FM210 - Soluzioni Tutorato 1
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

1 Marzo 2021

Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2. Si determini la natura del punto d'equilibrio.
3. Scrivere la soluzione generale del sistema.
4. Risolvere lo stesso esercizio per B.

(*) Si ricordi che se entrambi gli autovalori sono positivi (negativi) l'origine è detta *sorgente* (pozzo), se gli autovalori hanno segno discorde l'origine è un punto di sella.

Soluzione 1. Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_c(t) = (3-t)(-1-t) - 12 = t^2 - 2t - 15$$

. Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$ e risolvendo per $i = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_i & 2 \\ 6 & -1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo gli autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Siccome gli autovalori hanno segno opposto, l'origine è un punto di sella.
3. Abbiamo $A = PDP^{-1}$ con P invertibile e D diagonale:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

.

Quindi $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} = PDP^{-1}\underline{x}$, da cui segue $P^{-1}\underline{\dot{x}} = DP^{-1}\underline{x}$.
Se $P^{-1}\underline{x} = (u, v)$, allora

$$\begin{cases} \dot{u} = -3u \\ \dot{v} = 5v \end{cases}$$

e quindi $u(t) = e^{\lambda_1 t}u(0), v(t) = e^{\lambda_2 t}v(0)$ pertanto

$$\underline{x}(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}\underline{x}(0)$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4}[(e^{-3t} + 3e^{5t})x_1(0) + (-e^{-3t} + e^{5t})x_2(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{4}[-3(e^{-3t} - e^{5t})x_1(0) + (3e^{-3t} + e^{5t})x_2(0)] \end{cases}$$

4. Come prima. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Hanno lo stesso segno e sono positivi quindi l'origine è una sorgente. Gli autovettori sono:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizziamo la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}[(e^{3t} + e^{t})x_1(0) + (-e^{3t} + e^{t})x_2(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{2}[(-e^{3t} + e^{t})x_1(0) + (e^{3t} + e^{t})x_2(0)] \end{cases}$$

Esercizio 2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale.

Soluzione Per prima cosa calcoliamo gli autovalori di A il cui polinomio caratteristico è $p_c(t) = (1-t)(t^2 - 7t + 10)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$,
$\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. Calcoliamo gli autovettori:
$v_1 = (1, -1, 1)$, $\quad v_2 = (-2, -3, 1)$, $\quad v_3 = (1, 3, 1)$.
Abbiamo $A = PDP^{-1}$ con P invertibile e D diagonale:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

.
Se $P^{-1}\underline{x} = (u, v, w)$, allora

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = 2v \\ \dot{w} = 5w \end{cases}$$

e quindi $u(t) = e^t u(0), v(t) = e^{2t} v(0), w(t) = e^{5t} w(0)$ pertanto

$$\underline{x}(t) = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1} \underline{x}(0)$$

Quindi la soluzione del sistema iniziale sarà quindi data da

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{12}[(6e^t + 8e^{2t} - 2e^{5t})x_1(0) + (-3e^t + 3e^{5t})x_2(0) + (3e^t - 8e^{2t} - 5e^{5t})x_3(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{12}[(-6e^t + 12e^{2t} - 6e^{5t})x_1(0) + (3e^t - 9e^{5t})x_2(0) + (-3e^t - 12e^{2t} - 15e^{5t})x_3(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{12}[(6e^t - 4e^{2t} - 2e^{5t})x_1(0) + (-3e^t + 3e^{5t})x_2(0) + (3e^t + 4e^{2t} + 5e^{5t})x_3(0)] \end{cases}$$

Esercizio 3 L'equazione $L\dfrac{d^2I}{d^2t} + R\dfrac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \dfrac{d}{dt}E(t), \qquad R, L, C > 0$

descrive la corrente $I(t)$ in un circuito con una restistenza R, una induttanza L e una capacità C collegate in serie, cui è stata applicata una forza elettromotrice $E(t)$.

Assumendo $E(t) = E_0 \sin t\omega_0$, scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione e risolverlo al variare dei dati iniziali, in corrispondenza dei parametri: $R = 10\Omega, L = 1mH, C = 1mF$,

$E_0 = 1V/m, \omega_0 = 2\pi \cdot 10Hz$.

Soluzione Risolvete come al solito con metodo simpatia.
Consiglio: sostiuite solo alla fine.

Esercizio 4 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α.

Soluzione Cominciamo immediatamente col distinguere il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$. Infatti se $\alpha = 0$ allora possiamo scrivere

$$A = \mathrm{Id} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $[\mathrm{Id}, N] = 0$ e $N^2 = \delta_{ij}$. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(\mathrm{Id}t)(\mathrm{Id} + Nt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^t \\ x_{01}te^t + x_{02}e^t \end{pmatrix}$$

Se invece $\alpha \neq 0$ allora il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathrm{Id}) = (1 - \lambda)^2 - \alpha$$

e quindi lo spettro dell'operatore è dato da $\rho(A) = \{1+\sqrt{\alpha}, 1-\sqrt{\alpha}\}$. Consideriamo quindi il caso $\alpha > 0$, poniamo $\omega = \sqrt{\alpha}$ e calcoliamo gli autospazi; $E_{1+\omega}$ è dato da

$$\begin{cases} -\omega x_1 + \omega^2 x_2 = 0 \\ x_1 - \omega x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E_{1+\omega} = \{(\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Analogamente si verifica che

$$E_{1-\omega} = \{(-\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

perciò troviamo una base di autovettori è data da

$$u = (\omega, 1) \qquad v = (-\omega, 1)$$

e quindi

$$D = \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $A = PDP^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= P \exp(Dt) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\omega)t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) & \frac{\omega e^t}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) & \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque la soluzione generale sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})x_{01} + \frac{\omega e^t}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})x_{02} \\ \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})x_{01} + \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})x_{02} \end{pmatrix}$$

Infine nel caso $\alpha < 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{|\alpha|}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha > 0$; la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte notiamo che

$$\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \cos\sqrt{|\alpha|}t \qquad \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i} = \sin\sqrt{|\alpha|}t$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos\sqrt{|\alpha|}t x_{01} - \sqrt{|\alpha|}e^t \sin\sqrt{|\alpha|}t x_{02} \\ \frac{e^t}{\sqrt{|\alpha|}} \sin\sqrt{|\alpha|}t x_{01} + e^t \cos\sqrt{|\alpha|}t x_{02} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Si consideri la forza posizionale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$\begin{pmatrix} kx_1 \cos^2(ax_3) \\ kx_2 \cos^2(ax_3) \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin(2ax_3) \end{pmatrix}$$

dove k e a sono parametri positivi.

Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Soluzione Si noti che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio semplicemente connesso quindi la condizione necessaria perché F sia conservativa (derivate in croce uguali a due a due) è anche una condizione sufficiente. Calcoliamo quindi le derivate incrociate:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -2akx_1 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_1(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -2akx_1 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_1(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

Quindi $\mathbf{F}$ è conservativa. Determiniamo ora l'energia potenziale:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = -kx_1 \cos^2(ax_3) \Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{x_1^2}{2} \cos^2(ax_3) + c(x_2, x_3)$$

Dove $c(x_2, x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalle variabili x_2 e x_3. Calcoliamoci esplicitamente $c(x_2, x_3)$:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = F_2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial c(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -F_2 = -kx_2 \cos^2(ax_3)$$

$$\Rightarrow c(x_2, x_3) = -k\frac{x_2^2}{2} \cos^2(ax_3) + b(x_3)$$

Dove $b(x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalla variabile x_3. Calcoliamoci esplicitamente $b(x_3)$:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_3} = F_3 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{ak}{2}(x_1^2+x_2^2) \sin(2ax_3) + b'(x_3) = F_3 = -ak\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \sin(2ax_3)$$

$$\Rightarrow b'(x_3) = 0 \Rightarrow b(x_3) = cost$$

$$U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} cos^2(ax_3)$$

Esercizio 6 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x} - 1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x} - 1) \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $H(x, y) = x(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2)$ è una costante del moto.

Soluzione Basta derivare H rispetto al tempo

$$\frac{dH(x(t),y(t))}{dt} = \dot{x}(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2) + x(2y\dot{y} + 4(2e^{-x} - 1)\dot{x}e^{-x})$$

Sostituire $\dot{x}$ e $\dot{y}$ con le due equazioni e osservare che il risultato è 0.

Esercizio 7 Sia $\Phi(t,x)$ il flusso di un sistema autonomo del primo ordine e T il suo periodo.

1. Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria, ovvero che ogni punto dell'orbita ha lo stesso periodo.

2. Dimostrare che $\Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Soluzione 1. Si usino le proprietà di gruppo della soluzione $\Phi(t,x)$.
Se esiste $T > 0$ tale che $\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $y = \Phi(\bar{t}, x)$ si ha allora $\Phi(t+T, y) = \Phi(t+T, \Phi(\bar{t}, x) = \Phi(t+T-\bar{t}, x) = \Phi(t-\bar{t}, x) = \Phi(t\Phi(\bar{t}, x)) = \Phi(t, y)$ cioè $\Phi(t + T, y) = \Phi(t, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Quindi il periodo T non dipende dal punto della traiettoria.

2. Per induzione su $n > 1$.
Se $n = 2 \Rightarrow \Phi(t+2T, x) = \Phi(t+T+T, x) = \Phi(T, \Phi(t+T, x)) = \Phi(T, \Phi(t, x)) = \Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$.
Suppongo ora che il claim sia vero per $n > 1$ e lo dimostro per $n + 1$:
$\Phi(t + (n + 1)T, x) = \Phi(t + nT + T, x) = \Phi(nT, \Phi(t + T, x)) = \Phi(nT, \Phi(t, x)) = \Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x)$.

Esercizio 8 Sia S l'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) \\ x(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}(0) = x_{2,0} \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali, e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato.

1. Dimostrare che S_0 è uno spazio vettoriale e che S è uno spazio affine su S_0.

2. Dedurre da questo la validità del metodo di variazione delle costanti.

Soluzione Si tratta di una generalizzazione di quanto descritto nel file `http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/testo/app03.pdf`