e le corrispondenti frequenze sono

$$\omega_1 := \frac{\partial \varepsilon}{\partial G}, \qquad \omega_2 := \frac{\partial \varepsilon}{\partial M} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial E}\right)^{-1} = \omega(E, G),$$

dove $\omega(E, G)$ è la frequenza del moto corrispondente all'energia E del sistema unidimensionale descritto dall'hamiltoniana $\mathcal{H}_G(\ell, L) := \mathcal{H}(\ell, G, L)$, in cui G è visto come un parametro.]

Esercizio 50 Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$ vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$z^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 1,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm 1)$ tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile; sia g l'accelerazione di gravità.
(1) Si verifichi che la lagrangiana che descrive il sistema è, in coordinate opportune,

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\dot{z}^2 + \left(1 - z^2\right)\dot{\theta}^2 + kz^2 - gz.$$

(2) Si scrivano l'hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(3) Si discuta l'equazione di Hamilton-Jacobi e si trovi una funzione caratteristica $W(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2)$.
(4) Si determinino le variabili d'azione e si calcolino le frequenze in termini di integrali definiti.
[*Suggerimento.* Può essere conveniente usare coordinate cilindriche tenendo conto che la coordinata z è legata alle coordinate x, y attraverso l'equazione che definisce l'ellissoide.]

Esercizio 51 Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin^2\theta}{1+x^2}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{1+\sin^2\theta}\right),$$

(1) Si trovi l'hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e e la si integri per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione e le frequenze dei moti multiperiodici.
(4) Si discuta la periodicità del moto con condizioni iniziali $\theta = 0$, $x = 0$, $\dot{\theta} = 1$, $\dot{x} = \sqrt{2}$.
[*Suggerimento.* (1) L'hamiltoniana è

$$\mathcal{H}(x, \theta, p_x, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_x^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)\frac{p_\theta^2 + 1}{1 + \sin^2\theta}.$$

(2) La funzione caratteristica è $W(x, \theta, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(\theta, \alpha_1) + W_2(x, \alpha_1, \alpha_2)$, dove

$$W_1(\theta, \alpha_1) = \pm\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta' \sqrt{\alpha_1(1 + \sin^2\theta') - 1},$$
$$W_2(x, \alpha_1, \alpha_2) = \pm\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \sqrt{(2\alpha_2 - \alpha_1(1 + (x')^2)\,(1 + (x')^2)},$$

dove $\alpha_1 \geq 1/2$, $\alpha_2 \geq \alpha_1/2$ e le costanti θ_0 e x_0 sono tali che si abbia

$$\alpha_1(1 + \sin^2\theta_0) \geq 1, \qquad 2\alpha_2 - \alpha_1(1 + x_0^2) \geq 0.$$

(3) Delle variabili d'azione J_1 e J_2, la prima è data, se $\alpha_1 \in (1/2, 1)$, da

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \mathrm{d}\theta \sqrt{\alpha_1(1 + \sin^2\theta) - 1},$$

dove $\theta_\pm$ sono le soluzioni dell'equazione $1 + \sin^2\theta = 1/\alpha_1$ tali che risulti $0 < \theta_- < \pi/2 < \theta_+ < \pi$, e, se $\alpha_1 > 1$, da

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{\alpha_1(1 + \sin^2\theta) - 1}$$

mentre la seconda è

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-x_+}^{x_+} \mathrm{d}\theta \sqrt{(2\alpha_2 - \alpha_1(1 + x^2))\,(1 + x^2)},$$

purché si abbia $\alpha_2 > \alpha_1/2$, nel qual caso x_+ è la soluzione positiva di $\alpha_1(1 + x^2) = 2\alpha_2$.]

Esercizio 52 Si consideri il sistema dell'esercizio 51 e si supponga che sia soggetto all'ulteriore vincolo che il punto P si possa muovere solo nel piano xz. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si determinino infine i dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche.

Esercizio 53 Si consideri l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ ottenuta nell'esercizio 82 del capitolo 17 attraverso la trasformazione canonica ivi suggerita. Si dimostri che l'equazione di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione di variabili e si determinino le variabili d'azione e le frequenze come integrali definiti.

Esercizio 54 Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}, \qquad k > 0.$$

(1) Si trovi l'hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e la si risolva per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione.
(4) Si determino le frequenze dei moti multiperiodici utilizzando le variabili azione-angolo.
[*Suggerimento.* (1) L'hamiltoniana è

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2m} p_\theta^2 + \cos^2\theta\right) - \frac{k}{r}.$$

(2) La funzione caratteristica è $W(r, \theta, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(\theta, \alpha_1) + W_2(r, \alpha_1, \alpha_2)$, dove

$$W_1(\theta, \alpha_1) = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta' \sqrt{2m\,(\alpha_1 - \cos^2\theta')},$$

$$W_2(r, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r \sqrt{2m\,(\alpha_2 - V(r'))}, \qquad V(r) := \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{k}{r},$$

dove $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq V(r_{\min})$, dove $r_{\min} := 2\alpha_1/k$ è il punto di minimo di $V(r)$, e le costanti θ_0 e r_0 sono tali che $\alpha_1 - \cos^2\theta_0 \geq 1$ e $\alpha_2 - V(r_0) \geq 0$. (3) Le variabili d'azione sono (J_1, J_2), dove J_1 è data

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \mathrm{d}\theta \sqrt{2m\,(\alpha_1 - \cos^2\theta)},$$

dove $\theta_\pm$ sono le soluzioni di $\cos^2\theta = \alpha_1$ tali che $0 < \theta_- < \pi/2 < \theta_+ < \pi$, se $\alpha_1 \in (0,1)$, e da

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{2m\,(\alpha_1 - \cos^2\theta)},$$

se $\alpha_1 > 1$, mentre J_2 è data da

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} \mathrm{d}\theta \sqrt{2m\,(\alpha_2 - V(r))},$$

dove $r_\pm$ sono le soluzioni di $V(r) = \alpha_2$, tali che $0 < r_- < r_{\min} < r_+$.]

Esercizio 55 Si consideri il sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \frac{1}{2}\dot q_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot q_2^2}{\sin^2 q_1}\right) - \sin q_1\,(1 + \sin q_1 \sin q_2)\,.$$

(1) Si trovi l'hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e la si integri per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione, ove possibile.
(4) Si determino le frequenze del sistema come integrali definiti.

Esercizio 56 Una circonferenza omogenea di massa M e raggio R ruota in un piano orizzontale intorno al suo centro C. Un punto di massa m si muove lungo la circonferenza ed è collegato da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k a un punto P della circonferenza.
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si scrivano l'hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi e la si integri per separazione di variabili.
(4) Si determinino i periodi dei moti multiperiodici in termini di integrali definiti.

Esercizio 57 Un disco omogeneo di densità $\sigma = 1$ e raggio $R = 2$ si muove in un piano verticale, soggetto all'azione della forza peso e di due molle, di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo trascurabile: le due molle collegano due punti diametralmente opposti del bordo del disco a un punto P di massa $m = 1$ libero di muoversi lungo una retta orizzontale r. Sia g l'accelerazione di gravità.
(1) Si scriva l'hamiltoniana del sistema e si dimostri che il sistema è separabile.
(2) Si individui un dato iniziale per il quale il moto è periodico e se ne calcoli esplicitamente il periodo.

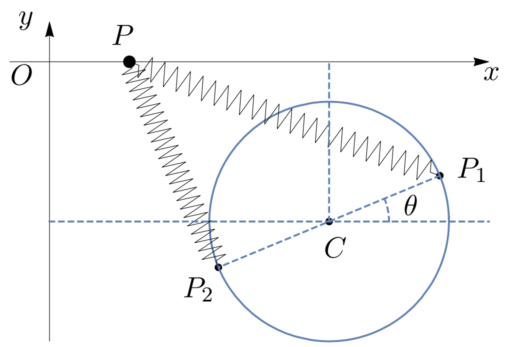

Figura 18.11: Sistema discusso nell'esercizio 57.