FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2020/2021

Preparazione alla prova di esonero (15-04-2021)

Esercizio 1. [8] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino autovalori e autovettori di A.
2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare l'esponenziale di At, per $t \in \mathbb{R}$
3. Si dimostri per induzione che $A^k = 3^{k-1}A$ per $k \geq 1$.
4. Si usi il risultato al punto 3 per calcolare in modo alternativo l'esponenziale di At.
5. Si usi il risultato al punto 2 o 4 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

   al variare dei dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$.
6. Si utilizzi il cambio di variabili $(x, y) \mapsto (u, v)$, definito da $u = x + y$ e $v = x - y$, per risolvere in modo alternativo il sistema di equazioni al punto 5.

Esercizio 2. [8] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x - \frac{8x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

Esercizio 3. [8] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (-1, 0)$ è periodica.
2. Si scriva il periodo della traiettoria come integrale definito e se ne dia una stima.

3. Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
4. Si dimostri che $x = 0$ corrisponde a un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico.
5. Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino al punto di equilibrio nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.

<u>ESERCIZIO 4.</u> [8] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{4}\alpha\rho^4 - \rho^2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia L il modulo del momento angolare. Si assuma che sia $L > 0$.

1. Si scrivano le equazioni del moto per la variabile ρ, e le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Si dimostri che per $\alpha \leq 0$ non esistono punti di equilibrio per il sistema dinamico.
3. Si dimostri che per $\alpha > 0$ esiste un unico punto di equilibrio e che esso è stabile. [*Suggerimento.* Può essere utile studiare graficamente le soluzioni dell'equazione $x^6 = ax^4 + b$ per $x \geq 0$, con $a, b > 0$, oppure applicare la regola dei segni di Cartesio.]
4. Si dimostri che per $\alpha \leq 0$ tutte le traiettorie sono illimitate, mentre per $\alpha > 0$ tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si determinino le condizioni perché il moto complessivo sia periodico al variare dei parametri α e L.
6. Nel caso di traiettorie illimitate ($\alpha \leq 0$) si discuta se il tempo di fuga è finito o infinito.

<u>ESERCIZIO 5.</u> [8] Un carrello si muove lungo una guida circolare di raggio R, posta in un piano verticale π, con velocità angolare costante ω. Si scelgano due sistemi di riferimento $\kappa = Oxyz$ e $K = O'\xi\eta\zeta$, il primo fisso e il secondo mobile, di cui κ ha l'origine O nel centro della circonferenza e l'asse $\boldsymbol{e}_z$ perpendicolare al piano π (in modo che il piano π coincida con il piano xy), mentre $K = O'\xi\eta\zeta$ ha in ogni istante l'origine O' nel centro del carrello, l'asse $\boldsymbol{e}_3$ parallelo a $\boldsymbol{e}_z$, l'asse $\boldsymbol{e}_1$ ortogonale alla guida, rivolto verso l'esterno, e, di conseguenza, l'asse $\boldsymbol{e}_2$ tangente alla guida. Quando il carrello si trova nel punto più alto della guida, viene lasciato cadere un sasso P di massa m con velocità iniziale v_0 in direzione verticale. Sul sistema agisce la forza peso. Sia g l'accelerazione di gravità. Si scelgano unità di misura tali che $g = 1$, $m = 1$ e $R = 10$.

1. Si descriva la traiettoria descritta dal sasso in funzione di v_0 nel sistema κ e si determini il tempo in cui esso raggiunge il punto più in basso della guida.
2. Si calcoli il valore che deve avere v_0 in funzione di ω perché il sasso ricada sul carrello quando quest'ultimo raggiunge il punto più in basso della guida dopo aver compiuto mezzo giro.
3. Si descriva la corrispondente traiettoria descritta dal sasso nel sistema K.
4. Si calcoli la forza di Coriolis che agisce sul sasso per un osservatore solidale con il carrello.