Sole. Ovviamente, a causa della complessità computazionale e dei tempi molto lunghi delle integrazioni numeriche, di fatto, le simulazioni sono effettuate con equazioni mediate, e quindi con ulteriori approssimazioni; ci ci aspetta in ogni caso che, essendo il sistema di equazioni originario più complicato, gli effetti caotici dovrebbero essere accentuati e non ridotti se si rimuovessero tutte le approssimazioni e si studiassero le equazioni del moto complete.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito [Gallavotti-2] per il §89. La discussione delle convergenza della serie di Lindstedt segue [Gentile & Mastropietro, Gentile]. Per il problema di Siegel menzionato a pag. 462 si veda per esempio [Siegel]. Per un'introduzione al contesto storico e alle problematiche in cui si inserisce il teorema KAM, si veda [Scott-Dumas].

La dimostrazione che l'hamiltoniana del modello di Fermi-Pasta-Ulam può essere portata in una forma in cui sia soddisfatta la condizione di non-degenerazione di Kolmogorov può essere trovata in [Rink]; per il legame del modello di Fermi-Pasta-Ulam e dell'equazione Korteweg-De Vries (KdV) si vedano [Zabusky & Kruskal] e, per risultati più recenti, [Bambusi & Ponno]; più in generale, per un lavoro di rassegna sul modello di fermi-Pasta-Ulam, rimandiamo a [Gallavotti-3].

Per la discussione della stabilità del sistema solare e il suo legame con il teorema KAM, si veda per esempio [Laskar & Gastineau] e i lavori precedenti ivi citati.

Esercizi

Esercizio 1 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$q_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} Q_i \sin\Big(\frac{ik\pi}{N}\Big), \qquad p_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sin\Big(\frac{ik\pi}{N}\Big), \qquad k = 1, \ldots, N-1,$$

diagonalizza la (89.1) portandola nella forma (89.2) e si trovi l'espressione esplicita delle frequenze proprie $\omega_1, \ldots, \omega_N$. [*Suggerimento.* Per verifica diretta. Si trova $\omega_k = 2\sin(k\pi/2N)$.]

Esercizio 2 Si dimostri la stima (89.11). [*Soluzione.* Sia $A_{ij} := [\partial \omega_{0i}/\partial J_j](J) = [\partial^2 \mathcal{H}_0/\partial J_i \partial J_j](J)$. Si ha, tenendo conto anche dell'esercizio 4 del capitolo 19),

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{|x|=1} \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \Big)^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|^2 \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n |x_j| \Big)^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|^2 n \Big(\sum_{j=1}^n |x_j| \Big)^2 \\ &\le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|^2 n^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \le \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|^2 n^2 |x|^2 \le n^2 \max_{|x|=1} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|^2, \end{aligned}$$

dove possiamo stimare, utilizzando il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 19),

$$\max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}| = \max_{J_0 \in B_\rho(J_0)} \max_{i,j=1,\ldots,n} \left| \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial J_j}(J) \right| \le \frac{E_0}{\rho_0/2},$$

purché $\rho \le \rho_0/2$.]

Esercizio 3 Si dimostri la stima (89.14). [*Suggerimento.* Si stimano le derivate di $V^{>N_0}$ rispetto a φ e J come in (89.13) tenendo conto che per il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 19) ogni derivata comporta un ulteriore fattore $1/\delta$.]

Esercizio 4 Si dimostri la stima (89.15). [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 3, tenendo conto che, rispetto a $V^{>N_0}$, quando stimiamo il massimo della funzione $V^{\le N_0}$ non otteniamo il fattore di decadimento esponenziale $\mathrm{e}^{-\delta_0 N_0/2}$.]

Esercizio 5 Si dimostri che la stima (89.19) implica la stima (89.16). [*Soluzione.* Se δ_0 è fissato in accordo con la (89.18), la (89.16) diventa

$$N_0 \ge \frac{2}{\xi_0}\left(\log\frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right)\log\left(\frac{2B_2}{C_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\xi_0}\log\frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right)^n\right).$$

Se scriviamo $x = 1/C_0\varepsilon_0$, se x è sufficientemente grande possiamo maggiorare

$$\log\left(2B_2 x\left(\frac{\log x}{\xi_0}\right)^n\right) \le \log\left(2\bar{B}_2\xi_0^{-n}b_1x^2\right) \le \frac{b_2}{\xi_0}\log x,$$

per opportune costanti positive b_1 e b_2, e scegliere quindi N_0 in modo da soddisfare la diseguaglianza

$$N_0 \ge \frac{b_2}{\xi_0^2}\left(\log x\right)^2,$$

da cui segue la (89.16) con $B_0 = \bar{b}_2$.]

Esercizio 6 Si dimostrino le stime (89.20) e (89.21). [*Suggerimento.* Si ragiona in modo analogo a quanto fatto nell'esercizio 3, utilizzando la stima (89.20) sulla funzione $W_0(\varphi, J')$ nel dominio $\bar{D}_{1,1}$ e il teorema di Cauchy sia per le derivate prime che per le derivate seconde.]

Esercizio 7 Si dimostri che l'equazione (89.22) si può risolvere applicando il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Si riscriva la (89.22) nella forma $\bar{G}(\varphi,\mu) = 0$, con

$$\bar{G}(\varphi,\mu) := \varphi - \varphi' + \mu\frac{\partial W_0}{\partial J'}(\varphi, J'),$$

dove $\mu = 1$ e (φ', J') sono visti come parametri fissati. Si ha $\bar{G}(\varphi', 0) = 0$ e

$$\frac{\partial\bar{G}}{\partial\varphi}(\varphi,\mu) := \mathbb{1} + \mu\frac{\partial^2 W_0}{\partial\varphi\partial J'}(\varphi,\mu).$$

Possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che per ogni μ vicino a zero esiste $\varphi = \bar{\varphi}(\mu)$ tale che $\bar{G}(\bar{\varphi}(\mu),\mu) = 0$. Poiché W_0 è di ordine ε_0, per ε_0 sufficientemente piccolo, si può fissare $\mu = 1$, e si trova quindi $\varphi = \bar{\varphi}(1)$ dato dalla (89.24).]

Esercizio 8 Si stimino le derivate delle funzioni Δ_1 e Ξ_1 in (89.28) nel dominio $\bar{D}_1$. [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 2. Si trova

$$\max_{(\varphi',J')\in\bar{D}_1}\left|\frac{\partial^r\partial^s}{\partial J_1^{r_1}\ldots\partial J_n^{r_n}\partial\varphi_1^{s_1}\ldots\partial\varphi_n^{s_n}}\Delta_1\right| \le B_6 C_0^2\varepsilon_0\delta_0^{-n-\tau-r-s}\bar{\rho}_1^{-r}E_0N_0^{\tau+1},$$

dove $r = r_1 + \ldots + r_n$ e $s = s_1 + \ldots + s_n$. Stime analoghe valgono per le derivate di Ξ_1, con un fattore $\bar{\rho}_1$ in più (cfr. le (89.27)).]

Esercizio 9 Sia A una matrice simmetrica invertibile con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e autovettori $v_1, \ldots, v_n$. Si dimostri che la sua inversa A^{-1} ha autovalori $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$ e autovettori $v_1, \ldots, v_n$. [*Soluzione.* Si ha $Av_i = \lambda_i v_i$ per $i = 1, \ldots, n$; moltiplicando a sinistra per A ambo i membri, si ottiene

$$v_i = A^{-1}Av_i = A^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_i A^{-1} v_i \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}v_i = \lambda_i^{-1} v_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

da cui si evince che gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A e che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, il vettore v_i è l'autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda_i$.]

Esercizio 10 Sia A una matrice simmetrica tale che $\|A\| \le 1$. Si dimostri che $\mathbb{1} + A$ è invertibile e che $\|(\mathbb{1} + A)^{-1}\| \le 1/(1 - \|A\|)$. [*Soluzione.* Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A e $v_1, \ldots, v_n$ i corrispondenti autovettori normalizzati. Poiché A è simmetrica, gli autovalori sono reali e gli autovettori sono ortogonali (cfr. gli esercizi 39 e 41 del capitolo 1); per ogni vettore x si ha $x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, con $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard. Si ha

$$Av = A \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n x_i A v_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i,$$

così che (cfr. la definizione 3.1 di norma uniforme)

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} \sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2} \le \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|.$$

Poiché inoltre $|Av_i| = |\lambda_i v_i| = |\lambda_i|$, concludiamo che si ha $\|A\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$. Si verifica immediatamente che la matrice simmetrica $\mathbb{1} + A$ ha autovalori $1 + \lambda_1, \ldots, 1 + \lambda_n$ e gli stessi autovettori $v_1, \ldots, v_n$ di A. Si ha

$$\det(\mathbb{1} + A) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \ge (1 - \|A\|)^n,$$

quindi, poiché $\|A\| < 1$ per ipotesi, la matrice $\mathbb{1} + A$ è invertbile. La matrice inversa $(\mathbb{1} + A)^{-1}$ è ancora una matrice simmetrica (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 4), i cui autovettori sono sempre $v_1, \ldots, v_n$, mentre gli autovalori associati sono $(1 + \lambda_1)^{-1}, \ldots, (1 + \lambda_n)^{-1}$ (cfr. l'esercizio 9). Ragionando come prime si trova

$$\|(\mathbb{1} + A)^{-1}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{1 + \lambda_i} \le \frac{1}{1 - \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|} \le \frac{1}{1 - \|A\|},$$

che completa la dimostrazione dell'asserto.]

Esercizio 11 Si dimostri la stima (89.33). [*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J'^2} \right)^{-1} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial J'^2} \left(\mathcal{H}_0 + V_{0,0} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \left(\mathbb{1} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbb{1} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial J'^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

dove si può stimare

$$\left\| \frac{\partial^2 V_{0,0}}{\partial J'^2} \right\| \le \frac{2\varepsilon_0 n}{\rho_0},$$

utilizzando la (89.7a) e il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 2). Quindi si ottiene

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial J'^2} \right)^{-1} \right\| \le \left(1 - \eta_0 \frac{2\varepsilon_0 n}{\rho_0} \right)^{-1} \eta_0 \le \left(1 + \frac{4n\varepsilon_0\eta_0}{\rho_0} \right) \eta_0,$$

dove si è usato l'esercizio 10 e il fatto che $1/(1-x) \le 1 + 2x$ per $x \in [0, 1/2]$.]

Esercizio 12 Sia $P_k(z)$ il polinomio di Taylor di ordine k di una funzione $f(z)$ in un intorno di z_0 (cfr. l'esercizio 29 del capitolo 1). Si dimostri la *forma integrale del resto di Taylor*:

$$R_k(z) := f(z) - P_k(z) = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k!} \int_0^1 \mathrm{d}t \, (1-t)^k \, f^{(k+1)}(z_0 + t(z-z_0)),$$

dove $f^{(k+1)}$ è la derivata di ordine $k+1$ di f. [*Soluzione.* Operiamo il cambiamento di variabili $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$; dobbiamo dimostrare che

$$R_k(z) = \frac{1}{k!} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta \, (z-\zeta)^k \, f^{(k+1)}(\zeta).$$

La dimostrazione si può fare per induzione. La formula è soddisfatta per $k = 0$ poiché

$$R_0(z) = f(z) - P_0(z) = f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta \, f'(\zeta).$$

Assumiamo che si abbia

$$R_{k-1}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta \, (z-\zeta)^{k-1} \, f^{(k)}(\zeta)$$

e dimostriamo che la formula è allora valida anche per k. Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta \, (z-\zeta)^k \, f^{(k+1)}(\zeta) &= \frac{1}{k!} (z-\zeta)^k \, f^{(k)}(\zeta) \Big|_{z_0}^{z} + \frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta \, (z-\zeta)^{k-1} \, f^{(k)}(\zeta) \\
&= -\frac{1}{k!} (z-z_0)^k \, f^{(k)}(z_0) + R_{k-1}(z) \\
&= -\frac{1}{k!} (z-z_0)^k \, f^{(k)}(z_0) + f(z) - P_{k-1}(z) \\
&= f(z) - \left(P_{k-1}(z) + \frac{1}{k!} (z-z_0)^k \, f^{(k)}(z_0) \right) \\
&= f(z) - P_k(z) = R_k(z),
\end{aligned}$$

dove si è usata l'ipotesi induttiva per $R_{k-1}(z)$.]

Esercizio 13 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+1}; si scriva $f(x) = P_k(x) + R_n(x)$, dove $P_n(x)$ e $R_k(x)$ sono il polinomio di Taylor di ordine k e di centro x_0 e il resto di Taylor ordine k, rispettivamente (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3). Si dimostri che vale la seguente formula per il resto di Taylor (*forma integrale del resto di Taylor*):

$$
\begin{aligned}
R_k(x) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=1}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 \mathrm{d}t\,(1-t)^k \, \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k+1}}} (x_0 + t(x-x_0)) \prod_{j=1}^{k+1} (x_j - x_{0j}) \\
&= \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \geq 0 \\ a_1+\ldots+a_n=k+1}} \frac{k+1}{a_1! \ldots a_n!} \int_0^1 \mathrm{d}t\,(1-t)^k \, \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} (x_0 + t(x-x_0)) \prod_{j=1}^{n} (x_j - x_{0j})^{a_j} .
\end{aligned}
$$

[*Suggerimento.* Si definisca $\Psi(t) := f(x_0 + t(x-x_0))$, così che $f(x) - f(x_0) = \Psi(1)$, e si proceda come nell'esercizio 12 per la funzione di una variabile $\Psi(t)$ (si tenga anche conto dell'esercizio 2 del capitolo 3 per esprimere le derivate della funzione Ψ in termini delle derivate della funzione f).]

Esercizio 14 Si dimostrino le stime (89.34). [*Suggerimento.* L'esercizio 13 consente di scrivere a_1 e b_1 come resti di Taylor di ordine 2 e 1, rispettivamente. Per dedurre la stima (89.34a) si usa il fatto che, in $\bar{D}_{1,3}$,

$$
\sum_{i,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2}{\partial J_i' \partial J_k'} \mathcal{H}_0(J' + t\Xi_1)\, \Xi_{1,i} \Xi_{1,k} \right| \leq \frac{E_0}{\rho_0/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\Xi_{1,i}| \Big)^2 \leq \frac{2E_0}{\rho_0} n \sum_{i,=1}^{n} \Xi_{1,i}^2 = \frac{2E_0}{\rho_0} n \, |\Xi_1|^2 .
$$

Analogamente, per $(\varphi', J') \in \bar{D}_{1,3}$, si ha, usando la seconda stima in (89.15) e il fatto che $\bar{D}_{1,3} \subset \tilde{D}_0$,

$$
\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial J_i'} V_0^{\leq N_0}(\varphi' + \Delta_1, J' + t\Xi_1)\, \Xi_{1,i} \right| \leq \frac{B_3 \varepsilon_0}{\delta_0^n} \sum_{i=1}^{n} |\Xi_{1,i}| \leq \frac{B_3 \varepsilon_0}{\delta_0^n} \sqrt{n}\, |\Xi_1| .
$$

Infine $V^{>N_0}$ si stima come a pag. 467 all'interno di $\tilde{D}_0$ (e quindi anche all'interno di $\bar{D}_{1,3}$), così che, tenuto conto che $2B_2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n} \mathrm{e}^{-\delta_0 N_0/2} \leq C_0 \varepsilon_0^2$ (si confrontino le (89.14) con la (89.17)), si trova

$$
\left| V^{>N_0}(\varphi, J) \right| \leq \frac{B_1}{2B_2} \delta_0 \rho_0 C_0 \varepsilon_0^2.
$$

Scegliendo in modo opportuno la costante B_7 si ottengono le (89.34).]

Esercizio 15 Si deduca la stima (89.35) dalle (89.34). [*Soluzione.* Utilizzando la stima (89.27b) per la funzione Ξ_1 in (89.35), si vede che il termine più grande in (89.30) è a_1. La stima (89.34a), tenendo conto anche della stima (89.20) e della seconda delle (89.26), dà allora

$$
|V_1(\varphi', J')| \leq 3B_7 \frac{E_0}{\rho_0} \left(B_5 \bar{\rho}_1 C_0^2 \varepsilon_0 \delta_0^{-n-\tau} E_0 N_0^{\tau+1} \right)^2 \leq \frac{3B_7 B_5^2}{16n^2} \rho_0 (C_0 \varepsilon_0)^2 E_0 \delta_0^{-2\tau-2n},
$$

dove si è usata l'espressione (89.12) di $\bar{\rho}_1$. Da qui segue immediatamente la (89.35).]

Esercizio 16 Si dimostri la stima (89.39). [*Suggerimento.* Possiamo stimare

$$
\left| \int_0^1 \mathrm{d}t \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{0,i}}{\partial J_j \partial J_k} (J_0 + t(J-J_0))\, (J_j - J_{0,j})\, (J_k - J_{0,k}) \right| \leq \frac{4E_0}{\rho_0^2} \Big(\sum_{k=1}^{n} |J_k - J_{0,k}| \Big)^2 \leq \frac{4E_0 n}{\rho_0^2} \rho^2,
$$

e usare il fatto che $|F_1| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |F_{1,i}|$.]

Esercizio 17 Si dimostri che l'equazione (89.37) si può risolvere applicando il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Si riscriva la (89.38) nella forma $J_1 - J_0 + \mu F_1(J_1, J_0) = 0$ e si consideri la funzione
$$\bar{F}(J_1, \mu) := J_1 - J_0 + \mu F_1(J_1, J_0),$$
dove J_1 è visto come un parametro fissato. Si ha $\bar{F}(J_0, 0) = 0$ e
$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial J_1}(J_1, \mu) := \mathbb{1} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial J_1}(J_1, J_0).$$
Se si sceglie ρ in accordo con la (89.41), in modo che valgano le (89.40) possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che per ogni μ vicino a zero esiste $J_1 = J_1(\mu)$ tale che $\bar{F}(J_1(\mu), \mu) = 0$. Poiché F_1 è di ordine ε_0, prendendo ε_0 sufficientemente piccolo si può fissare $\mu = 1$.]

Esercizio 18 Si dimostrino le (89.54). [*Suggerimento.* Per ε_0 sufficientemente piccolo, il limite per $n \to \infty$ della somma in (89.53b) è minore di E_0. Per $n \to \infty$ il prodotto in (89.53d) diventa un prodotto infinito, che converge se e solo se converge la serie (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 19)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k 4 \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right)^{-1} = 4 \left(\log \frac{1}{C_0 \varepsilon_0}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$
La serie converge banalmente, quindi anche il prodotto infinito ammette limite positivo. Poiché, per ogni successione $\{a_n\}$ a termini positivi, si ha
$$\prod_{k=0}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=0}^{n} a_n,$$
come si verifica facilmente per induzione su n (cfr. anche la soluzione dell'esercizio 11 del capitolo 19), il limite di ξ_n è maggiore di $\xi_0/2$, purché ε_0 sia sufficientemente piccolo.]

Esercizio 19 Si dimostri la (89.55). [*Soluzione.* Le (89.53a) e (89.53e) dànno
$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_n}{\rho_n^a} &\leq \frac{C_0^{-1}(C_0\varepsilon_{n-1})^{3/2}}{\rho_{n-1}^a} \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_{n-1}}\right)^{2a(\tau+2)} \\ &\leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{\rho_{n-1}^a} (C_0\varepsilon_{n-1})^{1/2} \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_{n-1}}\right)^{2a(\tau+2)} \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{\rho_{n-1}^a} A \, (C_0\varepsilon_{n-1})^{1/4} ,\end{aligned}$$
dove abbiamo usato che $x^{1/2}(\log x)^{2a} \leq A(a)\, x^{1/4}$, per un'opportuna costante $A(a)$, e posto $A := A(2a(\tau+2))$. Iterando si trova quindi
$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_n}{\rho_n^a} &\leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \prod_{k=0}^{n-1} (C_0\varepsilon_k)^{1/4} \leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \prod_{k=0}^{n-1} (C_0\varepsilon_0)^{(3/2)^k/4} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \exp\!\left(-\frac{1}{4} \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k\right) \leq \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^a} A^n \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{C_0\varepsilon_0}\right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)\right),\end{aligned}$$
che tende a zero per $n \to \infty$ indipendentemente dal valore di a.]

Esercizio 20 Si dimostri che se la serie a termini positivi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge ad $a < 1/2$, allora si ha

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k) \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

e se ne deduca la (89.56). [*Suggerimento.* Si dimostra induttivamente su n che

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1+a_k) \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Per $n = 1$ la diseguaglianza è ovviamente soddisfatta; se è soddisfatta per $n-1$ si ha

$$\prod_{k=0}^{n} (1+a_k) = (1+a_n)\prod_{k=0}^{n-1} (1+a_k) \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n + 2a_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k + 2a_n,$$

da cui segue l'asserto. Per dimostrare la (89.56) definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione

$$a_k^{(n)} := \begin{cases} 4\eta_k n\varepsilon_k/\rho_k, & k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Possiamo applicare il risultato appena dimostrato e concludere, ragionando sempre per induzione, che, per ε_0 sufficientemente piccolo, si ha $\eta_n \leq 2\eta_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, per $n = 1$, la diseguaglianza è banale; assumendo che essa valga fino a $n-1$, si ha allora

$$\eta_n = \eta_0 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a_k^{(n)}\right) \leq \eta_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}\right) \leq \eta_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{n} 8\eta_0\varepsilon_k\rho_k^{-1}\right) \leq 2\eta_0,$$

dove si è tenuto conto della (89.55).]

Esercizio 21 Si dimostrino le stime (89.58). [*Suggerimento.* Si ha $\mathcal{H}_n(J') = \mathcal{H}_{n-1}(J') + V_{n-1,0}(J')$, dove $V_{n-1,0}(J)$ è la media sul toro $\mathbb{T}^n$ della funzione $V_{n-1}(\varphi, J)$; cfr. la (89.29) per $n = 1$). Le funzioni $\mathcal{H}_{n-1}$ e V_{n-1} sono analitiche in D_{n-1}, quindi le loro derivate seconde rispetto a J' si possono stimare in D_n con i massimi delle derivate prime in D_{n-1} (che a loro volta si stimano con le rispettive norme $\|\mathcal{H}_{n-1}\|_{n-1}$ e $\|V_{n-1}\|_{n-1}$), divisi per $\rho_{n-1}/2$. La derivata prima di V_n rispetto a J' si stima semplicemente con la norma $\|V_n\|_n$.]

Esercizio 22 Si fornisca un esempio esplicito di funzione $\chi(x)$ che sia C^∞ a supporto compatto in $\mathbb{R}$, che verifichi la condizione (91.1) e che abbia derivata non positiva per $x > 0$. [*Suggerimento.* La funzione (cfr. la figura 20.10)

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è C^∞; infatti si verifica facilmente che $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. La funzione è crescente per $x > 0$ (si ha $f'(x) = f(x)/x^2 > 0$ per $x > 0$) e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$