# FM210 - Meccanica Analitica
## Anno Accademico 2020/2021

Terzo appello (30-08-2021)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^4 \left(4 \log |x| - 1\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato, e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si discuta se la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (\mathrm{e}^{1/4}, 0)$ è limitata o illimitata, e se è definita globalmente nel tempo.

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si consideri un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, solidale con una cabina che si muove verso il basso (ovvero nella direzione dell'asse $z$ negativo) sottoposto all'accelerazione di gravità $g$, in modo tale che l'asse $\zeta$ si mantenga parallelo all'asse $z$ e l'asse $\xi$ ruoti intorno all'asse $\zeta$ con velocità angolare costante $\omega$; i due sistemi di riferimento coincidono al tempo $t = 0$. Nel sistema di riferimento $\kappa$, al tempo $t = 0$, un punto materiale $P$ viene lanciato verso l'alto (ovvero nella direzione dell'asse $z$ positivo), dalla posizione iniziale $(1, 0, 0)$, con velocità costante $v$.

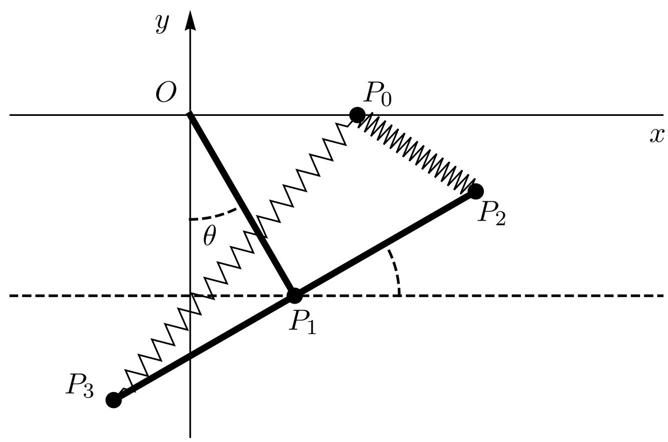
1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione $C$ con una rotazione $B$.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto $P$ nel sistema di riferimento fisso $\kappa$.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del punto $P$ nel sistema di riferimento mobile $K$.
4. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto $P$.
5. Si calcoli il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono sul punto $P$ nel sistema di riferimento mobile $K$.
6. [Al tempo $t_0$ il sistema di riferimento $K$ si blocca: si dimostri che, scegliendo opportunatamente $t_0$, esiste un tempo $t_1 > t_0$ in cui $P$ riassume in $K$ la stessa posizione iniziale $(1, 0, 0)$ e si calcoli $t_1$.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio $r = 1$ e massa $M$ che rotola senza strisciare nel piano verticale $Oxy$ lungo una guida di equazione $y = -x$. Una molla di costante elastica $k$ e lunghezza trascurabile connette il centro $C$ del disco al punto $O$. Sul disco agisce inoltre la forza di gravità (sia $g$ l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinata lagrangiana si può utilizzara l'ascissa $x$ del punto di contatto $P$ del disco con la guida su cui rotola).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. Si supponga che all'istante iniziale il punto $P$ coincida con $O$ e abbia velocità nulla: si determini quanti giri il disco compie intorno al proprio asse, in funzione dei parametri $M$, $g$ e $k$, per raggiungere la configurazione che corrisponde a una configurazione di equilibrio.
5. [Sempre sotto le ipotesi del punto precedente si mostri che il moto è periodico e si determinino il valore minimo e il valore massimo che assume la quota $y$ del punto $P$.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali $P_0$, $P_1$, $P_2$ e $P_4$, tutti di massa $m$, vincolati a muoversi nel piano verticale $Oxy$ nel modo seguente (cfr. la figura):

- $P_0$ si muove lungo l'asse $x$;
- $P_1$ è collegato al punto $O$ tramite un'asta $A_1$ di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 1$;
- $P_1$ è il punto di mezzo di un'asta $A_2$ di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 2$ che si mantiene ortogonale all'asta $A_1$ e ai cui estremi sono collocati i punti $P_2$ e $P_3$;
- due molle, entrambe di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo trascurabile, collegano i punti $P_2$ e $P_3$ al punto $P_0$;
- infine sul sistema agisce la forza peso (sia $g$ l'accelerazione di gravità).




1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinatae lagrangiane si possono utilizzare l'ascissa $x$ del punto $P_0$ e l'angolo $\theta$ che l'asta $A_1$ forma con l'asse $y$ negativo, come illustrato nella figura).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia il comportamento del sistema nel caso in cui si rimuova il vincolo che le due aste siano tra loro ortogonali, e si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = p^3 + \dfrac{q}{4}, \\ P = 4p + 2p^3 + \dfrac{q}{2}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ e il codominio della trasformazione.
2. Si dimostri esplicitamente che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
3. Si trovi una funzione generatrice di prima specie $F(q, Q)$.
4. Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
5. [Data l'hamiltoniana
$$H(q,p) = \frac{1}{8}\left(4p(2+p^2)+q\right)^2,$$
si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle variabili $(Q, P)$, e si determini la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili $(q, p)$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (4, 0)$.]