FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2020/2021

Secondo appello (09-07-2021)

Esercizio 1. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^2(x-\alpha)\left(x^2-1\right).$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 0$.
   2.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   2.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   2.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   2.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande per $\alpha = 1$.]

Esercizio 2. [6+2] Si considerino un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, la cui origine O' si muove lungo la circonferenza di raggio $r = 1$ e centro in O con velocità angolare $\omega = 1$, mentre l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z e l'asse ξ si mantiene ortogonale alla circonferenza, diretto verso l'esterno; all'istante iniziale, l'origine O' di K ha coordinate $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$. Un punto materiale P_1 di massa m si muove lungo l'asse η con legge $\eta(t) = vt$, con v costante.

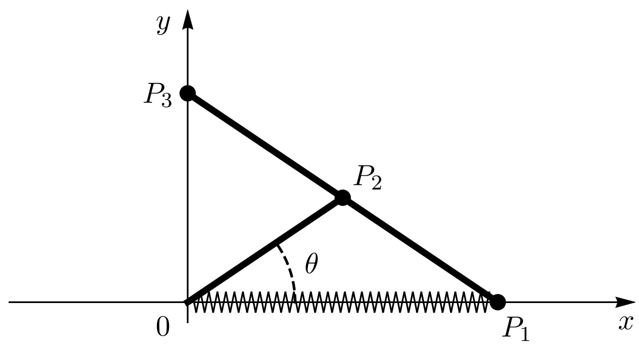
1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso.
3. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
4. Si calcoli il valore della forza che P deve esercitare in ogni istante per opporsi alla forza di Coriolis in modo da potersi muovere nella direzione dell'asse η.
5. Si calcoli come varia in funzione del tempo la distanza del punto P dall'origine O' del sistema mobile e dall'origine O del sistema fisso.
6. [Si mostri che esiste un tempo finito t_0 tale che il P raggiunge la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio $R = 10$ e centro in O, e si determini in quale punto la traiettoria descritta da P interseca $\mathcal{C}$.]

Esercizio 3. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale Oxy, lungo il profilo parabolico descritto dall'equazione $y = x^2$, sotto l'azione della forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità). Inoltre tre molle identiche, di costante elastica k e lunghezza trascurabile, connettono il punto P_1 al punto P_2, il punto P_1 al punto fisso $(-2, 0)$ e il punto P_2 al punto fisso $(2, 0)$.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare le ascisse x_1 e x_2 dei due punti P_1 e P_2, rispettivamente.)
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità. (Può essere conveniente passare alle coordinate (s, d), dove $s := (x_1 + x_2)/2$ è l'ascissa del centro di massa e $d := x_2 - x_1$ è l'ascissa della coordinata relativa.)
4. [Si descriva qualitativamente il sistema unidimensionale che si ottiene fissando P_1 nell'origine.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa $m = 1$, vincolati a muoversi nel piano verticale Oxy (sia g l'accelerazione di gravità), nel modo seguente:

- P_1 scorre lungo l'asse x e P_3 scorre lungo l'asse y,
- P_2 è collegato a P_1, P_3 e O tramite tre aste identiche, di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 1$,
- una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile collega il punto P_1 al punto O.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinata lagrangiana si può utilizzare l'angolo θ che l'asta che collega il punto P_2 all'origine O forma con l'asse x, come illustrato nella figura).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_2.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{q_1^2 p_1}{p_2}, \\ Q_2 = p_2, \\ P_1 = \dfrac{p_2}{q_1}, \\ P_2 = \dfrac{p_1 q_1}{p_2} - q_2. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial Q_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(q_1^4 p_1^2 + p_2^2\right),$$
si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
5. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$, $p_1(0) = 0$.]