FM210 - Fisica Matematica 1 - Tutorato 1
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

1 Marzo 2021

Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2. Si determini la natura del punto d'equilibrio.
3. Scrivere la soluzione generale del sistema.
4. Risolvere lo stesso esercizio per B.

(*) Si ricordi che se entrambi gli autovalori sono positivi (negativi) l'origine è detta *sorgente* (pozzo), se gli autovalori hanno segno discorde l'origine è un punto di sella.

Esercizio 2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale.

Esercizio 3 L'equazione $L\frac{d^2I}{d^2t} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}E(t), \qquad R, L, C > 0$
descrive la corrente $I(t)$ in un circuito con una resistenza R, una induttanza L e una capacità C collegate in serie, cui è stata applicata una forza elettromotrice $E(t)$.

Assumendo $E(t) = E_0 \sin t\omega_0$, scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione e risolverlo al variare dei dati iniziali, in corrispondenza dei parametri: $R = 10\Omega, L = 1mH, C = 1mF$, $E_0 = 1V/m, \omega_0 = 2\pi \cdot 10Hz$.

Esercizio 4 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α.

Esercizio 5 Si consideri la forza posizionale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$\begin{pmatrix} kx_1 \cos^2 ax_3 \\ kx_2 \cos^2 ax_3 \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin 2ax_3 \end{pmatrix}$$

dove k e a sono parametri positivi.

Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Esercizio 6 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x} - 1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x} - 1) \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $H(x, y) = x(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2)$ è una costante del moto.

Esercizio 7 Sia $\Phi(t, x)$ il flusso di un sistema autonomo del primo ordine e T il suo periodo.

1. Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria, ovvero che ogni punto dell'orbita ha lo stesso periodo.

2. Dimostrare che $\Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 8 Sia S l'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) \\ x(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}(0) = x_{2,0} \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali, e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato.

1. Dimostrare che S_0 è uno spazio vettoriale e che S è uno spazio affine su S_0.

2. Dedurre da questo la validità del metodo di variazione delle costanti.