

FM210 - Soluzioni Tutorato 2
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

8 Marzo 2021

Esercizio 1 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

1. Si determini una grandezza conservata del moto.
2. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
3. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.

Soluzione

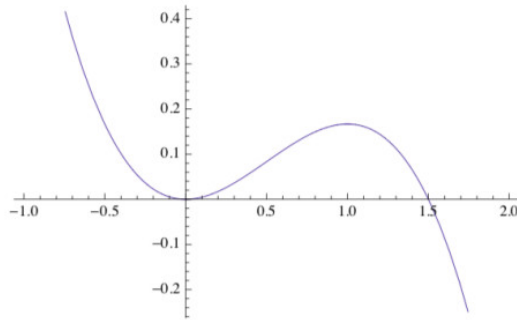
1. L'energia $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ è conservata:

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x - x^2) = 0$$

2. Le curve di livello per un'energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{2\left(E - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)}$$

Il grafico di $V(x)$ è:



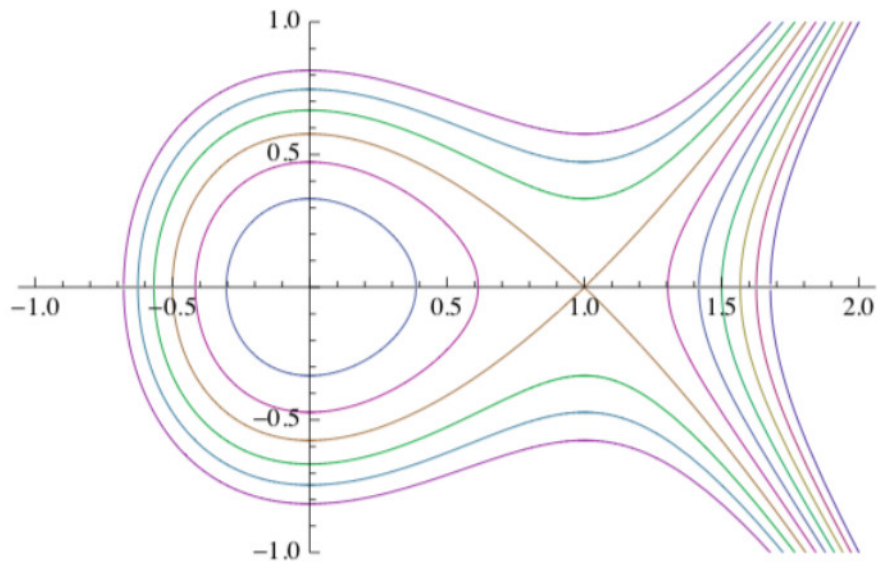
$V(x)$ ha un minimo in 0 e un massimo in 1, e $V(0) = 0$, $V(1) = 1/6$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \pm\infty$; Inoltre V decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, \infty)$. Quindi

- $E < 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = 0$, e

$$\left. \frac{d}{dx} \dot{x} \right|_{x=x_E+\varepsilon} = -\frac{V'(x_E+\varepsilon)}{2\sqrt{2(E-V(x_E+\varepsilon))}}$$

con $V'(x_E) \neq 0$ quindi $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ (dove il ' significa una derivata rispetto a x). Inoltre $\dot{x}(x) \rightarrow \pm\infty$ quando $x \rightarrow \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $0 < E < 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)})$ e per $x \geq x_E$ e per $x^{(\pm)}$ e x_E sono le tre soluzioni di $V(x^{(\pm)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x^{(\pm)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.
- se $E > 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.
- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = 0$, nel qual caso $\dot{x}(x) = \dot{x}(0) = 0$, e per $x \geq x_0$ dove x_0 è la seconda soluzione $V(x_0) = 0$, nel qual caso la traiettoria ha le stesse proprietà qualitative di quelle aperte a energia negativa.
- se $E = 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, 1]$ e per $x \in [1, \infty)$ dove $x_E^{(-)}$ è la prima delle due soluzioni di $V(x_E^{(-)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x_E^{(-)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(1) = \pm 1$. Inoltre $\dot{x}(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito. Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico



- 3.
- se $x(0) \geq x_E$ dove x_E è la più grande delle soluzioni di $V(x_E) = E$, $E \neq 1/6$, allora il moto è aperto.
 - se $0 < E < 1/6$, $x(0) \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)})$ e per $x_E^{(\pm)}$ sono le due soluzioni più piccole di $V(x_E^{(\pm)}) = E$, allora $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ quindi il moto è chiuso e periodico.
 - se $E = 0$ e $x(0) = 0$, il moto è costante, quindi chiuso e periodico.
 - se $E = 1/6$ e $x(0) > 1$, allora il moto è aperto.
 - se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto è limitato e asintotico (omoclinico).

Esercizio 2 Per ognuno dei seguenti potenziali $V(x)$, considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a tale potenziale e

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
4. Si disegnano le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.

Potenziali :

- a) $V(x) = x + 2 \sin x$
- b) $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$
- c) $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$

Soluzione a

1. L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2 \cos x$$

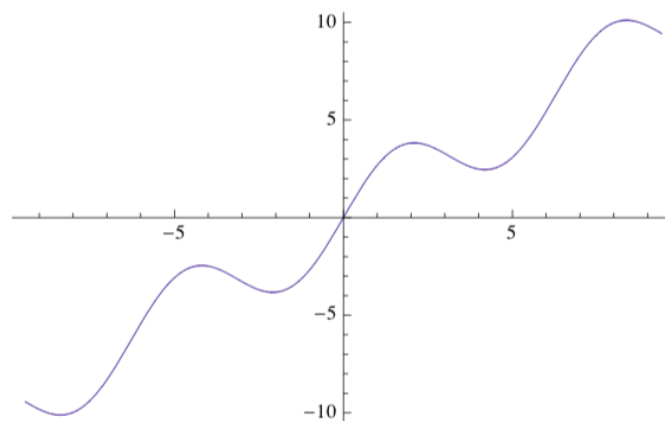
L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

è una grandezza conservata (un integrale primo del moto):

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + 1 + 2 \cos x) = 0$$

2. Il grafico dell'energia potenziale:



3. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale (ossia gli x tali che $U'(x) = 0$) sono

$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Gli a_k son massimi e i b_k sono minimi. Inoltre abbiamo

$$V(a_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \quad V(b_k) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$$

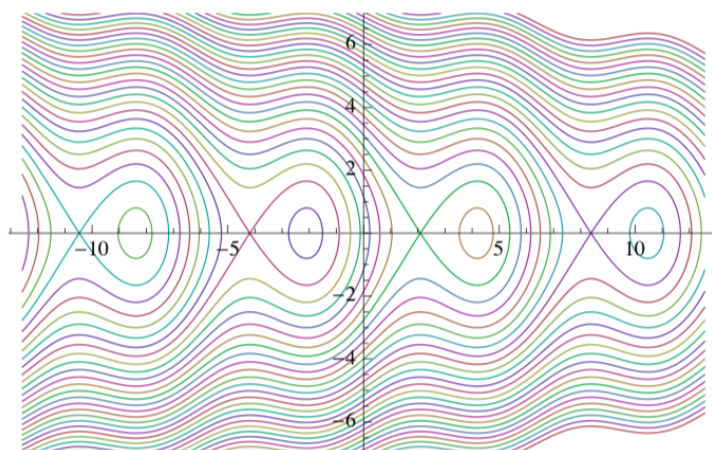
quindi $V(b_{k+1}) > V(b_{k-1})$ (perchè $\frac{4\pi}{3} > 4 > 2 > \sqrt{3}$).

4. Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2(E - x - 2\sin x)}.$$

- Se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$, $V(x) = E$ ha 3 soluzioni: $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$ e per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)})$. Come $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ e $V'(x_E) = 0$, $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \rightarrow -\infty$.
- Se $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1}))$, $V(x) = E$ ha una soluzione: x_E , e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \rightarrow -\infty$.
- Se $E = V(b_k)$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = b_k$ e per $x \leq x_E$ dove x_E è la soluzione di $V(x_E) = E$ diversa da b_k , $\dot{x}(b_k) = 0$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ e $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \rightarrow -\infty$.
- Se $E = V(a_k)$, $V(x) = E$ ha due soluzioni: $a_k < x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq a_k$ e per $x \in [a_k, x_E]$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$, $\dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \rightarrow -\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate:



5. Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $x(0) \leq x_E$ dove x_E è la più piccola delle soluzioni di $V(x_E) = E$ e se $E \neq V(a_k)$ allora il moto non è limitato.
- se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ e $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$ allora il moto è limitato e periodico.
- se $E = V(b_k)$ e $x(0) = b_k$ allora il moto è costante.
- se $E = V(a_k)$ e $x(0) > a_k$ allora il moto è limitato e aperiodico.

Soluzione b

1. L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = x^3 - x \quad (1)$$

Si verifica immediatamente che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} - x^3\dot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - (x^3 - x)) = 0 \quad (2)$$

usando (1).

2. Innanzitutto dobbiamo trovare i punti di equilibrio, ovvero i punti in cui si annulla la derivata del potenziale:

$$V'(x) = -x^3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1. \quad (3)$$

Quindi: Esistono tre punti di equilibrio: $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0), (\pm 1, 0)$. Inoltre

$$V'(x) = x(1 - x^2) \begin{cases} > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \text{ oppure } x < -1 \\ < 0 \text{ se } -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

e $V''(x) = -3x^2 + 1$, cosicché $V''(0) = 1 > 0$, $V''(\pm 1) = -2 < 0$, quindi

- $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile (perché punto 0 di minimo isolato del potenziale e quindi localmente $(0, 0)$ è un minimo isolato dell'energia meccanica, quindi le curve di livello di E sono curve chiuse comprese tra due ellissi. Ma allora dato che le traiettorie del sistema dinamico vivono sulle curve di livello di E , se parto su una di queste curve chiuse vicino a $(0, 0)$ rimango lì vicino. Quindi per definizione è stabile)
- $(\pm 1, 0)$ sono due punti di equilibrio instabili (criterio del linearizzato).

I grafici delle curve di livello hanno la forma descritta in figura (2).

Essendo $V(0) = 0$, $V(\pm 1) = \frac{1}{4}$, otteniamo che:

- Se il sistema parte con velocità nulla su uno dei punti di equilibrio, allora il moto è costante.
- Se $E > \frac{1}{4}$ i moti sono aperti per tutti i dati iniziali.

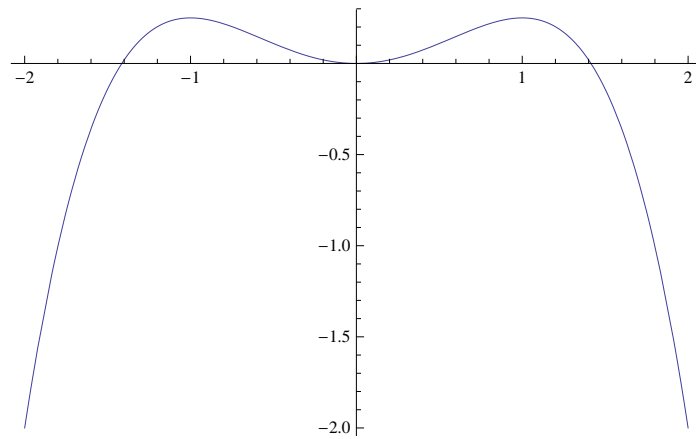


Figura 1: Grafico di $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$

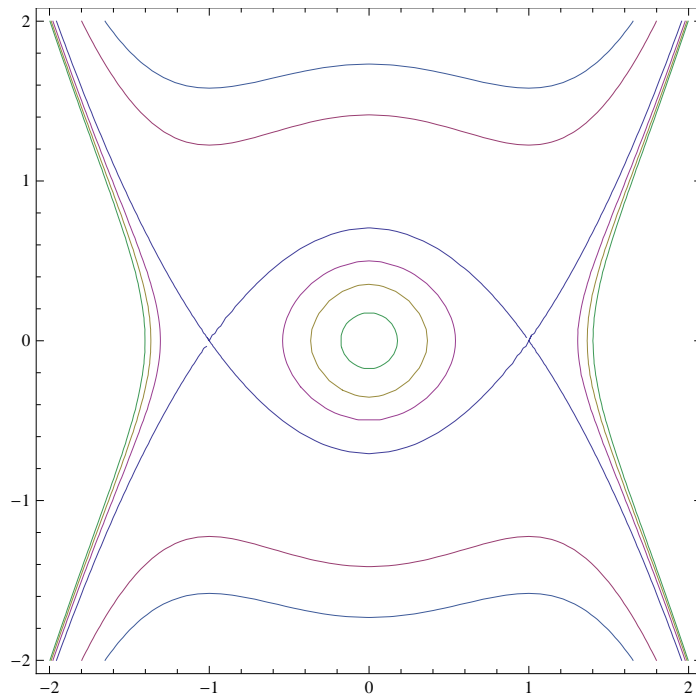


Figura 2: Curve di livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$

- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| < 1$, il moto è periodico intorno al minimo del potenziale.
- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| > 1$, il moto è aperto.
- Se $E = 1/4$ e $x(0) \in (-1, 1)$ il moto è limitato e a periodico, e asintotico nel passato e nel futuro a ± 1 , a seconda del valore iniziale della velocità (se $\dot{x}(0) > 0$, allora $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = \pm 1$, e viceversa). Se $E = 1/4$ e $x(0) < -1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro

a -1 , a seconda che $\dot{x}(0)$ sia negativa/positiva. Se $E = 1/4$ e $x(0) > 1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a 1 , a seconda che $\dot{x}(0)$ sia positiva/negativa.

Consideriamo $0 < E < \frac{1}{4}$, e chiamiamo $x_E^{(\pm)}$ le due soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ tali che $x_E^{(\pm)} \in (-1, 1)$. Allora, il tempo che la particella impiega per arrivare da $x_E^{(-)}$ a $x_E^{(+)}$ è

$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} ds = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \quad (5)$$

Per calcolare il periodo del moto dobbiamo sommare il tempo di andata e quello di ritorno, quindi

$$T = 2[t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)})] = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (6)$$

Soluzione c

1. L'equazione del moto è $\ddot{x} = xe^{x^2}$. Si verifica immediatamente che l'energia meccanica è conservata, infatti

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} \quad (7)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\ddot{x} - x\dot{x}e^{x^2} = \dot{x}(\ddot{x} - xe^{x^2}) = 0$$

2. Notiamo prima di tutto che $V(x) \leq -1/2$ per ogni x . Inoltre

$$V'(x) = -xe^{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

e

$$V''(x) = -e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} < 0 \text{ per ogni } x \quad (9)$$

Quindi l'unico punto fisso del sistema è $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, ed è un punto di equilibrio instabile. Per tutti gli altri dati iniziali, i moti sono moti aperti, non ci sono moti periodici. Il grafico del potenziale e delle curve di livello sono nelle figure (3) e (4).

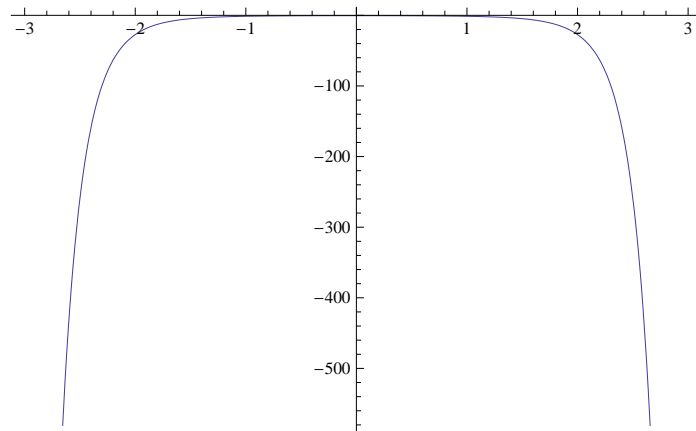


Figura 3: Grafico di $V(x) = -\frac{e^{x^2}}{2}$

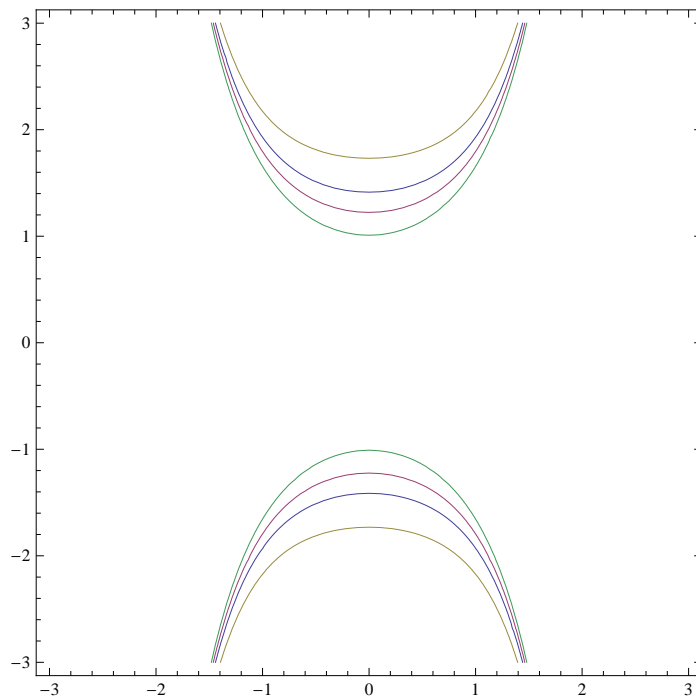


Figura 4: Grafico delle curve li livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$. Nota: i valori in figura corrispondono tutti a valori di E maggiori di $-1/2$. La separatrice e le curve con $E < -1/2$ non sono riportate esplicitamente.

Esercizio 3 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha \frac{x^2}{2}$$

1. Si determino i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.
2. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio (non degeneri).

3. Si determini l'energia del sistema.
4. Si verifichi che E è una costante del moto.

Soluzione 1. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale, ossia gli x tali che $V'(x) = x^3 + \alpha x = x(x^2 + \alpha) = 0$.

- se $\alpha > 0$ abbiamo un unico punto di equilibrio: $x_0 = 0$
- se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti di equilibrio: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$

2. La stabilità si determina calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale nei punti di equilibrio (per i punti stabili si veda la spiegazione al punto 2 della soluzione b es 2)

- se $\alpha > 0$ il punto $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha > 0$$

e quindi $x_0 = 0$ è un punto di minimo del potenziale.

- se $\alpha < 0$ (a) il punto $x_1 = 0$ è un punto di equilibrio instabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha < 0$$

e quindi $x_1 = 0$ è un punto di massimo del potenziale. (b) i punti $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=\pm\sqrt{-\alpha}} = -3\alpha + \alpha = -2\alpha > 0$$

e quindi $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di minimo del potenziale.

3. L'energia del sistema è $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$
4. E è una costante del moto, infatti

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-V'(x) + x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-x^3 - \alpha x + x^3 + \alpha x) = 0$$