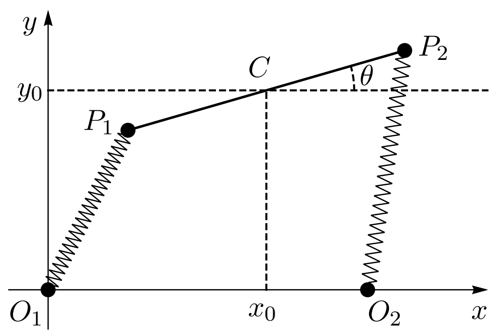
FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2020/2021

Preparazione alla prova di esonero (28-05-2021)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, disposti agli estremi di un'asta di lunghezza $\ell = 2$ e massa trascurabile. I due punti sono vincolati a muoversi in un piano verticale. Inoltre due molle, di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano P_1 a O_1 e P_2 a O_2, dove O_1 e O_2 sono due punti fissi posti alla stessa quota e distanti $d = 2$ l'uno dall'altro (cfr. la figura). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. [Può essere conveniente scegliere un sistema di coordinate (x, y) in cui O_1 e O_2 sono posti lungo l'asse x e utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x_0, y_0) del centro di massa C del sistema e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.]
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia la discussione se l'asta ha massa M non nulla.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un punto materiale P di massa m si muove, sotto l'azione della gravità, lungo una guida elicoidale, descritta dalle equazioni parametriche

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha, \qquad z = \alpha, \qquad \alpha \in [0, 10\pi].$$

All'istante iniziale il punto P si trova nel punto più alto della guida e viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si calcoli il tempo necessario perché il punto P raggiunga il punto più basso della guida.
4. Si determini la reazione vincolare che agisce sul punto P in funzione della sua posizione.
5. [Si discuta come cambia il moto se una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile collega il punto P al punto più altro della guida; in particolare si studi se esistano configurazioni di equilibrio.]

Esercizio 3. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, sono vincolati a muoversi in un piano verticale lungo una guida circolare di raggio $r = 1$ in modo tale che la mutua distanza resti fissata al valore $d = 1$. I due punti sono inoltre collegati, entrambi tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, al punto più alto della guida. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. [Può essere conveniente fissare un sistema di coordinate (x, y) in cui il centro della guida circolare coincida con l'origine e utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il punto P_1 forma con l'asse x; si ricordino anche le relazioni trigonometriche $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$.]
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si mostri che in opportune variabile il sistema si comporta o come un pendolo o come un sistema libero, a seconda dei valori dei parametri.]

Esercizio 4. [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 q^2 \mathrm{e}^{2q^2}, \qquad q, \dot{q} > 0.$$

1. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ associata a $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.
2. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{2p}{q}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}q^2}, \\ P = \sqrt{\dfrac{p}{2q}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}q^2}, \end{cases}$$
è canonica, verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
4. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
5. Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.
6. [Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$ della trasformazione.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = p_1 - p_2 + 2q_1q_2 - q_2^2, \\ Q_2 = 2p_2 - p_1 - 4q_1q_2 + q_2^2, \\ P_1 = -2q_1 - q_2, \\ P_2 = -q_1 - q_2. \end{cases}$$

1. Si trovi una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
2. Si verifichi esplicitamente che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial Q_j$ è non singolare.
3. Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di seconda specie e, in caso di risposta affermativa, la si determini.
4. [Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.]