FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2020/2021

Prima prova di esonero (21-04-2021)

Esercizio 1. [8=6+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0. \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino autovalori e autovettori di A, e si mostri che A è diagonalizzabile.
2. Si calcoli la matrice Q che diagonalizza A, i.e. tale che QAQ^{-1} è diagonale.
3. Si usi il risultato al punto 2 per calcolare l'esponenziale di At, per $t \in \mathbb{R}$
4. [Si usi il risultato al punto 3 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = 2x, \\ \dot{z} = x + y + z. \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 0, -1)$.]

Esercizio 2. [8=6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \log\left(1 + x^2\right) - \log\left(1 + \alpha\, x + x^2\right).$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.
   - 2.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   - 2.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   - 2.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   - 2.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande per $\alpha = -1$.]
3. [Si discuta come cambia lo scenario al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 3. [8=6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^2 - 1\right).$$

1. Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Si dimostri che $x = 0$ corrisponde a un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico.

3. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, \sqrt{2})$ è periodica.
4. Si scriva il periodo della traiettoria come integrale definito e se ne dia una stima.
5. Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino al punto di equilibrio nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.
6. [Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 4)$ è illimitata.]

<u>Esercizio 4.</u> [8=6+2] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho^4 \left(\rho^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia L il modulo del momento angolare. Si assuma inizialmente che sia $L > 0$.

1. Si scrivano le equazioni del moto per la variabile ρ, e le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Si studi il grafico dell'energia potenziale efficace al variare di α.
3. Si studi qualitativamente il moto della variabile ρ al variare di α
4. Si discuta in particolare per quali valori di α si hanno solo moti illimitati o solo moti limitati, e, nel caso di moti limitati, si descriva qualitativamente il moto nel piano ortogonale al momento angolare.
5. [Si determini, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, un dato iniziale (se esiste) per cui si abbia un moto complessivamente periodico in entrambe le variabili ρ e θ.]
6. [Si discuta come cambia l'analisi qualitativa del moto se $L = 0$.]

<u>Esercizio 5.</u> [8=6+2] Si considerino un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento $K = O'\xi\eta\zeta$, che si muove nel modo seguente: l'origine O' si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua ascissa sia data da $x_{O'}(t) = t$ e l'asse ζ si mantenga parallelo all'asse z, mentre l'asse ξ ruota formando rispetto all'asse x un angolo $\theta(t) = \omega t$, con ω costante. Un punto materiale P di massa m si muove lungo l'asse ξ con legge $\xi(t) = at$, con a costante.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D \colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso.
3. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
4. Si calcoli il valore della forza che P deve esercitare in ogni istante per opporsi alla forza centrifuga e alla forza di Coriolis per potersi muovere nella direzione dell'asse ξ.
5. Si dimostri che, se $a = 1$, esistono infiniti istanti positivi in cui il punto P ritorna nell'origine del sistema κ, e si determini il primo istante t_0 in cui questo accada.
6. [Si discuta per quali $a \neq 1$ (se esistono) la traiettoria $\boldsymbol{q}(t)$ interseca ancora infinite volte l'origine del sistema κ.]