

FM210 - Tutorato 3
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

15 Marzo 2021

Esercizio 1 Sia $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$ un punto di massimo relativo per V con $V''(x_0) \neq 0$. Dimostrare che x_0 è un punto d'equilibrio instabile utilizzando il teorema 17.13 [G].

Esercizio 2 Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{|x|} + x + \alpha \log x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Al variare di α si discutano i seguenti punti.

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si analizzino qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
4. Per $\alpha = 0$ si verifichi che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, \frac{3}{\sqrt{2}})$ è periodica.
5. Si scriva il periodo della traiettoria del punto (4) come integrale definito e se ne dia una stima

Esercizio 3 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

- Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

Esercizio 4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Si scelga l'energia potenziale in modo tale che sia $V(0) = -1/2$

- Verificare che il moto che si svolge sulla curva di livello Γ_E , con $E = -1/5$, per un'opportuna scelta del dato iniziale \bar{x} , è periodico.
- Se ne stimi il periodo.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità
- Dopo aver tracciato un grafico qualitativo dell'energia potenziale, studiare le curve di livello nel piano delle fasi.

Esercizio 5 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{1}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0 \left(\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right) \tag{2}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V , quindi delle curve di livello al variare di E , etc.)
2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?