FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2020/2021

Primo appello (21-06-2021)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \mathrm{e}^{-x^2} x^2 \left(x^2 - \alpha\right).$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.
   2.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   2.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   2.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   2.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande per $\alpha = -1$.]
3. [Si discuta come cambia lo scenario al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si considerino un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento $K = O'\xi\eta\zeta$, che si muove nel modo seguente: l'origine O' ruota lungo la circonferenza di raggio $r = 1$ e centro in O con velocità angolare costante $\omega = 1$, l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z, e l'asse ξ si mantiene ortogonale alla circonferenza, diretto verso l'esterno; all'istante iniziale, l'origine O' di K ha coordinate $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$. Un punto materiale P_1 di massa m si muove lungo l'asse ξ con legge $\xi(t) = vt$, con v costante, mentre un secondo punto materiale P_2 è in quiete nel sistema κ, lungo il semiasse x positivo, a distanza d dall'origine O.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P_1 nel sistema di riferimento fisso.
3. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P_1.
4. Si calcoli il valore della forza che P deve esercitare in ogni istante per opporsi alla forza centrifuga e alla forza di Coriolis per potersi muovere nella direzione dell'asse ξ.
5. Si calcoli il valore che deve assumere v in funzione di d perché il punto P_1 urti contro il punto P_2 e si calcoli il tempo che deve trascorrere perché questo accada.
6. [Si descriva il moto del punto P_2 nel sistema di riferimento mobile K.]

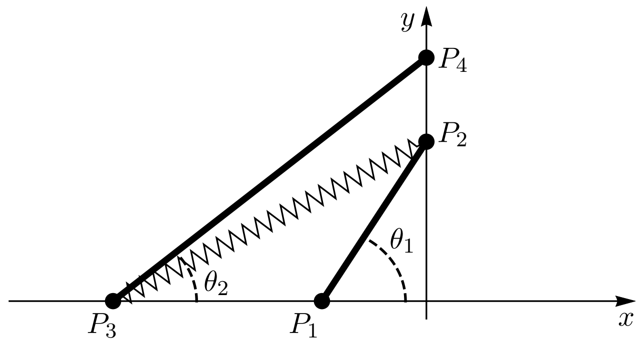
<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, vincolati a muoversi nel piano verticale xy lungo due rette r_1 e r_2 passanti per l'origine O che formano, rispettivamente, un angolo $\pi/3$ e un angolo $-\pi/3$ con l'asse x. Il punto P_1 è fissato a distanza $d = 1$ dall'origine, nel semipiano $y > 0$, mentre il punto P_2 può scorrere lungo la retta r_2, sotto l'azione della forza di gravità, diretta nel verso del semiasse y negativo (sia g l'accelerazione di gravità), e di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile che lo connette al punto P_1.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinata lagrangiana la posizione α che il punto P_2 occupa lungo la retta r_2.
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano $(\alpha, \dot{\alpha})$.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, che si muovono nel piano verticale xy (sia g l'accelerazione di gravità), in modo tale che

- P_1 e P_3 scorrono lungo l'asse x, mentre P_2 e P_4 scorrono lungo l'asse y,
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 1$ collega P_1 a P_2,
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 2$ collega P_3 a P_4.

I punti sono soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso dell'asse y discendente (sia g l'accelerazione di gravità), e una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile collega P_2 a P_3.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con l'asse x, come illustrato nella figura).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui sia sufficiente l'analisi al secondo ordine.
4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia inconcludente.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{q^2 \dot{q}^2}{2\,(1+q^2)}, \qquad q \neq 0.$$

1. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ associata a $\mathcal{L}(q,\dot{q})$.
2. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{q}\left(1+q^2\right), \\ P = \log\left(\dfrac{p}{q}\sqrt{1+q^2}\right). \end{cases}$$

   è canonica o verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali o trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$.
4. Si scriva l'hamiltoniana nell coordinate (Q,P) e si risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton con dati iniziali arbitrari $(Q(0),P(0)) = (Q_0,P_0)$.
5. [Si determini la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 2$.]