FM210 - Tutorato 3
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

15 Marzo 2021

Esercizio 1 Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$ un punto di massimo relativo per V con $V''(x_0) \neq 0$. Dimostrare che x_0 è un punto d'equilibrio instabile utilizzando il teorema 17.13 [G].

Soluzione $m\ddot{x} = -V'(x) = -V''(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)^2)$. Scriviamo il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{V''(x_0)}{m}(x - x_0) + o((x - x_0)^2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V''(x_0)}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{V''(x_0)x_0}{m} + o((x - x_0)^2) \end{pmatrix}$$

Quindi il linearizzato è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V''(x_0)}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_c(t) = t^2 + \frac{V''(x_0)}{m}$ e quindi gli autovalori $\lambda_\pm = \sqrt{-\frac{V''(x_0)}{m}}$.
Per ipotesi x_0 è punto di massimo quindi $V''(x_0) < 0$ e pertanto $-\frac{V''(x_0)}{m} > 0$. Quindi la radice è ben definita e gli autovalori sono reali e di segno opposto. Avendo almeno uno dei due parte reale positiva, per il teorema 17.13 x_0 è instabile.

Esercizio 2 Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{|x|} + x + \alpha \log x^2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Al variare di α si discutano i seguenti punti.

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si analizzino qualitativamente il moto nel piano $(x, \dot{x})$.
4. Per $\alpha = 0$ si verifichi che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, \frac{3}{\sqrt{2}})$ è periodica.
5. Si scriva il periodo della traiettoria del punto (4) come integrale definito e se ne dia una stima

Soluzione Osserviamo subito che per ogni valore di α il potenziale presenta un asintoto verticale in $x = 0$ e non ha asintoti orizzontali.

Studiamo la derivata prima del potenziale:

$$V'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2\alpha}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2\alpha}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Grazie allo studio del segno di tale derivata, ho che per qualunque valore di α il punto $x_0 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ è un punto di minimo del potenziale. Inoltre ho che:

- Se $\alpha > 1$, i punti $x_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ sono x_- un massimo e x_+ un minimo del potenziale e il potenziale è crescente per $x < x_-$, $x_+ < x < 0$ e per $x > x_0$.
- Se $\alpha = 1$, $x = -1$ è un punto di flesso del potenziale che è crescente per $x < 0$ e $x > x_0$.
- Se $\alpha < 1$ non vi sono altri punti critici e il potenziale è strettamente crescente per $x < 0$ e $x > x_0$.

Pertanto abbiamo che, considerato il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases} .$$

- $(x_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per ogni valore di α
- Se $\alpha > 1$ allora $(x_-, 0)$ è un punto di equilibrio instabile e $(x_+, 0)$ un punto di equilibrio stabile
- Se $\alpha = 1$ allora $(-1, 0)$ è un punto di equilibrio instabile

Curve di Livello

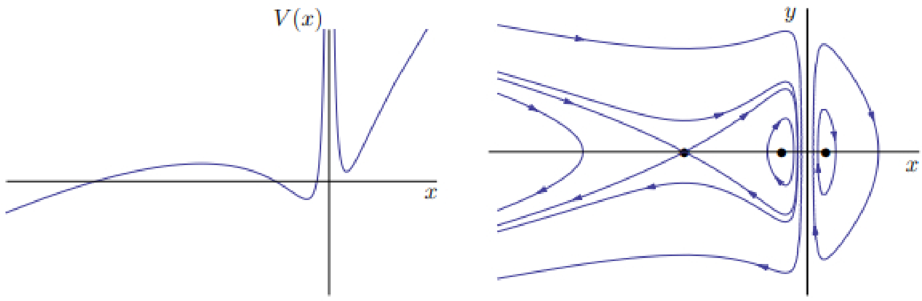
In tutti e 3 i casi abbiamo per ogni valore di energia $E > V(x_0)$ e per ogni dato iniziale con $x(0) > 0$ moti chiusi periodici attorno al punti di equilibrio stabile $(x_0, 0)$ ed il moto fisso $x(t) \equiv x_0$ per $E > V(x_0)$ e $x(0) = 0$

Studiamo ora le curve di livello per $x(0) < 0$ nei 3 casi:

Caso 1: $\alpha > 1$

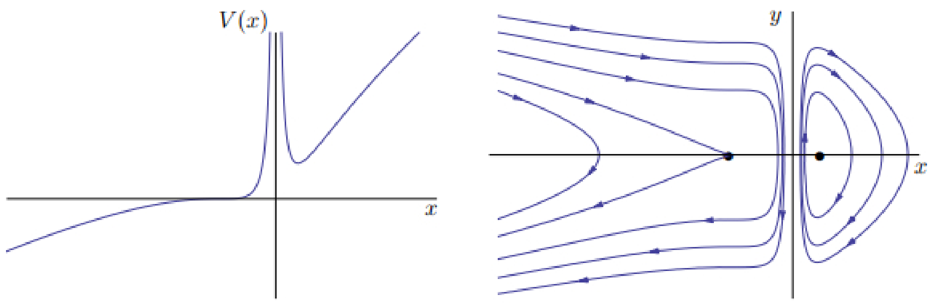
- Se $E = V(x_\pm)$ e $x(0) = x_\pm$ abbiamo i moti fissi sui punti di equilibrio.

- Se $E < V(x_+)$ e $x(0) < x_E$ (dove x_E è la soluzione di $E = V(x)$) abbiamo moti aperti.
- Se $V(x_+) < E < V(x_-)$ e $x(0) < x_E$ abbiamo moti aperti e se $x_E < x(0) < 0$ moti chiusi periodici.
- Se $E = V(x_-)$ e $x(0) < x_-$ abbiamo moti aperti asintotici al punto di equilibrio instabile e se $x_- < x(0) < 0$ moti limitati, anch'essi asintotici al punto di equilibrio instabile.
- Se $E > V(x_-)$ abbiamo moti aperti.



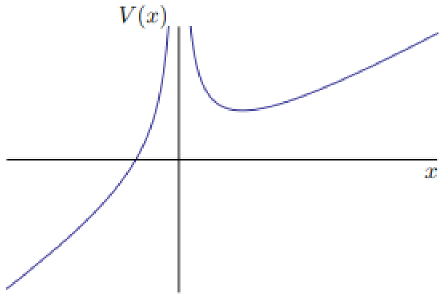
Caso 2: $\alpha = 1$

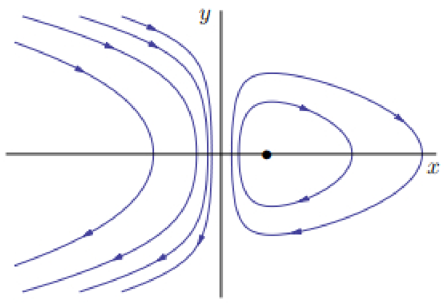
- Se $E = V(-1) = 0$ abbiamo il moto fisso sul punto di equilibrio.
- Se $E \neq 0$ abbiamo moti aperti.
- Se $E = 0$ abbiamo moti aperti asintotici al punto di equilibrio instabile $x = -1$



Caso 3: $\alpha < 1$

Curve aperte per ogni valore dell'energia e per ogni dato iniziale $x(0) < 0$.





Per $\alpha = 0$ il punto $(1, 0)$ è punto di equilibrio stabile pertanto il moto con dato iniziale $(1, \frac{3}{\sqrt{2}})$ è periodico.
In tale punto l'energia è $E = \frac{17}{4}$ e il periodo del moto con tale dato iniziale è

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^-}^{x_E^+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{4} - \frac{1}{x} - x}}$$

Andiamo a stimarlo tramite la proposizione 30.1 del [G]:

$$E - V(x) = \frac{1}{4x}(x - \frac{1}{2})(8 - x)$$

$\frac{1}{4x}$ su $(\frac{1}{2}, 8)$ è C^2, positiva e decrescente (e quindi $\frac{1}{8} \le \frac{1}{x} \le 2$). Quindi

$$\sqrt{\pi^2} \le T \le \sqrt{16\pi^2}$$

Esercizio 3 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

- Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

Soluzione

- Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

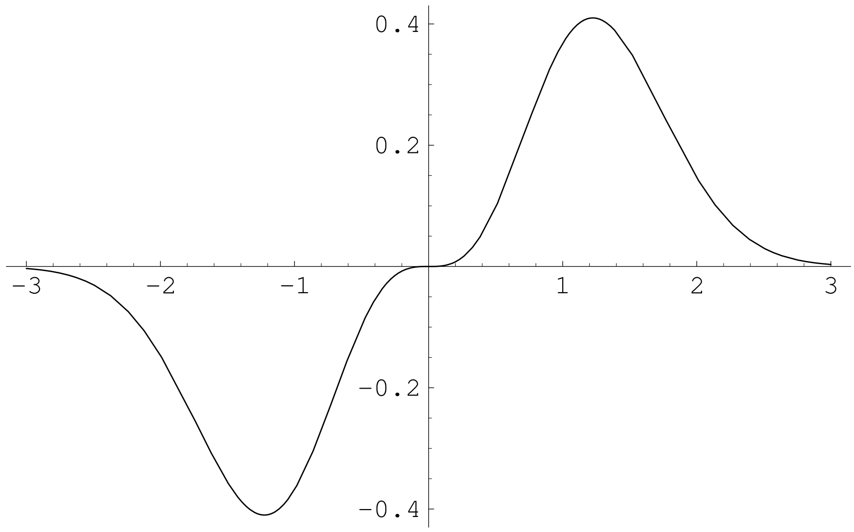
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2} \end{cases} .$$

- Sappiamo che si ha equilibrio nei punti $(x_0, 0)$, con x_0 punto critico del potenziale, e si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3/2}$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0, 0), \qquad P_1 = \left(\sqrt{3/2}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\sqrt{3/2}, 0\right).$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $|x| < \sqrt{3/2}$, quindi $x = -\sqrt{3/2}$ è un punto di minimo, $x = \sqrt{3/2}$ è un punto di massimo, e $x = 0$ è un punto di flesso. Perciò avremo che P_2 è stabile mentre P_0 e P_1 sono instabili. Notiamo inoltre che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

- Innanzitutto $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$ e che $x = 0$ è l'unico punto in cui si ha $V(x) = 0$. Lo studio della derivata è già stato fatto al punto precedente.



- Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = -\sqrt{3/2}$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \geq V(-\sqrt{3/2})$.
  Per $E = V(-\sqrt{3/2})$ avremo quindi il solo punto d'equilibrio stabile P_2.
  Per $V(-\sqrt{3/2}) < E < 0$ avremo una triettoria periodica intorno al punto stabile P_2.
  Per $E = 0$ avremo due traiettoria aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = 0$$

  a tangenza orizzontale (cuspide), e il punto instabile P_0.
  Per $0 < E < V(\sqrt{3/2})$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

  ed un'altra, sempre aperta con

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

  Per $E = V(\sqrt{3/2})$ avremo due traiettorie aperte con

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E},$$

il punto instabile P_1 e due traiettorie aperte con

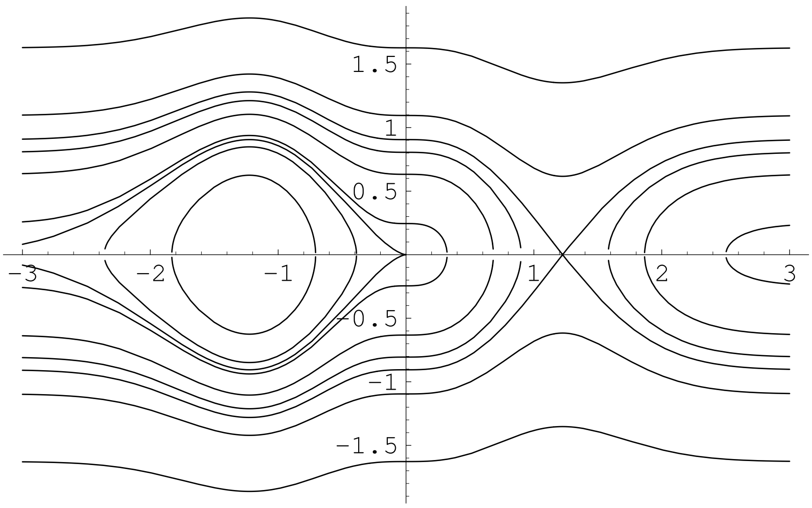
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

Per $E > V(\sqrt{3/2})$ avremo due traiettorie di cui, una con

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$$

e l'altra con

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}.$$



Per $\alpha = 0$ abbiamo che $x_0 = 1 = \bar{x}$ ma $\bar{y} > 0$ quindi il moto non è fisso ma peridico.

Esercizio 4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Si scelga l'energia potenziale in modo tale che sia $V(0) = -1/2$

- Verificare che il moto che si svolge sulla curva di livello Γ_E, con $E = -1/5$, per un'opportuna scelta del dato iniziale $\bar{x}$, è periodico.
- Se ne stimi il periodo.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità
- Dopo aver tracciato un grafico qualitativo dell'energia potenziale, studiare le curve di livello nel piano delle fasi.

Soluzione Poiché deve valere $\ddot{x} = -V'(x)$, il potenziale è dato dall'integrale del secondo membro dell'equazione cambiato di segno, i.e.

$$V(x) = \int_0^x \frac{-x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}\,\mathrm{dx}$$

e integrando otteniamo

$$V(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} + c$$

dove c è una costante d'integrazione arbitraria. Imponendo poi $V(0) = -1/2$ troviamo $c = 0$.

- Innanzitutto vediamo che, ponendo

$$\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{1}{5}$$

troviamo $x_\pm = \frac{(-3 \pm \sqrt{21})}{2}$; osserviamo inoltre che $V(x) \le E$ se e solo se $x \in [x_-, x_+]$. Infine notiamo che $x_\pm$ non sono punti critici di $V(x)$, infatti

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}}(x_-) = -\frac{2(21 + 5\sqrt{21})}{25(5 + \sqrt{21})^2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}}(x_+) = \frac{2(21 - 5\sqrt{21})}{25(5 - \sqrt{21})^2} \neq 0$$

quindi il moto su Γ_E è periodico.

- Notiamo che

$$E - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\phi(x) \quad \text{con} \quad \phi(x) = \frac{1}{5(x^2 - 2x + 2)}$$

Inoltre ϕ è strettamente crescente nell'intervallo $[x_-, x_+]$ e quindi avremo che

$$\phi(x_-) = 2/[25(5+\sqrt{21})] \le \phi(x) \le 2/[25(5-\sqrt{21})] = \phi(x_+) \qquad \forall x \in [x_-, x_+]$$

perciò una stima del periodo è data da

$$5\pi\sqrt{5 - \sqrt{21}} \le T \le 5\pi\sqrt{5 + \sqrt{21}}$$

Notiamo che non si tratta certamente di una stima ottimale; infatti si vede che un'approssimazione numerica di tale stima è

$$10.1487 \le T \le 48.6252$$

- Considerato il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} \end{cases}$$

i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0$$

e questa ha soluzione per $x = 0$ e $x = 2$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema sono i punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (2, 0)$.

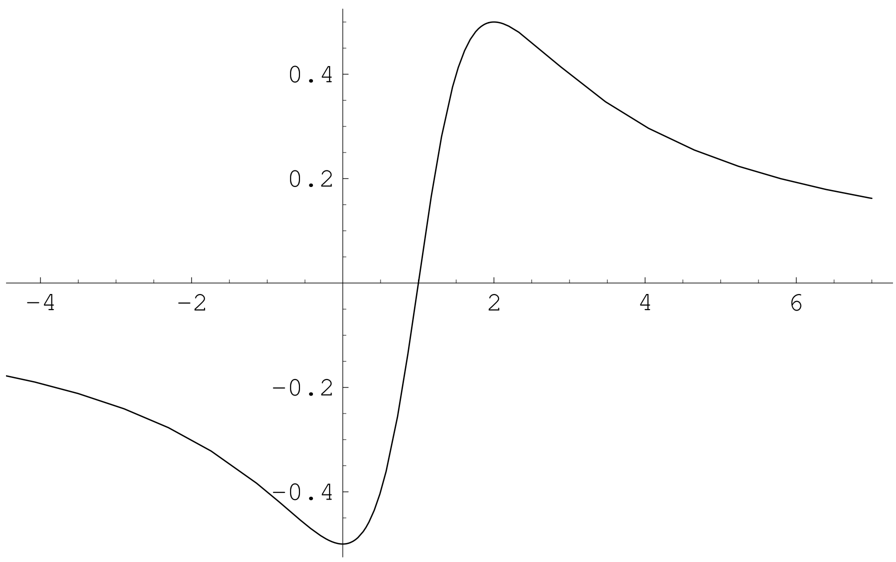
Stabilità dei punti d'equilibrio. Il teorema di Dirichlet ci assicura che i punti d'equilibrio sono stabili se e solo se x_0 è un punto di minimo del potenziale. Derivando ulteriormente il potenziale otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}}{\mathrm{dx}^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3}$$

e $[\mathrm{d}^2\mathrm{V}/\mathrm{dx}^2](0) = 1/2 > 0$ quindi $x = 0$ è un punto di minimo del potenziale, pertanto P_0 sarà un punto d'equilibrio stabile per il sistema. D'altra parte, $[\mathrm{d}^2\mathrm{V}/\mathrm{dx}^2](2) = -1/2 < 0$ quindi $x = 2$ è un punto di massimo per il potenziale, quindi P_1 sarà un punto d'equilibrio instabile.

- Si verifica che $V(0) = -1/2$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = 0$$



Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = -1/2$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \geq V(-1/2)$. Per $E = V(-1/2)$ avremo quindi il solo punto d'equilibrio stabile P_0.
Per $V(-1/2) < E < 0$ avremo una triettoria periodica intorno al punto stabile P_0.
Per $E = 0$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$$

Per $0 < E < V(1/2)$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

ed un'altra, sempre aperta con

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

Per $E = V(1/2)$ avremo due traiettorie aperte con

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E},$$

il punto instabile P_1 e due traiettorie aperte con

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$$

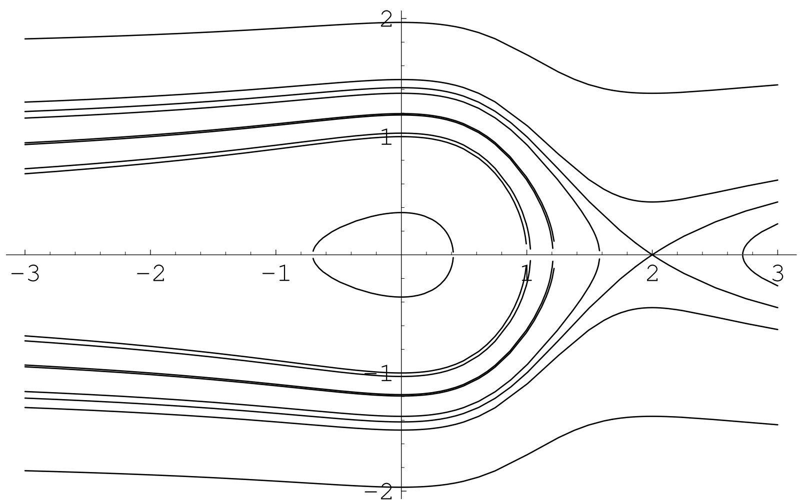
Per $E > V(1/2)$ avremo due traiettorie di cui, una con

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$$

e l'altra con

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$$

.



Esercizio 5 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{1}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{6}\right) \tag{2}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V, quindi delle curve di livello al variare di E, etc.)

2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?

Soluzione

Osservazione: $V(x) = V(-x)$, quindi il potenziale è simmetrico per scambio di segno $x \to -x$. Quindi senza perdita di generalità possiamo restringerci al caso $x = |x| > 0$.

Il grafico del potenziale e le curve di livello, nonché alcune animazioni del moto nel piano (x, V) e nello spazio delle fasi, sono disponibili a questo link: `http://ian.jauslin.org/animations/animations1d/animations.php?system=lennard-jones-html5`.

I moti a energia negativa sono limitati e periodici, mentre i moti a energia $E \geq 0$ sono aperti. Il caso $E = 0$ corrisponde a moti critici, che arrivano all'infinito con velocità nulla.

I moti a energia negativa non banali (i.e., diversi dal moto costante sul punto di equilibrio $x = \sqrt[6]{2}x_0$) hanno periodo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}$$

dove $x_\pm$ sono le due soluzioni di $V(x) = E$ per $-V_0/4 < E < 0$.

Fissiamo ora $E \geq 0$, quindi i moti sono aperti per ogni dato iniziale. Il tempo che il sistema impiega per arrivare a $+\infty$ (una discussione analoga è valida per $-\infty$) è

$$T_\infty = \sqrt{m} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{E + V_0(\frac{x_0^6}{x^6} - \frac{x_0^{12}}{x^{12}})}}$$

che è un integrale divergente, quindi il moto è definito globalmente.