FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2020/2021

Quarto appello (24-01-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \alpha x^2 + 4x - \log x^2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si considerino esplicitamente i casi $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$.
   2.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   2.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   2.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   2.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$. In particolare si dimostri che per $\alpha = -1$ non esistono traiettorie periodiche e che, al contrario, per $\alpha = 1$, tutte le traiettorie che non siano punti di equilibrio sono periodiche.
2. [Si discuta come cambia lo scenario al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si considerino un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, tale che i due assi ζ e z coincidono (in particolare coincidono le origini O e O'), mentre il piano $\xi\eta$ ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω. Un punto materiale P di massa m si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t \sin t$.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
4. Si calcoli il valore della forza che P deve esercitare in ogni istante per opporsi alla forza di Coriolis in modo da potersi muovere nella direzione dell'asse ξ.
5. Si dimostri che P, per ogni $t \geq 0$, rimane all'interno della circonferenza di raggio t e centro in O.
6. [Nel caso $\omega = 1$, si mostri che il punto P si muove su una circonferenza nel piano xy, di raggio $t/2$ e centro $(0, t/2)$, che si espande in modo omotetico nella direzione y rimanendo tangente all'asse x.]

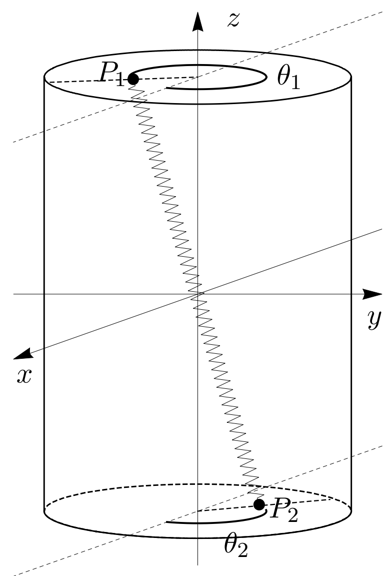
<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 dischi omogenei D_1 e D_2, entrambi di raggio R e massa M, vincolati a rotolare senza strisciare nel piano verticale (x, y), lungo due guide orizzontali di equazioni, rispettivamente, $y = 0$ e $y = 3R$. Siano C_1 e C_2 i centri, rispettivamente, del disco D_1 e del disco D_2: tre molle di lunghezza trascurabile e costante elastica k collegano il punto $(0, 0)$ al centro C_1, il centro C_1 al centro C_2 e il centro C_2 al punto $(3R, 0)$. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare le ascisse x_1 e x_2 dei centri C_1 e C_2.)
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambiano le configurazioni di equilibrio nel caso in cui la guida su cui rotola il disco D_1 sia libera di scorrere verticalmente, sempre mantenendosi orizzontale, e se ne discuta la stabilità.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi, il primo sulla base superiore di un cilindro fisso, di raggio $R = 1$ e altezza $h = 2$, sotto l'azione della forza di energia potenziale $V(r_1)$, il secondo sulla base inferiore dello stesso cilindro, sotto l'azione della forza di energia potenziale $V(r_2)$, dove (si veda la figura):

- r_1 è la distanza di P_1 dall'asse del cilindro,
- r_2 è la distanza di P_2 dall'asse del cilindro,
- $V(r)$ è la funzione

$$V(r) = \frac{1}{1 - r^2}, \qquad r \in [0, 1).$$



Infine, una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k collega i due punti P_1 e P_2.

1. Si scriva la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema. (Per definire le coordinate lagrangiane, conviene considerare un sistema di coordinate (x, y, z), in cui il centro del cilindro occupa l'origine O e il suo asse è diretto lungo l'asse z, e passare quindi alle coordinate cilindriche (ρ_1, θ_1, z_1) e (ρ_2, θ_2, z_2) dei due punti, tenendo conto che la coordinate z_1 e z_2 sono fisse).
2. Si dimostri che esiste un sistema di coordinate in cui una variabile è ciclica e si calcoli la lagrangiana ridotta $\mathcal{L}_R$.
3. Si determini il momento conservato corrisponente.
4. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana ridotta $\mathcal{L}_R$.
5. [Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ e se ne discuta la stabilità.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{q}\sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2}, \\[2ex] P = \sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q, P)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che $\partial^2 F/\partial q \partial P$ non si annulla nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali.
5. Data l'hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{q}{p} - \frac{1}{2}\left(1 + q^2\right),$$

si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili (Q, P).

6. [Si scriva la soluzione in termini delle coordinate originali (q, p).]