FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2020/2021

Quinto appello (15-02-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2(x-3)}{x+1}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato, e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si discuta se la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$ sia limitata o illimitata, e se sia definita globalmente nel tempo.

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si consideri un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ il cui piano $\xi\eta$ oscilla nella direzione verticale in modo tale che che gli assi ξ ed η si mantengano paralleli agli assi x e y, rispettivamente, e l'origine O' scorra lungo l'asse z con legge oraria $z_{O'} = a\cos\omega t$, dove a e ω sono due costanti positive. Un vagone (assimilabile a un punto materiale P di massa m) si muove nel sistema K lungo l'asse ξ con velocità costante v. Al tempo $t = 0$, dal vagone viene lanciato un sasso P_0 di massa m_0 nella direzione dell'asse ξ positivo, con velocità iniziale v_0,

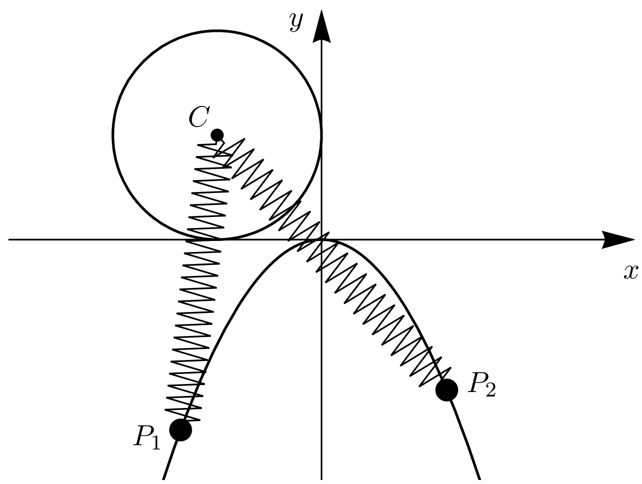
1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, e si determinino B e C.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del vagone P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{q}_0(t)$ del sasso P_0 nel sistema di riferimento fisso κ, tenendo conto che esso si muove sotto l'azione della forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità).
4. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}_0(t)$ del sasso P_0 nel sistema di riferimento mobile K.
5. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P_0.
6. [Si mostri che se $v \neq v_0$ il sasso non può più ricadere sul vagone e che se, invece, $v = v_0$, il sasso ricade sempre sul vagone dopo un tempo finito t_0 indipendentemente dai valori di a e ω.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P di massa m e da un disco omogeneo di massa M e raggio $r = 1$. Sia il disco che il punto P sono vincolati a muoversi nel piano verticale xy: P si muove lungo l'asse x, mentre il disco rotola senza strisciare all'esterno di una guida circolare di raggio $R = 2$ e centro $O = (0, 0)$. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile unisce il punto P al centro C del disco. Infine sul sistema agisce la a forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono usare l'ascissa del punto P e l'angolo θ che il vettore che unisce l'origine O al punto C forma con l'asse x).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia la discussione se il piano verticale ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

ESERCIZIO 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, e da un disco omogeneo D di massa M e raggio $R = 1$, vincolati a muoversi nel piano verticale Oxy nel modo seguente:

- P_1 e P_2 si muovono lungo il profilo di equazione $y = -x^2$;
- il disco D rotola senza strisciare lungo l'asse x;
- due molle elastiche, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano i punti P_1 e P_2 al centro C del disco D;
- infine sul sistema agisce la forza peso (sia g l'accelerazione di gravità).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare le ascisse x_1, x_2 e x_0 del punto P_1, del punto P_1 e del centro C del disco, rispettivamente).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si calcolino le reazioni vincolari che agiscono sul centro C del disco in corrispondenza di una configurazione di equilibrio.]

ESERCIZIO 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q^2, \\ P = \dfrac{p-1}{2q}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ e il codominio della trasformazione.
2. Si dimostri esplicitamente che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
3. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
4. Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
5. [Data l'hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{p^2}{4q^2} - \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2},$$

si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P), e si determini la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili (q, p) con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.]