FM210 - Meccanica Analitica

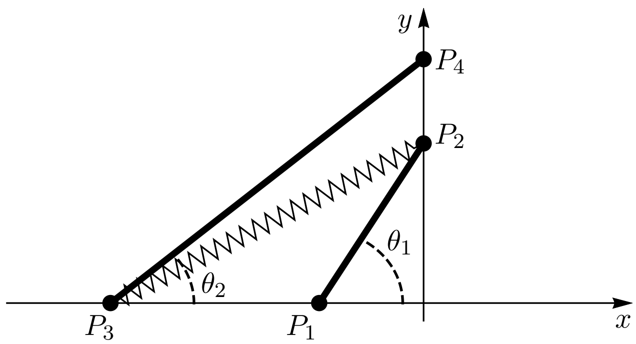
Anno Accademico 2020/2021

Recupero della seconda prova di esonero (21-06-2021)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, che si muovono nel piano verticale xy, in modo tale che

- P_1 e P_3 scorrono lungo l'asse x, mentre P_2 e P_4 scorrono lungo l'asse y,
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 1$ collega P_1 a P_2,
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_2 = 2$ collega P_3 a P_4.

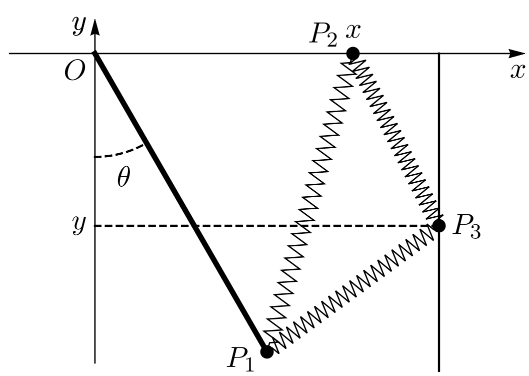
I punti sono soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso dell'asse y discendente (sia g l'accelerazione di gravità), e una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile collega P_2 a P_3.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con l'asse x, come illustrato nella figura).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui sia sufficiente l'analisi al secondo ordine.
4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia inconcludente.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa $m = 1$, vincolati a muoversi nel piano verticale Oxy (sia g l'accelerazione di gravità), nel modo seguente:

- P_1 è collegato all'origine O tramite un'asta omogenea inestensibile di massa M e lunghezza $\ell = 2$,
- P_2 scorre lungo l'asse x, mentre P_3 scorre lungo l'asse verticale $x = 2$,
- due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo trascurabile collegano P_2 a P_1 e a P_3,
- una molla di costante elastica $h \geq 0$ e lunghezza a riposo trascurabile collega P_1 a P_3.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si utilizzino l'angolo θ che l'asta forma con l'asse y discendente, l'ascissa x di P_2 e l'ordinata y di P_3, come illustrato nella figura).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità nel caso in cui si abbia $h = 0$.
4. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità nel caso in cui si abbia $h = k$.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, che si muovono nel piano orizzontale xy, in modo tale che

- P_1 scorre lungo la guida orizzontale $y = 1$, P_2 scorre lungo la guida verticale $x = 1$, P_3 scorre lungo la guida orizzontale $y = -1$, P_4 scorre lungo la guida verticale $x = -1$,
- quattro molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile collegano, rispettivamente, P_1 a P_2, P_2 a P_3, P_3 a P_4 e P_4 a P_1.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. Si determini la forza vincolare che agisce su ciascun punto in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio trovate al punto 3.
4. [Si determini la forza vincolare che agisce su P_1 in funzione della posizione dei quattro punti.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{q^2\dot{q}^2}{2(1+q^2)}, \qquad q \neq 0.$$

1. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ associata a $\mathcal{L}(q,\dot{q})$.
2. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{q}\left(1+q^2\right), \\ P = \log\left(\dfrac{p}{q}\sqrt{1+q^2}\right). \end{cases}$$
è canonica o verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali o trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$.
4. Si scriva l'hamiltoniana nelle coordinate (Q,P) e si risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.
5. [Si determini la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 2$.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 \log q_2, \\ Q_2 = 3q_1\left(p_1 - \dfrac{q_2p_2}{q_1}\log q_2\right)^{2/3}, \\ P_1 = \dfrac{q_2p_2}{q_1}, \\ P_2 = \left(p_1 - \dfrac{q_2p_2}{q_1}\log q_2\right)^{1/3}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1,q_2,P_1,P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1,q_2,P_1,P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = \frac{1}{q_1^2}\left(\left(p_1q_1 - q_2p_2\log q_2\right)^2 + q_2^2p_2^2\right),$$
si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili (Q_1,Q_2,P_1,P_2).
5. [Si determini la soluzione $(q_1(t),q_2(t),p_1(t),p_2(t))$ delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1,q_2,p_1,p_2)$ con dati iniziali $q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$.]