§3 Esponenziale di un operatore lineare

Vedremo nel prossimo capitolo che, dato un qualsiasi sistema di equazioni differenziali lineari (le definizioni precise saranno date più avanti), esso ammette sempre una soluzione, che si può esplicitamente calcolare purché si sappia calcolare l'esponenziale di un operatore lineare, ovvero di una matrice.

Nel presente paragrafo ci occuperemo di definire l'esponenziale di un operatore lineare, di vederne alcune proprietà fondamentali e di calcolarlo in alcuni casi semplici – essenzialmente quando l'operatore è diagonalizzabile o semisemplice. Vedremo più avanti (cfr. la fine del §4) come si calcola nel caso generale.

Definizione 3.1 (Norma uniforme) *Sia E uno spazio vettoriale reale e $|\cdot|$ una norma in E (per esempio la norma euclidea standard se E è uno spazio euclideo). Sia $T \in L(E)$. Definiamo la* norma uniforme *di T in E come*

$$\|T\| := \max_{|x|\le 1} |Tx|.$$

Lemma 3.2 *Sia E uno spazio vettoriale reale e siano T, S operatori lineari in E. Risulta:*

$$|Tx| \le \|T\|\,|x| \quad \forall x \in E, \tag{3.1a}$$

$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|, \tag{3.1b}$$

$$\|T^m\| \le \|T\|^m \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.1c}$$

Dimostrazione. Se $x = 0$ si ha $Tx = 0$ e quindi la (3.1a) è banalmente soddisfatta se $x = 0$. Supponiamo dunque $x \neq 0$. Possiamo allora definire $y = x/|x|$, così che $|y| = 1$. Si ha allora, dalla definizione 3.1, $\|T\| \ge |Ty| \ge |Tx|/|x|$ (per le proprietà della norma), da cui segue la (3.1a).

Si ha $|STx| \le \|S\|\,|Tx| \le \|S\|\,\|T\|\,|x|$, e quindi

$$\|ST\| = \max_{|x|\le 1} |STx| \le \max_{|x|\le 1} \|S\|\,\|T\|\,|x| = \|S\|\,\|T\|,$$

da cui segue la (3.1b).

Per dimostrare la (3.1c) si può procedere per induzione. Per $m = 1$ la relazione è ovviamente soddisfatta. Supponendo che essa valga per $m' < m$, si ottiene allora dalla (3.1b)

$$\|T^m\| = \|T^{m-1}T\| \le \|T^{m-1}\|\,\|T\| \le \|T\|^{m-1}\|T\|,$$

che dà subito la (3.1c) anche per m. ■

Definizione 3.3 (Esponenziale di un operatore lineare) *Definiamo l'*esponenziale di un operatore lineare $T \in L(E)$ *come*

$$\exp T = \mathrm{e}^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!},$$

dove $T^0 = \mathbb{1}$ per ogni $T \in L(E)$.

Proposizione 3.4 *La serie che definisce l'esponenziale di un operatore lineare è assolutamente convergente per ogni T.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in E$ si ha

$$\mathrm{e}^T x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k x}{k!} \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{e}^T x| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|T^k x|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k |x|}{k!}, \tag{3.2}$$

per le diseguaglianze (3.1a) e (3.1c). Ne segue che

$$\|\mathrm{e}^T\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{k!}, \tag{3.3}$$

che converge per ogni $\|T\| \in \mathbb{R}$. La (3.3) esprime la convergenza assoluta (i.e. in norma) della serie che definisce l'esponenziale di T (cfr. la definizione 3.3). ∎

Lemma 3.5 (Proprietà dell'esponenziale di un operatore lineare) *Siano A, B, Q, T, S operatori in $L(E)$, e sia Q invertibile. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $B = QAQ^{-1} \Longrightarrow \mathrm{e}^B = Q\mathrm{e}^A Q^{-1}$,
2. $ST = TS \Longrightarrow \mathrm{e}^{S+T} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^T$,
3. $\mathrm{e}^{-S} = \left(\mathrm{e}^S\right)^{-1}$,
4. $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \Longrightarrow \left(\mathrm{e}^A\right)_{ij} = \mathrm{e}^{\lambda_i} \delta_{ij}$,
5. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

Dimostrazione. Dalla definizione 3.3 si ha

$$\mathrm{e}^{QAQ^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(QAQ^{-1})^k}{k!},$$

dove

$$(QAQ^{-1})^k = (QAQ^{-1})\,(QAQ^{-1}) \ldots (QAQ^{-1}) = QA^k Q^{-1},$$

poiché $QQ^{-1} = \mathbb{1}$. Si ha pertanto

$$\mathrm{e}^{QAQ^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{QA^kQ^{-1}}{k!} = Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} Q^{-1} = Q\mathrm{e}^{A}Q^{-1},$$

che è la proprietà 1.

Dalla definizione 3.3 si ha

$$\mathrm{e}^{S+T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S+T)^k}{k!}, \qquad (S+T)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^j T^{k-j},$$

dove si sono utilizzate la *formula del binomio di Newton* e la commutatività degli operatori S e T, per espandere $(S+T)^k$, così che

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S+T)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{S^j T^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{k} \frac{S^{k_1}}{k_1!} \frac{T^{k-k_1}}{(k-k_1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le k \\ k_1+k_2=k}} \frac{S^{k_1}}{k_1!} \frac{T^{k_2}}{k_2!} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{S^{k_1}}{k_1!} \frac{T^{k_2}}{k_2!} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^T, \end{aligned}$$

di nuovo per definizione di esponenziale di un operatore. Da qui segue la proprietà 2.

Se nella proprietà 2 si pone $T = -S$, otteniamo

$$\mathrm{e}^S \mathrm{e}^{-S} = \mathrm{e}^{S-S} = \mathrm{e}^0 = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \mathbb{1},$$

da cui segue la proprietà 3.

Se A è una matrice diagonale, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

risulta, come è immediato verificare per induzione (cfr. l'esercizio 32),

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

così che, applicando la definizione 3.3, troviamo

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

che comporta la proprietà 4.

Per dimostrare la proprietà 5 utilizziamo le proprietà 1 e 4. In particolare la seconda delle due implica che, nella base degli autovettori $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$, con $\varphi = u + iv$, in cui l'operatore è rappresentato dalla matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix},$$

con $\mu = a + ib$, risulta

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\mu} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\mu}} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la matrice del cambiamento di base definita nell'osservazione 2.18, troviamo

$$e^T = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mu} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

che implica, per calcolo diretto, la proprietà 5. ■

Osservazione 3.6 Il lemma 3.5 permette di calcolare l'esponenziale di qualsiasi operatore lineare diagonalizzabile (o semisemplice). Supponiamo infatti che T sia un operatore lineare diagonalizzabile. Esiste allora una matrice invertibile Q tale che $D = QTQ^{-1}$ è diagonale: possiamo applicare la proprietà 4 e calcolare e^D. D'altra parte, per la proprietà 1, si deve avere $e^T = Qe^DQ^{-1}$, che fornisce l'espressione esplicita dell'esponenziale di T.

Definizione 3.7 (Operatore lineare nilpotente) *Diremo che un operatore lineare $T \in L(E)$* è nilpotente *se $T^n = 0$ per qualche intero positivo n. Diremo che T* è nilpotente di ordine *k se $T^k = 0$, mentre per $i = 1, \dots, k-1$ si ha $T^i \neq 0$, i.e. esiste x_i tale che $T^i x_i \neq 0$.*

Osservazione 3.8 Si noti che se l'operatore $T \in L(E)$ è nilpotente, allora $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 1$ (cfr. l'esercizio 33).

Osservazione 3.9 L'esponenziale di un operatore nilpotente si calcola immediatamente, poiché la serie che definisce l'esponenziale si riduce in tal caso a una somma finita. Infatti se A è la matrice che rappresenta un operatore nilpotente di ordine n, si ha

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1},$$

dove si è tenuto conto che $A^n = 0$ e quindi $A^k = 0\ \forall k \geq n$ (poiché $A^k = A^{k-n}A^n = A^{k-n}0 = 0$ per $k \geq n$).

Esempio 3.10 Sia $T = a\mathbb{1} + B$ una matrice nello spazio vettoriale reale bidimensionale E, dove

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $a\mathbb{1}$ e B commutano, possiamo applicare la propietà 2,

$$\mathrm{e}^T = \mathrm{e}^{a\mathbb{1}}\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^a\mathbb{1}\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \mathrm{e}^a \left(\mathbb{1} + B\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ \mathrm{e}^a b & \mathrm{e}^a \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

dove si è usato che la matrice B è nilpotente di ordine 2, i.e. $B^2 = 0$, così che dell'intera somma in (3.6) solo i termini con $k = 0, 1$ sopravvivono.

§4 Operatori non diagonalizzabili

Finora, con l'eccezione dell'esempio 3.10, abbiamo considerato solo operatori lineari diagonalizzabili (semisemplici se visti nello spazio reale) o nilpotenti. Ovviamente non tutti gli operatori lineari sono diagonalizzabili o nilpotenti. Un caso notevole di operatori diagonalizzabili che abbiamo incontrato è rappresentato dagli operatori il cui spettro sia costituito da autovalori tutti distinti; un altro caso importante è dato dagli operatori lineari simmetrici (cfr. gli esercizi 34÷38). Se l'operatore considerato non è diagonalizzabile, la trattazione dei paragrafi precedenti non è più sufficiente. Vedremo nel presente paragrafo come estendere la discussione al caso di operatori non diagonalizzabili.

Dato uno spazio vettoriale complesso E, un operatore $T \in L(E)$ può avere alcuni autovalori coincidenti. In generale, se $n = \dim(E)$, il polinomio caratteristico si scrive nella forma

$$p_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{n_i},$$

dove $n_1 + \ldots + n_r = n$, con n_i che denota la *molteplicità algebrica* (o, nel seguito, semplicemente *molteplicità*) dell'autovalore λ_i, $i = 1, \ldots, r$.