Esercizio 47 Si dimostri la (57.10). [*Suggerimento.* Derivando la seconda delle (57.4) e utilizzando l'identità di Jacobi per il prodotto vettoriale (cfr. l'esercizio 46), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\wedge\boldsymbol{\kappa}^{(i)} \\
&\quad=\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\omega}\wedge\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\big)\wedge\boldsymbol{\kappa}^{(i)}+\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\wedge\big(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\kappa}^{(i)}\big)+\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\wedge\dot{\boldsymbol{K}}^{(i)} \\
&\quad=\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\omega}\wedge\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\big)\wedge\boldsymbol{\kappa}^{(i)}+\sum_{i=1}^{N} m_i\big(\boldsymbol{\xi}^{(i)}-\boldsymbol{x}_0\big)\wedge\dot{\boldsymbol{K}}^{(i)},
\end{aligned}$$

che, in virtù della stessa (57.4), implica la (57.10).]

Esercizio 48 Si consideri il sistema meccanico costituito da un disco di massa m e raggio r, che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale, mantenendosi sempre ortogonale al piano e diretto lungo l'asse x e muovendosi lungo una direzione prefissata. Si risolvano esplicitamente le equazioni del moto e si determinino le forze vincolari utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. [*Suggerimento.* Si tenga conto dell'esempio 43.10. In particolare la reazione vincolare che agisce sul centro di massa è $(0, mg, 0)$, mentre la reazione vincolare che agisce sul punto di contatto con il piano è nulla.]

Esercizio 49 Si scrivano la lagrangiana che descriva un *pendolo semplice* di massa m e lunghezza ℓ (cfr. il §24 del capitolo 5) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. [*Soluzione.* Se (x, y) sono le coordinate del punto di massa m e φ è l'angolo che la retta passante per tale punto e il punto di sospensione forma con la verticale (cfr. la figura 5.12 del capitolo 5 con $\theta = \varphi$), si ha $(x, y) = (\ell\sin\varphi, -\ell\cos\varphi)$. La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot\varphi)=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2+mg\ell\cos\varphi.$$

Quindi

$$\ddot\varphi=-\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

sono le corrispondenti equazioni di Eulero Lagrange.]

Esercizio 50 Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice dell'esercizio 49. In particolare si determino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valoro massimo e il valore minimo. [*Suggerimento.* Poiché $(x, y) = (\ell\sin\varphi, -\ell\cos\varphi)$, si ha

$$\begin{cases}\ddot x=\ell\cos\varphi\,\ddot\varphi-\ell\sin\varphi\,\dot\varphi^2,\\ \ddot y=\ell\sin\varphi\,\ddot\varphi+\ell\cos\varphi\,\dot\varphi^2,\end{cases}$$

dove $\ell\ddot\varphi = -g\sin\varphi$ e $\ell\dot\varphi^2 + 2g(1-\cos\varphi) = gA$, se $A := 2E/mg\ell$ (per la conservazione dell'energia E). Scrivendo $f_{V,x} = m\ddot x$ e $f_{V,y} = m\ddot y + mg$ si trova

$$f_{V,x}=-mg(A+3\cos\varphi-2)\sin\varphi,\qquad f_{V,y}=mg(A+3\cos\varphi-2)\cos\varphi,$$

consistentemente con l'esercizio 22 del capitolo 9 (dove l'angolo φ era denotato θ). Il massimo di $|f_{V,x}|^2 + |f_{V,y}|^2$ è quindi raggiunto quando $\varphi = 0$, mentre il minimo si ha per $\varphi = \pi$.]

Esercizio 51 Il *pendolo doppio* è costituito da due pendoli semplici coplanari, di massa rispettivamente m_1 e m_2 e di lunghezza rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2, dei quali il primo ha il punto di sospensione fisso e il secondo è sospeso al punto di massa m_1 (cfr. la figura 11.5). Sia g l'accelerazione di gravità. Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange del pendolo doppio. [*Soluzione.* Indicando con φ_1 e φ_2 gli angoli che i due pendoli formano con la verticale discendente, si ha $\mathcal{L} = T - V$, con

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right), \\ V &= -m_1 g \ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g \ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g \ell_2 \cos\varphi_2, \end{aligned}$$

così che

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\ell_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 &= -(m_1+m_2)\ell_1 \sin\varphi_1, \\ m_2 \ell_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 &= -m_2 \ell_2 \sin\varphi_2 \end{aligned}$$

sono le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.]

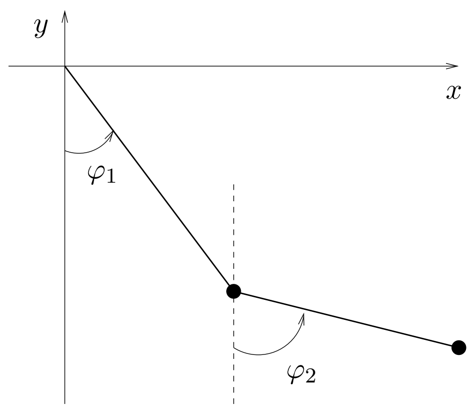

Figura 11.5: Pendolo doppio dell'esercizio 51.

Esercizio 52 Sia g la accelerazione di gravità. Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange per il *pendolo di lunghezza variabile*, i.e. per un pendolo semplice di massa m e lunghezza che vari nel tempo secondo la legge $\ell(t) = \ell_0 + \ell_1 \cos t$, con $0 < \ell_1 < \ell_0$. [*Soluzione.* La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + m \ell g \cos\varphi, \qquad \ell = \ell(t) = \ell_0 \left(1 + \varepsilon \cos t\right),$$

dove $\varepsilon := \ell_1/\ell_0$. Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{\ell}}{\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \left(-\frac{2\varepsilon \sin t}{1 + \varepsilon \cos t} \right) \dot{\varphi} + \frac{\beta}{1 + \varepsilon \cos t} \sin\varphi,$$

dove $\beta := g/\ell_0$.]

Esercizio 53 Sia g l'accelerazione di gravità. Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange di un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ, il cui punto di sospensione
(1) si muova lungo un cerchio verticale con velocità angolare costante ω (cfr. la figura 11.6)
(2) oscilli verticalmente secondo la legge $y(t) = a\cos\omega t$ (cfr. la figura 11.6).
[*Soluzione.* Sia O il punto di sospensione del pendolo, e siano (x_0, y_0) le sue coordinate. Nel caso (1) si ha $x_0 = a\cos\omega t$, $y_0 = a\sin\omega t$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - m\ell a\omega^2\sin(\varphi - \omega t) + mg\ell\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente. Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi + m\ell a\omega^2\cos(\varphi - \omega t).$$

Nel caso (2) si ha $x_0 = 0$, $y_0 = a\cos\omega t$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi + mg\ell\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente. Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = m\ell(-g - a\omega^2\cos\omega t)\sin\varphi.$$

Tale equazione descrive il moto di un *pendolo con punto di sospensione che oscilla verticalmente*; nell'approssimazione lineare, essa diventa

$$\ddot{\varphi} + (\alpha + \beta\cos\omega t)\,\varphi = 0, \qquad \alpha = \frac{g}{\ell}, \quad \beta = -\frac{a\omega^2}{\ell},$$

che è nota come *equazione di Mathieu* (cfr. la nota bibliografica).]

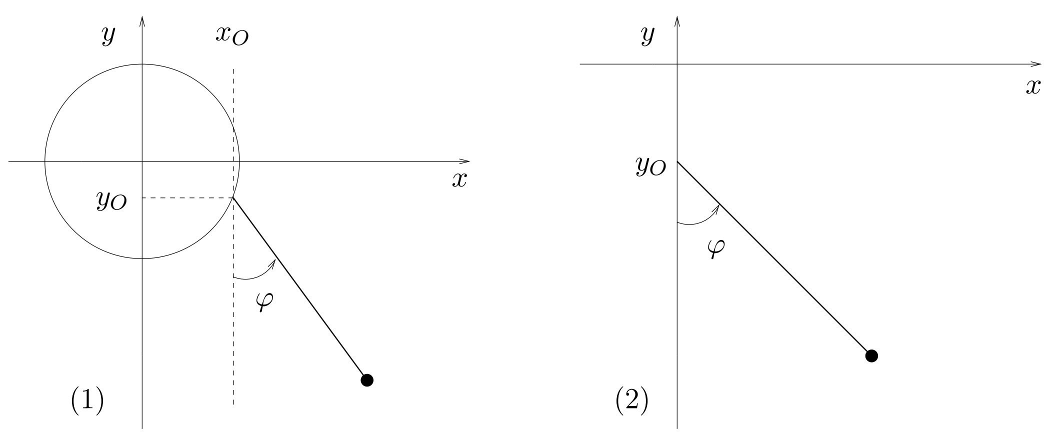

Figura 11.6: Pendolo semplice nei due casi (1) e (2) dell'esercizio 53.

Esercizio 54 Con le stesse notazioni dell'esercizio 53, si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso in cui il punto di sospensione del pendolo oscilli orizzontalmente secondo la legge $x(t) = a\cos\omega t$. [*Soluzione.* Con le notazioni dell'esercizio 53, si ha $x_0 = a\cos\omega t$, $y_0 = 0$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell a\omega^2 \cos\omega t \sin\varphi + mg\ell\cos\varphi$$

è la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi + m\ell a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente.]

Esercizio 55 Si consideri un ellissoide omogeneo con semiassi di lunghezza a, b, c che ruoti intorno all'asse di lunghezza $2c$, che a sua volta ruota intorno a un asse a esso perpendicolare passante per il centro di massa dell'ellissoide. Si calcoli la lagrangiana del sistema. [*Soluzione.* Gli assi d'inerzia dell'ellissoide sono i tre assi principali $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ e i corrispondenti momenti principali d'inerzia sono (cfr. l'esercizio 31 del capitolo 10)

$$I_1 = \frac{m}{5}\left(b^2 + c^2\right), \qquad I_2 = \frac{m}{5}\left(a^2 + c^2\right), \qquad I_3 = \frac{m}{5}\left(a^2 + b^2\right),$$

se a, b, c sono le lunghezze dei semiassi diretti lungo $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, rispettivamente. Se θ indica l'angolo di rotazione dell'ellissoide intorno all'asse di lunghezza $2c$ e φ l'angolo con cui tale asse ruota intorno a un asse a esso perpendicolare, il vettore velocità angolare, nel sistema solidale con l'ellissoide, è dato da $\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\varphi}\cos\theta, \dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\theta})$. Si ha quindi

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}\left(I_1\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + I_2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + I_3\dot{\theta}^2\right),$$

poiché sul sistema non agiscono forze.]

Esercizio 56 Sia P un punto materiale di massa m che si muova nello spazio euclideo tridimensionale. Si scriva l'energia cinetica del punto P in coordinate sferiche. [*Soluzione.* Siano (x, y, z) le coordinate cartesiane di P; in termini delle coordinate sferiche (ρ, θ, φ) si ha $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi)$ (cfr. l'esercizio 3 del capitolo 7). Quindi

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right),$$

rappresenta l'energia cinetica di P espressa in coordinate sferiche.]

Esercizio 57 Si scriva l'energia cinetica di un punto P che si muova nello spazio euclideo tridimensionale in coordinate cilindriche. [*Soluzione.* Siano (x, y, z) le coordinate cartesiane di P; in termini delle coordinate cilindriche (ρ, θ, z) si ha $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$ (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 7). Quindi

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right),$$

rappresenta l'energia cinetica di P espressa in coordinate cilindriche.

Esercizio 58 Il *pendolo sferico* è costituito da un punto di massa m, collegato da un'asta inestensibile di lunghezza ℓ e massa nulla a un punto fisso (punto di sospensione), come nel caso del pendolo semplice, ma tale da muoversi nello spazio tridimensionale invece che nel piano (cfr. la figura 11.7). Come coordinate lagrangiane si possono usare le variabili angolari (θ, φ) delle coordinate sferiche, dal momento che il raggio ρ è fissato al valore $\rho = \ell$, misurando l'angolo φ dalla verticale discendente (così che $z = -\ell \cos\varphi$). Si dimostri che la lagrangiana che descrive il sistema è data da

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \varphi) = \frac{1}{2} m \left(\ell^2 \dot{\varphi}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi \right) + mg\ell \cos\varphi,$$

e che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} \ell\ddot{\varphi} = \ell\dot{\theta}^2 \sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi, \\ \sin^2\varphi\ddot{\theta} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Si dimostri infine che, imponendo il vincolo che il moto rimane confinato in un piano, si ottengono le equazioni del moto del pendolo semplice (cfr. l'esercizio 49).

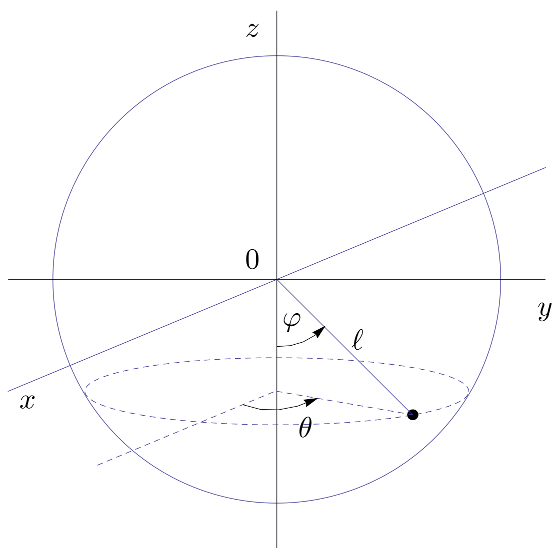

Figura 11.7: Pendolo sferico dell'esercizio 58.

Esercizio 59 Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m_1 = m_2 = 1$, che si muovono su un piano orizzontale, sotto l'azione della forza di energia potenziale

$$V = \frac{1}{2} k \left[r_{12}^2 - \left(r_1^2 - r_2^2 \right)^2 \right],$$

dove r_{12} è la distanza tra i punti P_1 e P_2, r_1 è la distanza di P_1 da un punto fisso O e r_2 è la distanza di P_2 da O. I due punti P_1 e P_2 sono inoltre vincolati a muoversi, rispettivamente, su una circonferenza