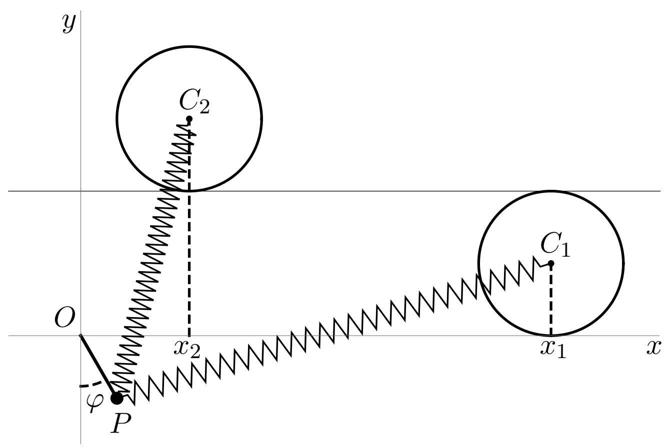
FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2020/2021

Seconda prova di esonero (09-06-2021)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Un punto materiale P di massa m si muove in un piano verticale soggetto alla forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità). Il punto P è collegato tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile a un punto fisso O. Si scelga un sistema di riferimento in cui il piano verticale sia il piano xy, con la forza di gravità rivolta in verso opposto all'asse y, e il punto O coincida con l'origine. Il punto P è inoltre collegato tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile ai centri di massa di due dischi omogenei D_1 e D_2, entrambi di massa M e raggio $r = 1$, che rotolano senza strisciare nel piano xy lungo due guide orizzontali poste alle quote $y = 0$ e $y = 2$ rispettivamente (cfr. la figura).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'angolo φ che P forma con l'asse y discendente e le ascisse x_1 e x_2 dei centri di massa dei due dischi.)
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, limitandosi al caso in cui la matrice hessiana dell'energia potenziale sia non singolare.
4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio quando la matrice hessiana è singolare.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, vincolati a muoversi in un piano verticale, il primo lungo una circonferenza $\mathcal{C}_1$ di raggio $r_1 = 1$ e il secondo lungo una circonferenza $\mathcal{C}_2$ di raggio $r_2 = \sqrt{2}$, che ha lo stesso centro di $\mathcal{C}_1$. Sui punti agisce la forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità); inoltre il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile e al punto più in alto della circonferenza C_2 tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia la discussione se l'asta ha massa $M > 0$ ed è omogenea.]

Esercizio 3. [6+2] Un punto materiale P di massa m si muove nel piano xy, lungo il profilo descritto dall'equazione $y = x^2(x-1)$. Il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω. Sul punto P agisce inoltre la forza di gravità, rivolta nel verso dell'asse y discendente (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. Si determini la forza vincolare che agisce su P in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio.
4. [All'istante iniziale il punto P si trova nella configurazione $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ e ha velocità nulla: si determini la forza vincolare che agisce su P in funzione della sua posizione.]

Esercizio 4. [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\left(1 + 2q^2\right)^2 \mathrm{e}^{2q^2} \dot{q}^2.$$

1. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ associata a $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.
2. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q^2 + \log\left(\dfrac{1 + 2q^2}{p}\right), \\ P = \dfrac{qp}{1 + 2q^2}, \end{cases}$$

   è canonica, verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
4. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
5. Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (0, 1)$ in forma implicita, ovvero nella forma $f(q(t)) = t$.
6. [Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$ della trasformazione.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = 2q_1^2\sqrt{\dfrac{p_1}{2q_1} - p_2^2}, \\ Q_2 = q_2 + 2q_1^2 p_2, \\ P_1 = \sqrt{\dfrac{p_1}{2q_1} - p_2^2}, \\ P_2 = p_2. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1}{2q_1} + p_2^2\right)^2,$$

   si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
5. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = p_1(0) = 1$, $q_2(0) = p_2(0) = 0$.]