§92 Conclusioni

Per quanto il teorema KAM rappresenti uno dei risultati fondamentali del '900 nell'ambito dei sistemi dinamici, non è altrettanto ovvio quale sia la sua rilevanza in sistemi concreti, quali per esempio il modello di Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou discusso all'inizio del §89 o il sistema solare, anche solo nell'approssimazione considerata nell'esempio 84.2.

Riguardo al modello Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, abbiamo già accenato a pag. 462 che non rendono immediata l'applicazione del teorema. Innanzitutto, il sistema imperturbato non soddisfa la condizione di non degenerazione di Kolmogorov. Tale condizione in realtà si può indebolire, ma non al punto da includere i sistemi isocroni. Tuttavia, nel caso di sistemi isocroni perturbati, si può effettuare una prima trasformazione canonica che modifichi l'hamiltoniana libera di ordine ε e sposti la perturbazione a ordine piuù alto (cfr. la teoria perturbativa al primo ordine discussa nel §84). Può allora succedere che le correzioni del primo ordine rimuovano l'isocronia del sistema e la nuova hamiltoniana imperturbata soddisfi una condizione della forma 89.7c con η_0 di ordine ε. Poiché ora la perturbazione è di ordine più alto, la costruzione iterativa utilizzata per la dimostrazione del teorema nel §84 può ancora funzionare. Il problema diventa quindi quello tecnico (ma non per questo banale) di accertarsi che che la nuova hamiltoniana imperturbata sia non degenere. Questo è stato fatto esplicitamente nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam (cfr. la nota bibliografica).

Più serio è il problema legato ai valori del parametro perturbativo per i quali si possa applicarei il teorem KAM. Tenuto conto che l'esponente diofanteo τ dipende dalla dal numero di gradi di libertà n (si deve avere $\tau > n - 1$), un'analisi delle stime discusse nel §84 mostra che $\varepsilon_0 \to 0$ per $n \to \infty$: in particolare più grande è il numero N di oscillatori accoppiati, più piccoli devono essere i valori dei parametri α e β per poter applicare il teorema KAM. Il valore di N utilizzato nell'esperimento numerico originario del 1953, pur non essendo particolarmente elevato, rende improbabile, o se non altro problematica, una banale applicazione del teorema senza ulteriori argomenti, tanto più che, in lavori successivi, anche molto recenti, in cui, potendo contare su computer molto più efficienti e veloci, sono state effettuate simulazioni per valori di N molto più grandi, si è visto che risultati analoghi si trovano indipendentemente dal valore di N.

Una possibile spiegazione potrebbe quindi essere che, nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam, il valore di ε per cui si ha la sopravvivenza della maggior parte dei tori non va a zero con la dimensione del sistema, per esempio a causa del fatto che l'interazione è solo a primi vicini. Tuttavia come rendere costruttivo un argomento di questo tipo non è semplice. Si è anche cercato di dimostrare, più o meno rigorosamente, che il modello di Fermi-Pasta-Ulam rappresenta una perturbazione di un diverso sistema integrabile, ottenuto dal modello stesso nel limite $N \to \infty$; si ottiene in questo modo un'equazione alle derivate parziali, che, sotto ulteriori approssimazioni, si riduce alla cosiddetta *equazione di Korteweg-de Vries* (o *KdV*), che costituisce appunto un sistema integrabile a infiniti gradi di libertà. Rimangono comunque problemi aperti, legati essenzialmente al fatto che il sistema infinito ottenuto come limite descrive solo approssimativamente il sistema finito.

Un'altra possibile spiegazione nasce dalla considerazione che, come mostra il teorema di Nechorošev (cfr. il teorema 85.2, anche se il sistema perturbato non è più integrabile, i moti comunque appaiono quasi-periodici su tempi esponenzialmente lunghi. Quindi, solo apparentemente, i moti sono regolari e tali appaiono semplicemente perché i tempi di osservazione non sono sufficientemente lunghi da vedere manifestarsi gli effetti della nonlinearità. Si viene quindi a creare uno *stato metastabile*, ovvero uno stato di non equilibrio su scale di tempi intermedie in cui i moti sono regolari, mentre su scale di tempi più lunghi, il sistema evolve verso la termalizzazione. La scala dei tempi di metastabilità, sulla base di simulazioni numeriche, risulta legata al valore dell'energia media per oscillatore.

In ultima analisi, una risposta al paradosso di Fermi-Pasta-Ulam deve tener conto di entrambi gli aspetti: probabilmente quello che si osserva negli esperimenti numerici è uno stato metastabile di un sistema che si sta muovendo molto lentamente verso la termalizzazione, e la lentezza con cui viene raggiunta l'equidistribuzione dell'energia è legata alla particolare struttura dell'hamiltoniana, che rende la teoria perturbativa efficace su tempi molto più lunghi di quelli tipici della teoria KAM. In ogni caso, una soluzione definitiva del problema è ancora lontana e il modello di Fermi-Pasta-Ulam continua a essere largamente studiato sia analiticamente che numericamente.

Anche nel caso del sistema solare, non è facile valutate il teorema KAM permette di concludere che i moti sono quasi-periodici e quindi stabili. In primo luogo il sistema hamiltoniano introdotto nell'esempio 84.2 costituisce una forte approssimazione della realtà: oltre al fatto che i pianeti sono descritti da corpi puntiformi, prescindendo dallo loro struttura interna, si trascurano inoltre i satelliti, gli asteroidi e qualsiasi altro corpo celeste. Inoltre, anche l'hamiltoniana imperturbata (84.12a), come nel caso del modello di Fermi-Pasta-Ulam, non soddisfa la condizione di non degenerazione di Kolmogorov. Di nuovo, con alcune ulteriori ipotesi semplificatrici sul sistema, si riesce a dimostrare che un primo passo di teoriua perturbativa rimuove la degenerazione, però, anche qui di nuovo, il principale ostacolo che si incontra nell'applicare il teorema KAM risiede nel valore del parametro perturbativo: il valore di ε dato dai parametri fisici è all'interno dell'intervallo di valori per cui vale il teorema?

Una serie di esperimenti numerici condotti da Laskar, a partire dal 1989 fino ai più recenti nel 2004-2009, suggeriscono che il sistema solare sia caotico. Anche in questo caso, quindi, la regolarità dei moti è solo apparente, dovuta essenzialmente alla durata relativamente breve dei tempi di osservazione, mentre, su archi temporali più lunghi, i primi effetti di caoticità iniziano a manifestarsi. Per esempio, l'integrazione numerica delle equazioni del moto mostra che un errore sulla posizione della Terra di poco più di una decina di metri rende impossibile prevedere la sua posizione dopo qualche centinaia di milioni di anni; analogamente, una differenza di qualche metro nella posizione iniziale di Mercurio può avere effetti catastrofici nella sua evoluzione, fino ad arrivare a una collisione con l'orbita di Venere o alla caduta sul

Sole. Ovviamente, a causa della complessità computazionale e dei tempi molto lunghi delle integrazioni numeriche, di fatto, le simulazioni sono effettuate con equazioni mediate, e quindi con ulteriori approssimazioni; ci ci aspetta in ogni caso che, essendo il sistema di equazioni originario più complicato, gli effetti caotici dovrebbero essere accentuati e non ridotti se si rimuovessero tutte le approssimazioni e si studiassero le equazioni del moto complete.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito [Gallavotti-2] per il §89. La discussione delle convergenza della serie di Lindstedt segue [Gentile & Mastropietro, Gentile]. Per il problema di Siegel menzionato a pag. 462 si veda per esempio [Siegel]. Per un'introduzione al contesto storico e alle problematiche in cui si inserisce il teorema KAM, si veda [Scott-Dumas].

La dimostrazione che l'hamiltoniana del modello di Fermi-Pasta-Ulam può essere portata in una forma in cui sia soddisfatta la condizione di non-degenerazione di Kolmogorov può essere trovata in [Rink]; per il legame del modello di Fermi-Pasta-Ulam e dell'equazione Korteweg-De Vries (KdV) si vedano [Zabusky & Kruskal] e, per risultati più recenti, [Bambusi & Ponno]; più in generale, per un lavoro di rassegna sul modello di fermi-Pasta-Ulam, rimandiamo a [Gallavotti-3].

Per la discussione della stabilità del sistema solare e il suo legame con il teorema KAM, si veda per esempio [Laskar & Gastineau] e i lavori precedenti ivi citati.

Esercizi

Esercizio 1 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$q_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i \sin\Big(\frac{ik\pi}{N}\Big), \qquad p_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sin\Big(\frac{ik\pi}{N}\Big), \qquad k = 1, \dots, N-1,$$

diagonalizza la (89.1) portandola nella forma (89.2) e si trovi l'espressione esplicita delle frequenze proprie $\omega_1, \dots, \omega_N$. [*Suggerimento.* Per verifica diretta. Si trova $\omega_k = 2\sin(k\pi/2N)$.]

Esercizio 2 Si dimostri la stima (89.11). [*Soluzione.* Sia $A_{ij} := [\partial\omega_{0i}/\partial J_j](J) = [\partial^2\mathcal{H}_0/\partial J_i \partial J_j](J)$. Si ha, tenendo conto anche dell'esercizio 4 del capitolo 19),

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{|x|=1} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \Big)^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big)^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big)^2 \\ &\le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2 n^2 |x|^2 \le n^2 \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|^2, \end{aligned}$$

dove possiamo stimare, utilizzando il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 19),

$$\max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}| = \max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial J_j}(J) \right| \le \frac{E_0}{\rho_0/2},$$

purché $\rho \le \rho_0/2$.]