \prod_{j=1}^{k+1} (x_j - x_{0j}) \\
 &= \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + \dots + a_n = k+1}} \frac{k+1}{a_1! \dots a_n!} \int_0^1 dt (1-t)^k \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} (x_0 + t(x-x_0)) \prod_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^{a_j}.
 \end{aligned}$$

[*Suggerimento.* Si definisca $\Psi(t) := f(x_0 + t(x-x_0))$, così che $f(x) - f(x_0) = \Psi(1)$, e si proceda come nell'esercizio 12 per la funzione di una variabile $\Psi(t)$ (si tenga anche conto dell'esercizio 2 del capitolo 3 per esprimere le derivate della funzione Ψ in termini delle derivate della funzione f).]

Esercizio 14 Si dimostrino le stime (89.34). [*Suggerimento.* L'esercizio 13 consente di scrivere a_1 e b_1 come resti di Taylor di ordine 2 e 1, rispettivamente. Per dedurre la stima (89.34a) si usa il fatto che, in $\bar{D}_{1,3}$,

$$\sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial^2}{\partial J'_i \partial J'_k} \mathcal{H}_0(J' + t\Xi_1) \Xi_{1,i} \Xi_{1,k} \right| \leq \frac{E_0}{\rho_0/2} \left(\sum_{i=1}^n |\Xi_{1,i}| \right)^2 \leq \frac{2E_0}{\rho_0} n \sum_{i=1}^n \Xi_{1,i}^2 = \frac{2E_0}{\rho_0} n |\Xi_1|^2.$$

Analogamente, per $(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}$, si ha, usando la seconda stima in (89.15) e il fatto che $\bar{D}_{1,3} \subset \bar{D}_0$,

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial J'_i} V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + t\Xi_1) \Xi_{1,i} \right| \leq \frac{B_3 \varepsilon_0}{\delta_0^n} \sum_{i=1}^n |\Xi_{1,i}| \leq \frac{B_3 \varepsilon_0}{\delta_0^n} \sqrt{n} |\Xi_1|.$$

Infine $V^{>N_0}$ si stima come a pag. 467 all'interno di \bar{D}_0 (e quindi anche all'interno di $\bar{D}_{1,3}$), così che, tenuto conto che $2B_2\varepsilon_0\delta_0^{-n}e^{-\delta_0 N_0/2} \leq C_0\varepsilon_0^2$ (si confrontino le (89.14) con la (89.17)), si trova

$$|V^{>N_0}(\varphi, J)| \leq \frac{B_1}{2B_2} \delta_0 \rho_0 C_0 \varepsilon_0^2.$$

Scegliendo in modo opportuno la costante B_7 si ottengono le (89.34).]

Esercizio 15 Si deduca la stima (89.35) dalle (89.34). [*Soluzione.* Utilizzando la stima (89.27b) per la funzione Ξ_1 in (89.35), si vede che il termine più grande in (89.30) è a_1 . La stima (89.34a), tenendo conto anche della stima (89.20) e della seconda delle (89.26), dà allora

$$|V_1(\varphi', J')| \leq 3B_7 \frac{E_0}{\rho_0} (B_5 \bar{\rho}_1 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau} E_0 N_0^{\tau+1})^2 \leq \frac{3B_7 B_5^2}{16n^2} \rho_0 (C_0 \varepsilon_0)^2 E_0 \delta_0^{-2\tau-2n},$$

dove si è usata l'espressione (89.12) di $\bar{\rho}_1$. Da qui segue immediatamente la (89.35).]

Esercizio 16 Si dimostri la stima (89.39). [*Suggerimento.* Possiamo stimare

$$\left| \int_0^1 dt \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_{0,i}}{\partial J_j \partial J_k} (J_0 + t(J - J_0)) (J_j - J_{0,j}) (J_k - J_{0,k}) \right| \leq \frac{4E_0}{\rho_0^2} \left(\sum_{k=1}^n |J_k - J_{0,k}| \right)^2 \leq \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2,$$

e usare il fatto che $|F_1| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |F_{1,i}|$.]

Esercizio 17 Si dimostri che l'equazione (89.37) si può risolvere applicando il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Si riscriva la (89.38) nella forma $J_1 - J_0 + \mu F_1(J_1, J_0) = 0$ e si consideri la funzione

$$\bar{F}(J_1, \mu) := J_1 - J_0 + \mu F_1(J_1, J_0),$$

dove J_1 è visto come un parametro fissato. Si ha $\bar{F}(J_0, 0) = 0$ e

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial J_1}(J_1, \mu) := \mathbb{1} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial J_1}(J_1, J_0).$$

Se si sceglie ρ in accordo con la (89.41), in modo che valgano le (89.40) possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che per ogni μ vicino a zero esiste $J_1 = J_1(\mu)$ tale che $\bar{F}(J_1(\mu), \mu) = 0$. Poiché F_1 è di ordine ε_0 , prendendo ε_0 sufficientemente piccolo si può fissare $\mu = 1$.]

Esercizio 18 Si dimostrino le (89.54). [*Suggerimento.* Per ε_0 sufficientemente piccolo, il limite per $n \rightarrow \infty$ della somma in (89.53b) è minore di E_0 . Per $n \rightarrow \infty$ il prodotto in (89.53d) diventa un prodotto infinito, che converge se e solo se converge la serie (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 19)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k 4 \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right)^{-1} = 4 \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

La serie converge banalmente, quindi anche il prodotto infinito ammette limite positivo. Poiché, per ogni successione $\{a_n\}$ a termini positivi, si ha

$$\prod_{k=0}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=0}^n a_n,$$

come si verifica facilmente per induzione su n (cfr. anche la soluzione dell'esercizio 11 del capitolo 19), il limite di ξ_n è maggiore di $\xi_0/2$, purché ε_0 sia sufficientemente piccolo.]

Esercizio 19 Si dimostri la (89.55). [*Soluzione.* Le (89.53a) e (89.53e) danno

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_n}{\rho_n^a} &\leq \frac{C_0^{-1} (C_0 \varepsilon_{n-1})^{3/2}}{\rho_{n-1}^a} \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_{n-1}}\right)^{2a(\tau+2)} \\ &\leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{\rho_{n-1}^a} (C_0 \varepsilon_{n-1})^{1/2} \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_{n-1}}\right)^{2a(\tau+2)} \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{\rho_{n-1}^a} A (C_0 \varepsilon_{n-1})^{1/4}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $x^{1/2}(\log x)^{2a} \leq A(a) x^{1/4}$, per un'opportuna costante $A(a)$, e posto $A := A(2a(\tau+2))$. Iterando si trova quindi

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_n}{\rho_n^a} &\leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \prod_{k=0}^{n-1} (C_0 \varepsilon_k)^{1/4} \leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \prod_{k=0}^{n-1} (C_0 \varepsilon_0)^{(3/2)^k/4} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k\right) \leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)\right), \end{aligned}$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$ indipendentemente dal valore di a .]

Esercizio 20 Si dimostri che se la serie a termini positivi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge ad $a < 1/2$, allora si ha

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k) \leq 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

e se ne deduca la (89.56). [*Suggerimento.* Si dimostra induttivamente su n che

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + a_k) \leq 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Per $n = 1$ la diseuguaglianza è ovviamente soddisfatta; se è soddisfatta per $n - 1$ si ha

$$\prod_{k=0}^n (1 + a_k) = (1 + a_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + a_k) \leq 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n + 2a_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k + 2a_n,$$

da cui segue l'asserto. Per dimostrare la (89.56) definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione

$$a_k^{(n)} := \begin{cases} 4\eta_k n \varepsilon_k / \rho_k, & k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Possiamo applicare il risultato appena dimostrato e concludere, ragionando sempre per induzione, che, per ε_0 sufficientemente piccolo, si ha $\eta_n \leq 2\eta_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, per $n = 1$, la diseuguaglianza è banale; assumendo che essa valga fino a $n - 1$, si ha allora

$$\eta_n = \eta_0 \prod_{k=1}^n (1 + a_k^{(n)}) \leq \eta_0 \left(1 + \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \right) \leq \eta_0 \left(1 + \sum_{k=0}^n 8\eta_0 \varepsilon_k \rho_k^{-1} \right) \leq 2\eta_0,$$

dove si è tenuto conto della (89.55).]

Esercizio 21 Si dimostrino le stime (89.58). [*Suggerimento.* Si ha $\mathcal{H}_n(J') = \mathcal{H}_{n-1}(J') + V_{n-1,0}(J')$, dove $V_{n-1,0}(J)$ è la media sul toro \mathbb{T}^n della funzione $V_{n-1}(\varphi, J)$; cfr. la (89.29) per $n = 1$). Le funzioni \mathcal{H}_{n-1} e V_{n-1} sono analitiche in D_{n-1} , quindi le loro derivate seconde rispetto a J' si possono stimare in D_n con i massimi delle derivate prime in D_{n-1} (che a loro volta si stimano con le rispettive norme $\|\mathcal{H}_{n-1}\|_{n-1}$ e $\|V_{n-1}\|_{n-1}$), divisi per $\rho_{n-1}/2$. La derivata prima di V_n rispetto a J' si stima semplicemente con la norma $\|V_n\|_n$.]

Esercizio 22 Si fornisca un esempio esplicito di funzione $\chi(x)$ che sia C^∞ a supporto compatto in \mathbb{R} , che verifichi la condizione (91.1) e che abbia derivata non positiva per $x > 0$. [*Suggerimento.* La funzione (cfr. la figura 20.10)

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è C^∞ ; infatti si verifica facilmente che $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. La funzione è crescente per $x > 0$ (si ha $f'(x) = f(x)/x^2 > 0$ per $x > 0$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$

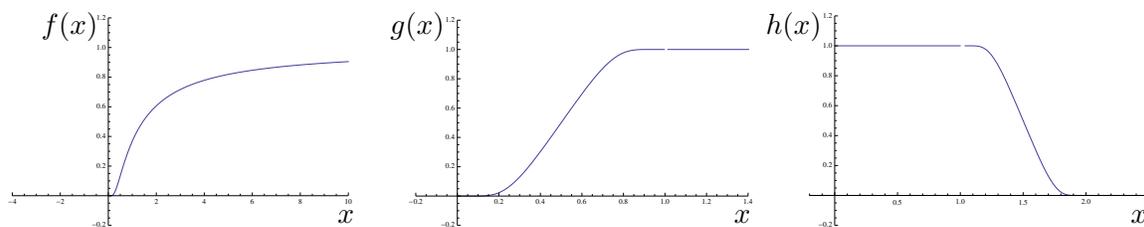


Figura 20.10: Grafici delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ dell'esercizio 22.

Si vede facilmente che la funzione è ben definita (e quindi C^∞ in quanto composizione di funzioni C^∞), poiché $f(1-x) > 0$ se $f(x) = 0$ e viceversa, così che il denominatore è sempre positivo. Inoltre $g(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $g(x) = f(x)/f(x) = 1$ per $x \geq 1$. Poiché

$$g'(x) = \frac{f'(x)(f(x) + f(x-1)) - f(x)(f'(x) + f'(1-x))}{(f(x) + f(1-x))^2} = \frac{f'(x)f(x-1) - f(x)f'(1-x)}{(f(x) + f(1-x))^2},$$

dove

$$f'(x) = \begin{cases} f(x)/x^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f'(1-x) = \begin{cases} -f(1-x)/(1-x)^2, & x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

la funzione $g(x)$ è crescente in $[0, 1]$ (cfr. la figura 20.10). La funzione $h(x) = g(x-1)$ è quindi una funzione C^∞ tale che $h(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $h(x) = 1$ per $x \geq 2$ (cfr. la figura 20.10). Se definiamo $\chi(x) = h(|x|)$ troviamo quindi una funzione $\chi(x)$ che verifica le proprietà richieste.]

Esercizio 23 Si dimostri che le funzioni χ_n definite in (91.2) sono tali che

- per ogni $x \neq 0$ esiste n tale che $\chi_m(x) \neq 0$ solo per $m = n$ o $m = n + 1$,
- vale la (91.3)

[*Soluzione.* Per ogni $m \geq 1$ la funzione $\chi_m(x)$ ha supporto in $[2^{-m}, 2^{-m+2}]$. Se $|x| \in (0, 2)$, sia $n_0 \geq 1$ tale che $2^{-n_0+1} \leq |x| < 2^{-n_0+2}$. Si ha allora $\chi_{n_0}(x) \neq 0$, $\chi_{n_0+1}(x) \neq 0$, mentre $\chi_m(x) = 0$ per ogni altro valore di m . Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{n_0+2} \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{n_0+2} (\chi(2^{n-1}x) - \chi(2^n x)) = \chi(2^{n_0+2}x) = 1,$$

poiché $\chi(2^{n_0+2}x) = 1$ per $|x| > 2^{-n_0+1}$. Se invece $|x| \geq 2$ allora $\chi_m(x) \neq 0$ solo per $m = 0$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = \chi_0(x) = 1,$$

poiché $\chi_0(x) = 1$ per $|x| \geq 2$.]

Esercizio 24 Si dimostri la (91.6) e si determini la costante K_0 . [*Suggerimento.* Per $p = 0$ la stima (91.6) è soddisfatta purché $K_0 \geq 1$. Per $p = 1$ si trova che vale la stima se si sceglie $K_0 \geq R_\ell + K_1$. Infine per $p = 2$ occorre $K_0 \geq K_2 + 2R_\ell K_1 + R_\ell(R_\ell + 1)$. Poiché $R_\ell \leq 2$ si può prendere $K_0 = 11K$.

Esercizio 25 Si dimostri che i valori localizzati in (91.36) si cancellano quando si somma su tutte le risonanze. [*Suggerimento.* Quando si considera il valore localizzato di una risonanza T' , per ogni ramo $\ell \in L(T')$ il momento interpolato $\nu_\ell(t_T)$ è sostituito da ν_ℓ^0 , quindi il valore localizzato di T' non cambia se il momento del ramo entrante di T' è $\nu_{\ell_2'}(t_T)$ invece di $\nu_{\ell_2'}$.]

Esercizio 26 Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *funzione di prova* se è di classe C^∞ e ha supporto compatto. Indichiamo con $D(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni di prova. Una *distribuzione* è un operatore lineare $T : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. La *delta di Dirac* è la distribuzione δ definita da

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x) := f(0).$$

Si dimostri che formalmente la delta di Dirac è definita come la derivata della *funzione di Heaviside*, i.e. della funzione

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Sia f una funzione di prova. Se poniamo formalmente $\delta(x) = H'(x)$, si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) H'(x) = f(x) H(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx f'(x) H(x) \\ &= - \int_0^{+\infty} dx f'(x) = -f(x) \Big|_0^{+\infty} = f(0), \end{aligned}$$

dove si è usato che la funzione $f(x)$ si annulla all'infinito.]

Esercizio 27 Si dimostri che la delta di Dirac definita nell'esercizio 26 soddisfa formalmente le proprietà (91.39). [*Soluzione.* Sia f una funzione a supporto compatto che valga identicamente 1 per $|x| \leq r$, per qualche $r > 1$. Si ha

$$1 = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x) = \int_{-r}^r dx f(x) \delta(x) = \int_{-r}^r dx \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x),$$

poiché $\delta(x) = H'(x) = 0$ per $x \neq 0$.]

Esercizio 28 Si considerino le funzioni

$$a(x, \varepsilon) := \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon/2, \\ 1/\varepsilon, & |x| < \varepsilon/2, \end{cases}, \quad b(x, \varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon}, \quad c(x, \varepsilon) := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Si dimostri che formalmente si ha

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(x, \varepsilon),$$

dove $\delta(x)$ è la delta di Dirac definita nell'esercizio 26. Ciascuna delle funzioni $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$ e $c(x, \varepsilon)$ costituisce un esempio di *delta di Dirac approssimata*.

Esercizio 29 Si dimostri che se sommiamo i valori di tutti gli alberi in cui il valore di una risonanza sia sostituito dal suo valore localizzato otteniamo zero. [*Suggerimento.* Il valore localizzato di una risonanza si ottiene sostituendo al momento $\nu_\ell(\underline{t})$ di ogni ramo $\ell \in L(\mathcal{P}_T)$ il valore ν_ℓ^0 , i.e. il valore che si ottiene da $\nu_\ell(\underline{t})$ ponendo $t_{T'} = 0$ per ogni $T' \in \mathfrak{C}(T)$. Quindi si applica l'analisi delle cancellazioni effettuata nel §91.2, in particolare il corollario 91.31.

Esercizio 30 Si dimostri la (91.42).

Esercizio 31